This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

ACA 0150

Rebound 1938

Library of the Museum

OF

COMPARATIVE ZOÖLOGY,

AT HARVARD COLLEGE, CAMBRIDGE, MASS.

Founded by private subscription, in 1861.

L. de Koninck's library

No. 159

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRES

DE L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS

DE BELGIQUE.

Digitized by Google

3762
12.33

Digitized by Google

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS

DE BELGIQUE.

TOME XXIX.

BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

1855.

Sm

Digitized by Google

Digitized by Google

LISTE DES MEMBRES,

DES

CORRESPONDANTS ET DES ASSOCIÉS DE L'ACADÉMIE.

(1er juillet 1855.)

LE ROI, PROTECTEUR.

M. NERENBURGER, président pour 1855.
» QUETELET, secrétaire perpétuel.

COMMISSION ADMINISTRATIVE.

Le directeur de la classe des Sciences, M. NERENBURGER.
» » des Lettres, M. LECLERCQ.
» » des Beaux-Arts, M. F. FÉTIS.
Le Secrétaire perpétuel, M. QUETELET.
Le délégué de la classe des Sciences, M. STAS.
» » des Lettres, M. le baron DE GERLACHE.
» » des Beaux-Arts, M. BRAEMT.

M. STAS, trésorier de l'Académie.

Digitized by Google

CLASSE DES SCIENCES.

M. Nerenburger, directeur.
» Dumont, vice-directeur.
» Quetelet, secrétaire perpétuel.

30 membres.

Section des sciences mathématiques et physiques (15 membres).

M.	Quetelet, A. J. L.; à Bruxelles.	Élu le 1er février 1820.
»	Timmermans, H. A.; à Gand	— 12 octobre 1833.
»	Crahay, J. G.; à Louvain	— 8 mai 1835.
»	Martens, M.; à Louvain	— 15 décemb. 1835.
»	Plateau, J.; à Gand	— 15 décemb. 1836.
»	Delvaux, C.; à Liége.	— 14 décemb. 1841.
»	Stas, J. S.; à Bruxelles.	— id.
»	De Koninck, L. G.; à Liége.	— 15 décemb. 1842.
»	De Vaux, Ad.; à Bruxelles	— 16 décemb. 1846.
»	Nerenburger, G. A.; à Bruxelles	— 15 décemb. 1849.
»	Melsens, H.; à Bruxelles.	— 15 décemb. 1850.
»	Schaar, M.; à Gand	— 15 décemb. 1851.
»	Liagre, J. B. J.; à Bruxelles	— 15 décemb. 1853.
»	Duprez, F.; à Gand	— 16 décemb. 1854.

. . . .

Section des sciences naturelles (15 membres).

M.	D'Omalius d'Halloy, J. J.; à Halloy	Nommé le 3 juillet 1816.
»	Vandermaelen, P.; à Bruxelles	Élu le 10 janvier 1829.
»	Dumortier, B. C.; à Tournay	— 2 mai 1829.
»	Sauveur, D.; à Bruxelles.	— 7 novemb. 1829.
»	Lejeune, A. L. S.; à Verviers	— 7 mai 1834.
»	Wesmael, C.; à Bruxelles	— 15 décemb. 1835.
»	Dumont, A. H.; à Liége.	— 15 décemb. 1836.
»	Cantraine, F.; à Gand	— id.
»	Kickx, J.; à Gand.	— 15 décemb. 1837.

Digitized by Google

M.	Morren, Ch.; à Liége	Élu le	7 mai	1838.
»	Van Beneden, P. J.; à Louvain	—	15 décemb.	1842.
»	de Selys-Longchamps, Edm.; à Liége	—	16 décemb.	1846.
»	Le vicomte Du Bus, B.; à Bruxelles	—	id.	
»	Nyst, Henri; à Louvain	—	17 décemb.	1847.
»	Gluge, T.; à Bruxelles	—	15 décemb.	1849.

Correspondants (10 au plus).

M.	Galeotti, H.; à Bruxelles	Élu le	7 mai	1841.
»	Maus, M. H. J.; à Bruxelles	—	id.	
»	Meyer, A.; à Liége	—	id.	
»	Brasseur, J. B.; à Liége	—	17 décemb.	1847.
»	Donny, F.; à Gand	—	15 décemb.	1850.
»	Mareska J.; à Gand	—	15 décemb.	1851.
»	Poelman, C.; à Gand	—	id.	
»	Dewalque, G.; à Liége	—	16 décemb.	1854.
»	Houzeau, J. C.; à Mons	—	id.	

50 associés.

Section des sciences mathématiques et physiques (25 associés).

M.	Vène, A.; à Paris	Élu le	2 février	1824.
»	Gergonne, F. D.; à Montpellier	—	8 mai	1824.
»	Babbage, Ch.; à Londres	—	7 octobre	1826.
»	Herschel, sir John F. W.; à Londres	—	id.	
»	Barlow, P.; à Woolwich	—	10 novemb.	1827.
»	South, sir James; à Londres	—	id.	
»	Sabine, Ed.; à Londres	—	2 février	1828.
»	Chasles; à Paris	—	4 février	1829.
»	Encke, J. F.; à Berlin	—	7 novemb.	1829.
»	Van Rees, R.; à Utrecht	—	6 mars	1830.
»	Brewster, sir David; à Édimbourg	—	5 avril	1834.
»	Crelle, A. L.; à Berlin	—	id.	
»	Plana, J.; à Turin	—	id.	
»	Matteucci, Ch.; à Pise	—	8 novemb.	1834.
»	Bache, Alex. D.; à Philadelphie	—	9 mai	1842.
»	De la Rive, Aug.; à Genève	—	id.	

Digitized by Google

M. Dumas, J. B.; à Paris . . . . Élu le 17 décemb. 1843.
» Faraday, Michel; à Londres . . . . — 17 décemb. 1847.
» Lamarle, Ern.; à Gand . . . . — id.
» Wheatstone, Ch.; à Londres . . . . — 15 décemb. 1849.
» Liebig, Juste; à Giessen. . . . . — 15 décemb. 1851.
» Airy, G. B.; à Greenwich . . . . — 15 décemb. 1853.
» Maury, M.; à Washington . . . . — 16 décemb. 1854.

. . . .

. . . .

Section des sciences naturelles (25 associés).

M. Le baron de Geer, J. W. L.; à Utrecht . . Nommé le 3 juillet 1816.
» Vrolik, G.; à Amsterdam . . . . — id.
» Moreau de Jonnès, Alex.; à Paris . . . . . Élu le 21 mai 1825.
» Villermé, L. R.; à Paris. . . . . — 31 mars 1827.
» Bertoloni, Ant.; à Bologne . . . . — 6 octobre 1827.
» Granville, A. B.; à Londres . . . . — id.
» Barrat, John; à Grassinton-Moor. . . . . — 1er mars 1828.
» Taylor, John; à Londres . . . . — id.
» Blume, Ch. L.; à Leyde . . . . — 2 mai 1829.
» Brown, Robert; à Londres. . . . . — 7 novemb. 1829.
» Le baron de Humboldt, A.; à Berlin . . . . — 3 avril 1830.
» De Macedo; à Lisbonne . . . . — 15 décemb. 1836.
» Decaisne, Jos.; à Paris . . . . — id.
» Tiedemann, Fr.; à Heidelberg . . . . . . — 15 décemb. 1837.
» Schwann, Ph.; à Liége . . . . — 14 décemb. 1841.
» Spring, A.; à Liége . . . . — id.
» Bonaparte, Charles L., prince de Canino; à Rome. — 9 mai 1842.
» De Martius, Ch. Fr. Ph.; à Munich . . . . — id.
» Lacordaire, Th.; à Liége . . . . — 15 décemb. 1842.
» Sommé; à Anvers . . . . — 9 mai 1843.
» Owen, Richard; à Londres. . . . . — 17 décemb. 1847.
» De Beaumont, Élie; à Paris . . . . — id.
» Milne Edwards, Henri; à Paris. . . . . . — 15 décemb. 1850.
» Muller, Jean; à Berlin . . . . — 15 décemb. 1851.
» Flourens, M. J. P.; à Paris. . . . . — 15 décemb. 1853.

Digitized by Google

CLASSE DES LETTRES.

M. Leclercq, directeur.
» Le baron de Gerlache, vice-directeur.
» Quetelet, secrétaire perpétuel.

---

30 membres.

La section des lettres et celle des sciences morales et politiques réunies.

M.	Le chevalier Marchal, J.; à Bruxelles . . .	Élu le 4 février 1829.
»	Steur, Ch.; à Gand	— 5 décemb. 1829.
»	Le baron de Gerlache, E. C.; à Bruxelles . .	— 12 octobre 1833.
»	Grandgagnage, F. C. J.; à Liége	— 7 mars 1835.
»	Le chanoine De Smet, J. J.; à Gand	— 6 juin 1835.
»	Le chanoine de Ram, P. F. X.; à Louvain . .	— 15 décemb. 1837.
»	Roulez, J. E. G.; à Gand	— id.
»	Moke, H. G.; à Gand	— 7 mai 1840.
»	Nothomb, J. B.; à Bruxelles	— id.
»	Van de Weyer, Sylvain; à Londres	— id.
»	Gachard, L. P.; à Bruxelles	— 9 mai 1842.
»	Quetelet, A. J. L.; à Bruxelles	Nommé le 1er déc. 1845.
»	Van Praet, Jules; à Bruxelles	Élu le 10 janvier 1846.
»	Borgnet, A.; à Liége.	— id.
»	Le baron de Saint-Genois, Jules; à Gand . .	— id.
»	David, J. B.; à Louvain.	— id.
»	Van Meenen, P. F.; à Bruxelles	— id.
»	Devaux, Paul; à Bruxelles	— id.
»	De Decker, P. J. F.; à Bruxelles	— id.
»	Schayes, A. G. B.; à Bruxelles	— 11 janvier 1847.
»	Snellaert, F. A.; à Gand	— id.
»	L'abbé Carton, C.; à Bruges . .	— id.
»	Haus, J. J.; à Gand.	— id.
»	Bormans, J. H.; à Liége	— id.

Digitized by Google

M.	LECLERCQ, M. N. J.; à Bruxelles	Élu le 17 mai 1847.
»	POLAIN, L.; à Liége	— 7 mai 1849.
»	BAGUET, F. N. J. G.; à Louvain	— 6 mai 1850.
»	Le baron DE WITTE, J.; à Anvers	— 6 mai 1851.
»	FAIDER, Ch.; à Bruxelles.	— 7 mai 1855.
»	ARENDT, G. A.; à Louvain	— id.

CORRESPONDANTS (10 au plus).

M.	GRUYER, Louis; à Bruxelles	Élu le 10 janvier 1846.
»	DUCPETIAUX, Éd.; à Bruxelles	— 11 janvier 1847.
»	SERRURE, C. P.; à Gand.	— id.
»	MATHIEU, Adolphe; à Bruxelles	— 6 mai 1850.
»	KERVYN DE LETTENHOVE, F.; à Bruges	— id.
»	CHALON, R.; à Bruxelles	— 6 mai 1851.
»	THONISSEN, J. J.; à Louvain.	— 7 mai 1855.
»	VAN DUYSE, P.; à Gand	— id.

50 ASSOCIÉS.

M.	Le duc d'URSEL, C.; à Bruxelles	Nommé le 3 juillet 1816.
»	DE MOLÉON, J. G. V.; à Paris	Élu le 14 octobre 1820.
»	LENORMAND, L. Séb.; à Paris	— id.
»	DE LA FONTAINE; à Luxembourg	— 23 décemb. 1822.
»	MULLER; à Trèves.	— id.
»	WITTENBACH; à Trèves	— id.
»	VAN EWYCK, D. J.; à Bois-le-Duc	— 4 février 1826.
»	COUSIN, Victor; à Paris	— 6 octobre 1827.
»	COOPER, C. P.; à Londres.	— 5 avril 1834.
»	LE GLAY, A.; à Lille	— id.
»	MONE, J.; à Carlsruhe	— 7 mai 1840.
»	GROEN VAN PRINSTERER; à La Haye	— 15 décemb. 1840.
»	LENORMANT, Charles; à Paris	— 14 décemb. 1841.
»	Le vicomte de SANTAREM; à Lisbonne	— 15 décemb. 1842.
»	L'abbé GAZZERA, C.; à Turin	— id.
»	GRIMM, Jacques; à Berlin	— id.
»	PHILIPS; à Munich	— id.

Digitized by Google

M.	Dinaux, Arthur; à Valenciennes	Élu le	9 février 1846.
»	Ellis, sir Henry; à Londres.	—	id.
»	Guizot, F. P. G.; à Paris	—	id.
»	Hallam, Henry; à Londres	—	id.
»	Mignet, F. A. A.; à Paris	—	id.
»	Rafn; à Copenhague.	—	id.
»	Ramon de la Sagra; à Madrid	—	id.
»	Ranke; à Berlin	—	id.
»	Salva, Miguel; à Madrid	—	id.
»	Warnkoenig; à Tubingue	—	id.
»	Le baron de Hammer-Purgstall; à Vienne . .	—	11 janvier 1847.
»	Le baron Dupin, Charles; à Paris.	—	id.
»	Hermann, Ch. Fr.; à Göttingue.	—	id.
»	Hurter; à Vienne.	—	id.
»	Leemans; à Leyde.	—	id.
»	Mittermaier; à Heidelberg	—	id.
»	Pertz; à Berlin	—	id.
»	Ritter, Ch.; à Berlin	—	id.
»	Manzoni; à Milan.	—	17 mai 1847.
»	Panofka; à Berlin	—	7 mai 1849.
»	Nolet de Brauwere van Steeland; à Bruxelles .	—	id.
»	De Bonnechose, Em.; à Paris.	—	id.
»	Whewell, W.; à Cambridge	—	id.
»	Nassau-Senior; à Londres	—	id.
»	Le duc de Caraman; à Paris.	—	id.
»	Dureau de la Malle, A. J. C. A.; à Paris. . .	—	6 mai 1851.
»	Le comte de Laborde, Léon; à Paris. . . .	—	id.
»	Le Clerc, V.; à Paris	—	7 mai 1855.
»	Le comte de Montalembert; à Paris	—	id.
»	Macaulay; à Londres	—	id.
»	Say, H.; à Paris	—	id.
»	Le chevalier Rossi; à Rome	—	id.
»	Rau; à Heidelberg	—	id.

Digitized by Google

CLASSE DES BEAUX-ARTS.

M. F. Fétis, directeur.
» De Keyser, vice-directeur.
» Quetelet, secrétaire perpétuel.

---

30 MEMBRES.

Section de Peinture :

M.	De Keyzer, N.; à Anvers	Nommé le 1er déc. 1845.
»	Gallait, Louis; à Bruxelles.	— id.
»	Leys, H.; à Anvers	— id.
»	Madou, Jean; à Bruxelles	— id.
»	Navez, F. J.; à Bruxelles	— id.
»	Verboeckhoven, Eugène; à Bruxelles	— id.
»	Le baron Wappers, G.; à Anvers	— id.
»	De Braekeleer, F.; à Anvers	Élu le 8 janvier 1847.
»	Portaels; à Bruxelles	— 4 janvier 1855.

Section de Sculpture :

M.	Geefs, Guillaume; à Bruxelles	Nommé le 1er déc. 1845.
»	Simonis, Eugène; à Bruxelles	— id.
»	Geefs, Joseph; à Anvers	Élu le 9 janvier 1846.
»	Fraikin, C. A.; à Bruxelles	— 8 janvier 1847.

Section de Gravure :

M.	Braemt, J. P.; à Bruxelles.	Nommé le 1er déc. 1845.
»	Corr, Érin; à Anvers	Élu le 9 janvier 1846.

Section d'Architecture :

M.	Roelandt, L.; à Gand	Nommé le 1er déc. 1845.
»	Suys, T. F.; à Bruxelles.	— id.

Digitized by Google

M. Partoes, H. L. F.; à Bruxelles . . . . . . Élu le 8 janvier 1847.
» Renard, B.; à Tournay . . . . — 22 sept. 1852.

Section de Musique :

M. De Bériot, Ch.; à Bruxelles . . . . . . Nommé le 1er déc. 1845.
» Fétis, F.; à Bruxelles . . . . — id.
» Hanssens, Ch. L.; à Bruxelles . . . . — id.
» Vieuxtemps, H.; à Bruxelles . . . . — id.
» Snel, F.; à Bruxelles . . . . Élu le 9 janvier 1846.

Section des Sciences et des Lettres dans leurs rapports avec les Beaux-Arts :

M. Alvin, Louis; à Bruxelles . . . . Nommé le 1er déc. 1845.
» Quetelet, A. J. L.; à Bruxelles . . . . . . — id.
» Van Hasselt, André; à Bruxelles . . . . . . — id.
» Baron, A. A.; à Liége . . . . Élu le 8 janvier 1847.
» Fétis, Ed.; à Bruxelles . . . . — id.
» De Busscher, Edm.; à Gand . . . . — 5 janvier 1854.

Correspondants (10 au plus).

Pour la Peinture :

M. De Biefve, Édouard; à Bruxelles . . . . . Élu le 9 janvier 1846.
» Dyckmans; à Anvers . . . . — 8 janvier 1847.

Pour la Sculpture :

M. Jehotte, Louis; à Bruxelles . . . . Élu le 9 janvier 1846.
. . . .

Pour la Gravure :

M. Jouvenel, A.; à Bruxelles . . . . Élu le 8 janvier 1847.
» Verswyvel, Michel; à Anvers . . . . — 22 sept. 1852.

Digitized by Google

Pour l'Architecture :

M. Balat, Alph.; à Bruxelles . . . . Élu le 13 janvier 1853.

Pour la Musique :

M. Bosselet, C. F.; à Bruxelles . . . . . . Élu le 22 sept. 1852.

Pour les Sciences et les Lettres dans leurs rapports avec les Beaux-Arts :

M. Demanet, A.; à Bruxelles . . . . Élu le 4 janvier 1855.
» Siret, Adolphe; à Namur . . . . — id.

50 associés.

Pour la Peinture :

M. Vernet, Horace; à Paris . . . . Élu le 6 février 1846.
» Scheffer, Ary; à Paris . . . . — id.
» Cornelius, P.; à Berlin . . . . — id.
» De la Roche, Paul; à Paris. . . . . — id.
» Landseer; à Londres . . . . — id.
» Kaulbach, W.; à Munich . . . . — id.
» Ingres, J.; à Paris . . . . — 8 janvier 1847.
» Calame, A.; à Genève . . . . — id.
» Becker, J.; à Francfort . . . . — id.
» Haghe; à Londres . . . . — id.
» Schnetz, J. V.; à Paris. . . . . — 22 sept. 1852.

Pour la Sculpture :

M. Rauch; à Berlin . . . . Élu le 6 février 1846.
» Rude, F.; à Paris . . . . — id.

Digitized by Google

M. DAVID, d'Angers; à Paris . . . . Élu le 8 janvier 1847.
» TENERANI, Pierre; à Rome . . . . — id.
» DUMONT, A. A.; à Paris. . . . . — 22 sept. 1852.
» Le comte de NIEUWERKERKE; à Paris . . . . — id.
» ROYER; à Amsterdam. . . . . — id.

. . . .

Pour la Gravure :

M. Le baron BOUCHER-DESNOYERS; à Paris. . . . Élu le 6 février 1846.
» FORSTER, François; à Paris . . . . — id.
» HENRIQUEL DUPONT, L. P.; à Paris . . . . . — 8 janvier 1847.
» CALAMATTA, L.; à Bruxelles . . . . — id.
» BOVY, Ant.; à Paris . . . . — id.
» PISTRUCCI, Benedetto; à Londres . . . . . — 22 sept. 1852.

. . . .

. . . .

Pour l'Architecture :

M. DONALDSON, Thom.; à Londres. . . . . . Élu le 6 février 1846.
» VON KLENZE, Léon; à Munich . . . . . . — id.
» CARISTIE, Aug.; à Paris . . . . — 8 janvier 1847.
» BARRY, Ch.; à Londres . . . . — id.
» STÜLER, A.; à Berlin . . . . — id.
» COCKERELL, C. R.; à Londres . . . . . . — 22 sept. 1852.
» FORSTER, Louis; à Vienne . . . . — 5 janvier 1854.

. . . .

Pour la Musique :

M. ROSSINI; à Bologne . . . . Élu le 6 février 1846.
» MEYERBEER, Giacomo; à Berlin . . . . . . — id.
» AUBER, D. F. E.; à Paris . . . . — id.
» DAUSSOIGNE-MÉHUL, J.; à Liége . . . . . . — id.
» HALÈVY, Jacques F.; à Paris . . . . . . — 8 janvier 1847.
» SPOHR; à Cassel . . . . — id.
» LACHNER; à Munich . . . . — id.
» MERCADANTE; à Naples . . . . — 22 sept. 1852.

Digitized by Google

Pour les Sciences et les Lettres dans leurs rapports avec les Beaux-Arts.

M.	BOCK, C. P.; à Bruxelles.	Élu le	6 février 1846.
»	PASSAVANT, J. D.; à Francfort	—	id.
»	WAAGEN, Gust.; à Berlin	—	8 janvier 1847.
»	DE COUSSEMAKER, Éd.; à Dunkerque	—	id.
»	GERHARD, Éd.; à Berlin	—	id.
»	DE CAUMONT, A.; à Caen.	—	22 septemb. 1848.
»	QUARANTA, Bernard; à Naples	—	5 janvier 1854.

. . . .

NÉCROLOGIE.

CLASSE DES SCIENCES.

M. PAGANI, G. M., membre, décédé le 10 mai 1855.
» FUSS, P. H., associé, décédé le 22 janvier 1855.
» GAUSS, C. F., associé, décédé le 23 février 1855.

CLASSE DES LETTRES.

M. Le baron DE STASSART, G. J. A., membre, décédé le 10 octobre 1854.
» LESBOUSSART, P., membre, décédé le 4 mars 1855.
» BLONDEAU, T. B. A. H., associé, décédé le 12 novembre 1854.
S. E. le cardinal MAÏ, A., associé, décédé le 7 septembre 1854.

CLASSE DES BEAUX-ARTS.

M. FINELLI, associé, décédé le 6 septembre 1853.
» TOSCHI, P., associé, décédé le.... août 1854.
» DUCHESNE aîné, associé, décédé le.... mars 1855.
» BARRE père, associé, décédé le 10 juin 1855.
» GEERTS, Ch., correspondant, décédé le 16 juin 1855.

Digitized by Google

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME XXIX.

CLASSE DES SCIENCES.

Étude approfondie sur les deux équations fondamentales $\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ et $dy = f'(x).\Delta x$; par M. E. Lamarle.

Mémoire sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue; par J.-B. Brasseur.

Recherches pour servir à la flore cryptogamique des Flandres; cinquième centurie. Par J. Kickx.

Mémoire sur la direction et la grandeur des soulèvements qui ont affecté le sol de la Belgique; par J.-C. Houzeau.

OBSERVATIONS DES PHÉNOMÈNES PÉRIODIQUES.

I. — Météorologie et physique du globe. — *Observations sur la météorologie, l'électricité et le magnétisme de la terre*, faites en 1853, à l'Observatoire royal de Bruxelles.

Observations météorologiques, faites en 1853 à Gand, Liége, Stavelot, S[t]-Trond, Namur, Furnes, Tirlemont, Verviers, Ostin, Leuze, Chimay et Munich.

II. — Observations botaniques et zoologiques. — a. *Observations botaniques*, faites en 1853, à Bruxelles, Gand, Ostende, Anvers, Waremme, Liége, Stavelot, Namur, Jemeppe-sur-Meuse, Grammont, Ostin, Verviers, Munich, Vienne et Venise. — b. *Observations zoologiques*, faites en 1853, à Bruxelles, Waremme, Stavelot, Ostende, Namur et Vienne. — c. *Observations faites à des époques déterminées* de 1854.

CLASSE DES LETTRES.

Mémoire sur les guerres entre le Brabant et la Flandre, au XIV[me] siècle; par M. De Smet.

Digitized by Google

Digitized by Google

ÉTUDE APPROFONDIE

SUR

LES DEUX ÉQUATIONS FONDAMENTALES

$$\text{Lim}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \quad \text{et} \quad dy=f'(x).\ \Delta x\ ;$$

PAR

M. E. LAMARLE,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR
A L'UNIVERSITÉ DE GAND.

(Présenté à la séance du 1er juillet 1854.)

Digitized by Google

Digitized by Google

ÉTUDE APPROFONDIE

SUR

LES DEUX ÉQUATIONS FONDAMENTALES

$$\text{Lim}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{et} \quad dy = f'(x).\ \Delta x.$$

L'étude dont je vais donner ici les développements, peut être considérée comme le complément d'un traité publié, en 1844, sous le titre suivant : *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante, suivi des éléments du calcul différentiel résumés à un point de vue purement algébrique* [1]. Elle consolide les bases de ce premier travail et le rend d'un accès facile; elle dégage de toute obscurité, de toute abstraction métaphysique, les principes qui y sont exposés, et les présente sous une forme où ils deviennent, en quelque sorte, matériellement sensibles.

Cette étude est divisée en quatre chapitres distincts. Le premier traite de l'équation symbolique,

$$(1). \quad \lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),$$

le second, de l'équation différentielle,

$$(2) \quad dy = f'(x).\ \Delta x.$$

[1] Paris, Victor Dalmont, quai des Augustins, n° 49.

Digitized by Google

le troisième et le quatrième donnent un aperçu des ressources offertes, d'une part et en algèbre, par l'équation (1), d'autre part et en mathématiques transcendantes, par l'exacte interprétation de l'équation (2).

Une analyse succincte de chacun de ces chapitres permettra au lecteur d'en apprécier l'importance relative, et de porter directement son attention sur ceux des points traités qui lui paraîtraient sujets à controverse ou plus intéressants.

L'objet du chapitre Ier est d'établir *à priori* l'équation fondamentale

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

La fonction $y = f(x)$ étant supposée continue, il est visible que si l'on fait décroître indéfiniment l'accroissement h, le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ se trouve assujetti à subir l'une ou l'autre des cinq conditions suivantes :

1° Demeurer constant;

2° Converger vers une limite constante ou nulle;

3° Croître sans limites;

4° Osciller sans fin entre plusieurs limites distinctes;

5° Converger vers une limite qui dépend de la valeur attribuée à la variable x et change avec cette valeur.

On démontre aisément, qu'abstraction faite du cas particulier où la fonction y est linéaire, et où la condition (1) se réalise d'une manière permanente, chacune des trois premières conditions n'est jamais possible que pour certaines valeurs de la variable conservant entre elles des écarts déterminés. J'ai cru devoir reproduire ces démonstrations, en me bornant à en changer la forme. Quant à la condition (4), je ne pense pas qu'on s'en soit occupé jusqu'ici, ni surtout qu'on soit parvenu à démontrer pour elle, comme pour les trois premières, qu'elle est *généralement* impossible. J'ai entrepris cette tâche délicate, et je crois être parvenu à l'accomplir, sinon aussi simplement que je l'aurais voulu, du moins avec toute la rigueur désirable, et sans recourir à d'autres notions que celles dont on a besoin en algèbre pour la résolution des équations du 1er degré.

Parvenu à ce point, j'ai pu conclure que la condition (5) subsistait

Digitized by Google

seule d'une manière générale et permanente. J'ai, en outre, établi que la limite du rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est elle-même continue, soit pour toute l'étendue de l'intervalle où la fonction y varie avec continuité, soit pour une suite de subdivisions, comprenant dans leur ensemble toute cette étendue.

De là résulte l'équation fondamentale

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),$$

démontrée *à priori*, sans autre secours que celui des premières notions de l'algèbre, pouvant être prise pour base de tous les développements ultérieurs, apportant avec elle une ressource précieuse jusqu'à présent interdite, offrant enfin une extrême facilité qui permet de pousser plus loin l'enseignement élémentaire, tout en lui imprimant une marche beaucoup plus rapide.

On objectera, sans doute, que des élèves, à peine initiés aux spéculations algébriques, éprouveraient une difficulté considérable à bien saisir l'ensemble des propositions développées dans le chapitre Ier de cette étude. En ce cas, l'on peut y suppléer par certaines inductions géométriques, ou, plus simplement encore, se borner à poser en principe le théorème dont on a besoin, sauf à réserver pour une époque ultérieure la démonstration jugée d'abord trop difficile.

L'objet du chapitre II est de définir la différentielle et d'interpréter l'équation.

$$dy = f'(x).\,\Delta x.$$

Partant de l'équation fondamentale

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),$$

et observant l'invariabilité absolue du mode suivant lequel s'accomplit la génération simultanée des accroissements Δx, Δy, lorsque la fonction y est linéaire, on est conduit à l'induction suivante :

Digitized by Google

Dans toute fonction continue et non linéaire

$$y = f(x).$$

La génération simultanée des accroissemeuts Δy *et* Δx commence *en général suivant une certaine raison de proportionnalité. Constamment variable avec* x, *cette raison est exprimée par la valeur particulière que la fonction dérivée* $f'(x)$ *affecte à l'origine même des accroissements.*

Pour vérifier l'exactitude de cette induction, et établir, avec une rigueur complète, le principe qui en dérive, je procède par voie de synthèse. Je prends une fonction quelconque continue $\varphi(x)$, et j'imagine que, pour chaque valeur affectée par la variable, elle exprime la *raison* correspondante suivant laquelle *commence* la génération simultanée des accroissements Δy, Δx, y étant une fonction inconnue qu'il s'agit de déterminer d'après cette condition.

Je démontre alors,

1° Que si l'on désigne par le symbole $\mathbf{M}_x^{x+\Delta x}\varphi(x)$ la limite vers laquelle converge la moyenne arithmétique

$$\frac{\varphi(x)+\varphi\left(x+\frac{\Delta x}{n}\right)+\varphi\left(x+2\frac{\Delta x}{n}\right)+\text{etc.}+\varphi\left(x+(n-1)\frac{\Delta x}{n}\right)}{n},$$

à mesure que le nombre n devient de plus en plus grand, l'on a en général

$$\Delta y = \Delta x.\ \mathbf{M}_x^{x+\Delta x}\varphi(x);$$

2° Que, si l'on identifie avec la dérivée $f'(x)$ la fonction $\varphi(x)$ dont on dispose arbitrairement, l'accroissement Δy devient lui-même identique à celui de la fonction $f(x)$.

De là résulte la déduction suivante :

Les accroissements $\Delta(ax+b) = a\Delta x$ et $\Delta f(x) = \Delta x\ \mathbf{M}_x^{x+\Delta x} f(x)$ *étant rapportés tous deux à une même origine, et tous deux répondant ensemble à une même variation continue de la quantité* Δx, *c'est suivant un même mode de composition*

successive que s'accomplit leur génération simultanée. La seule distinction consiste en ce que, pour l'un, l'élément, représenté numériquement par a, intervient constamment sans changer de grandeur, tandis que, pour l'autre, ce même élément passe par une suite non interrompue de déterminations transitoires, toutes variables avec x dans l'intervalle Δx, et exprimées par la valeur correspondante de la dérivée $f'(x)$.

Le sens exprimé par l'énoncé qui précède pouvant offrir quelque obscurité, je le rends en quelque sorte matériellement palpable par une construction géométrique tout élémentaire.

Cela posé, je démontre :

1° Que la différentielle n'est qu'une différence ordinaire prise dans une certaine hypothèse;

2° Que cette hypothèse consiste à considérer comme constante, pour toute l'étendue de l'intervalle Δx, la raison de proportionnalité suivant laquelle la génération simultanée des accroissements *commence* à l'origine de cet intervalle.

Je termine par l'exposé de deux théorèmes aussi simples que féconds en ressources, et par des considérations générales très-propres à élucider complétement la question importante traitée dans ce chapitre.

Le chapitre III a pour objet l'indication des ressources que peut offrir, en analyse algébrique, l'équation fondamentale,

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x),$$

lorsqu'elle est démontrée, ou admise *à priori*, et qu'on la prend pour base des développements ultérieurs.

J'établis d'abord la règle unique et générale d'où dépendent, comme conséquences immédiates, toutes les règles particulières de la dérivation.

J'en déduis la dérivée de la fonction x^m, l'exposant m étant quelconque.

Je démontre ensuite le théorème relatif à la valeur moyenne de la fonction dérivée, et j'établis les relations générales qui existent entre les valeurs moyennes des dérivées successives d'une même fonction.

Digitized by Google

De là résulte immédiatement, et sans qu'on ait besoin d'aucune autre notion pour y parvenir, l'identité générale

$$f(z) = f(x) + \frac{z-x}{1} f'(x) + \frac{(z-x)^2}{1.2} f''(x) + \text{etc.},$$
$$+ \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) + \frac{z-x}{1.2\ldots(n-1)} \mathrm{M}_x^z (z-x) f^n(x).$$

comprenant, comme cas particuliers, le binôme de Newton, la formule de Taylor et celle de Maclaurin.

Passant aux différences ordinaires des ordres supérieurs, j'ajoute quelques nouveaux détails à la théorie générale des *moyennes arithmétiques transcendantes,* et je définis les moyennes multiples, ce qui me conduit à l'équation très-simple

$$\Delta^n y = \Delta x^n . \overset{n}{\mathrm{M}}{}_x^{x+\Delta x} f^n(x).$$

Je démontre d'ailleurs qu'on a généralement

$$\Delta^n y = \left\{ {n \atop n} \right\} \Delta x^n . f^n(x) + \left\{ {n+1 \atop n} \right\} \Delta x^{n+1} f^{n+1}(x) + \left\{ {n+2 \atop n} \right\} \Delta x^{n+2} . f^{n+2}(x) + \text{etc.}$$

le terme sommatoire, qui complète le second membre et le rend identique au premier, pouvant s'exprimer indifféremment, soit à l'aide des moyennes multiples à indices constants, soit à l'aide des moyennes simples à indices variables.

La simplicité, la facilité de toutes ces déductions dépend évidemment de deux causes. La première est la base fournie par l'équation fondamentale

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x);$$

la seconde résulte de l'emploi du symbole adopté pour l'expression des moyennes arithmétiques transcendantes.

Il existe entre les moyennes simples ou multiples et les intégrales correspondantes une analogie manifeste. En la remarquant, l'on se deman-

Digitized by Google

dera, peut-être, pourquoi les avantages importants, qui résultent, en analyse algébrique, de l'introduction du nouveau symbole, ne peuvent s'obtenir également par l'emploi des intégrales. En voici la raison. Rien de plus simple, de plus élémentaire, que la conception de la limite vers laquelle converge la moyenne arithmétique

$$\frac{\varphi(x) + \varphi\left(x + \frac{\Delta x}{n}\right) + \text{etc.} + \varphi\left(x + \frac{(n-1)\,\Delta x}{n}\right)}{n}.$$

Rien au contraire de plus obscur, de plus difficile à concevoir nettement, que la définition directe de l'intégrale. La considération des moyennes est, en algèbre, parfaitement à sa place. Elle n'apporte avec elle aucune complication et y est d'un immense secours. La considération des intégrales, telles qu'on les définit en analyse transcendante, ne saurait intervenir dans les éléments sans les dépouiller de la clarté et de la certitude mathématique qui y sont absolument nécessaires.

Le chapitre IV a pour objet l'indication des ressources que présente dans les diverses applications de l'analyse transcendante l'exacte définition de la différentielle.

Je montre, d'abord, comment la différentielle peut être définie, d'après la condition qu'elle remplit de former une partie déterminée de la différence ordinaire. Je signale les avantages que peut offrir cette première définition purement algébrique et essentiellement rationnelle. Je constate ensuite son insuffisance, et, après avoir rappelé ce que la différentielle est par elle-même, ce qu'elle exprime par rapport à la fonction dont elle dérive, en un mot quelle est sa signification véritable et complète, je donne un aperçu des ressources que présente ce nouveau point de vue, très-supérieur à la méthode infinitésimale.

S'agit-il d'aller au fond des choses et d'en pénétrer la nature intime? Il n'est besoin pour cela que de recourir à l'équation différentielle et de traduire en langage ordinaire la condition qu'elle exprime algébriquement. Les exemples de ce genre d'applications sont au nombre de quatre, comprenant, en géométrie, la question des tangentes et des rayons de

Digitized by Google

courbure, en dynamique, celle de la vitesse acquise et de l'action motrice dans le mouvement d'un point matériel.

S'agit-il, au contraire, de descendre des causes à leurs effets, dans l'étude de certains phénomènes, compliqués par la variation incessante des grandeurs qui y interviennent? L'équation différentielle résout la question proposée en exprimant les effets qui ont lieu dans l'hypothèse très-simple où les grandeurs dont il s'agit, cessant de varier, persistent dans une seule et même détermination devenue permanente. Le volume engendré par une aire qui se déplace en changeant de grandeur, l'espace décrit par un mobile qui se transporte en changeant de vitesse, sont les exemples choisis pour mettre en évidence les avantages offerts dans tous les cas de cette espèce.

Indépendamment des ressources que je viens d'indiquer, et qui résultent de l'application littérale de deux théorèmes exposés dans le chapitre second, l'on peut, dans un grand nombre de cas, procéder plus simplement encore, en se fondant sur certaines déductions de ces théorèmes ou des principes sur lesquels ils reposent. Pour donner une idée de l'extrême facilité que présente ainsi l'emploi des différentielles, considérées directement dans la génération qu'elles expriment, et où elles ne sont plus en réalité que des différences ordinaires, je donne la rectification de l'arc curviligne, les plans normaux et tangents, enfin la courbure des surfaces.

Je termine par les deux définitions que comportent les différentielles des ordres supérieurs, l'une résultant des différentiations successives, l'autre étant immédiate et tout à fait directe. Ici plus de difficultés. Tout se réduit à une simple extension de la définition donnée pour les différentielles du 1er ordre.

La considération des différentielles des ordres supérieurs conduit à la formule suivante :

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \frac{d^3y}{1.2.3} + \text{etc.}$$

ou plus généralement

$$\Delta^n y = \left\{ {n \atop n} \right\} d^n y + \left\{ {n+1 \atop n} \right\} d^{n+1} y + \left\{ {n+2 \atop n} \right\} d^{n+2} y + \text{etc.}$$

Digitized by Google

Ces formules ont l'avantage d'être extrêmement simples et de trancher nettement avec la méthode infinitésimale. Elles font ressortir l'absurdité radicale de cette conception, où l'on imagine que les différentielles s'évanouissent les unes devant les autres, lorsqu'elles ne sont point du même ordre, et toutes ensemble devant les différences ordinaires.

Les détails qui précèdent montrent suffisamment que l'objet principal de cette étude est la définition de la différentielle, et la création d'une méthode fondée sur cette définition, où rien d'obscur ne reste, où rien non plus n'est omis de ce qu'il importe d'y introduire pour qu'elle soit complète.

Les géomètres, déjà familiarisés avec les diverses méthodes d'exposition du calcul différentiel, reconnaîtront aisément dans notre conception fondamentale la généralisation de l'idée mère des fluxions newtoniennes. Pour ne laisser aucun doute sur ce point, nous reproduirons ici quelques passages empruntés à Thomas Simpson et publiés par lui en 1796, dans la 2^{me} édition d'un ouvrage intitulé : *The doctrine and applications of fluxions.*

Voici d'abord la définition que Thomas Simpson donne de ces quantités. Je traduis littéralement [1].

1° Pour se former une juste idée de la nature des fluxions, il faut considérer toutes les grandeurs comme engendrées par le déplacement *continu* de leurs bornes ou limites, soit par exemple une ligne par le mouvement d'un point, une surface par le mouvement d'une ligne, un solide par le mouvement d'une surface.

2° Chaque grandeur ainsi engendrée prend le nom de variable ou fluente. *La quantité dont une fluente* S'ACCROÎTRAIT *uniformément dans un temps donné* SI *la vitesse de génération, en une position ou un instant quelconque, demeu-*

[1] 1° *In order to form a proper idea of the nature of fluxions, all kinds of magnitudes are to be considered as generated by the* CONTINUAL *motion of some of their bounds or extremes; as a line by the motion of a point, a surface by the motion of a line, and a solid by the motion of a surface.*

2° *Every quantity so generated is called a variable or flowing quantity.* AND THE MAGNITUDE BY WHICH ANY FLOWING QUANTITY *would* BE UNIFORMLY INCREASED, IN A GIVEN PORTION OF TIME, *with the generating velocity, at any proposed position or instant, (was it from thence to continue invariable) is the fluxion of the said quantity at that position or instant.*

Digitized by Google

rait dès lors invariable, est la fluxion de cette même grandeur pour cette position ou cet instant.

Voici ensuite quelques explications extraites de la préface du même ouvrage et ayant pour objet la justification des changements introduits par l'auteur dans la deuxième édition, comparée à la première [1].

« Les notions et explications données ici sur les premiers principes des » fluxions ne diffèrent pas essentiellement de ce qu'elles sont dans le » traité sus-mentionné, bien qu'exprimées en d'autres termes. La consi- » dération du temps, que j'ai introduite dans la définition générale, sera » peut-être mal accueillie par ceux qui veulent voir dans les fluxions de » *simples vitesses;* mais l'avantage de les considérer autrement (non comme » les vitesses elles-mêmes, mais comme les quantités dont les grandeurs » s'accroîtraient uniformément en un temps fixé) me paraît suffire pour » prévenir toute objection de ce chef.

» En considérant les fluxions comme de simples vitesses, la pensée » est, pour ainsi dire, restreinte à un point, et, si l'on n'y prend garde, » insensiblement engagée dans des difficultés métaphysiques. Selon notre » manière de les concevoir et de les exposer, l'étudiant a moins de pré- » cautions à prendre, et les fluxions des ordres supérieurs sont rendues » beaucoup plus simples et plus intelligibles. En outre, bien que Newton » définisse les fluxions comme étant les vitesses elles-mêmes, cependant » il a recours aux accroissements ou moments engendrés pendant des

[1] *The notion and explication, here given of the first principles of fluxions, are not essentially different from what they are in the above mentionned treatise, tho' expressed in other terms. The consideration of time, which I have introduced into the general definition, will, perhaps, be disliked by those who would have fluxions to be* MEER VELOCITIES : *but the advantage of considering them* OTHERWISE *not as the velocities themselves, but the magnitudes they would uniformly generate in a given finite time appear to me sufficient to obviate any objection on that head.*

By taking fluxions as meer velocities, the imagination is confined, as it were, to a point, and, without proper care, insensibly involved in metaphysical difficulties. But according to our method of conceiving and explaining the matter, less caution in the learner is necessary, and the higher orders of fluxions are rendered much more easy and intelligible. Besides, tho' sir Isaac Newton defines fluxions to be THE VELOCITIES OF MOTIONS, *yet he hath recourse to the increments or moments. generated in equal particles of time, in order to determine velocities, wich he afterwards teaches us to expound by finite magnitudes of other kinds, without which (as is already hinted above) we could have but very obscure ideas of the higher orders of fluxions. For if motion in (or at) a point be se*

Digitized by Google

» temps égaux pour déterminer ces vitesses, qu'il nous apprend ainsi à » représenter par des grandeurs finies d'une autre espèce, sans lesquelles » (ainsi que nous l'avons déjà indiqué) nous ne pourrions nous former » qu'une idée très-obscure des fluxions des ordres supérieurs. En effet, » si le mouvement en un point est si difficile à concevoir que l'on a été » jusqu'à contester l'existence même du mouvement, combien doit-il être » plus embarrassant de se former une idée, non-seulement de la vitesse » d'un mouvement, mais aussi des changements et modifications infinies » de ce mouvement en un seul et même point, où les fluxions de tous les » ordres doivent être rapportées.

» En voyant que la notion des fluxions, telles que nous les avons défi- » nies, suppose un mouvement universel, il peut paraître difficile, au » premier abord, d'assigner avec exactitude les fluxions des grandeurs » engendrées par un mouvement accéléré ou retardé, puisqu'il n'existe » aucune durée, pas la moindre, pendant laquelle la vitesse de génération » demeure la même. Il est vrai que nous ne pouvons alors exprimer » la fluxion par aucun accroissement, ou espace *effectivement* engendré » dans un temps donné (comme dans le cas du mouvement uniforme); » néanmoins, il est facile de déterminer ce que *serait* l'accroissement con- » temporain, ou l'espace engendré, si l'accélération ou la rétardation » venait à cesser à partir du point où il s'agit de trouver la fluxion. » De là, la vraie fluxion qu'on obtient elle-même sans le secours des

difficult to conceive, that SOME *have, even, gone so far as to dispute the very existence of motion, how much perplexing must it be to form a conception, not only of the velocity of a motion but also in infinite changes and affections of* IT, *in one and the same point, where all the orders of fluxions are to be considered.*

Seeing the notion of a fluxion, according to our manner of defining it, supposes an universal motion, it may, perhaps, seem a matter of difficulty, at first view, how the fluxions of quantities generated by means of accelerated or retarded motions, can be rightly assigned, since not ang, the least, time can be taken, during which the generating celerity continues the same. There, indeed, we cannot expres the fluxion by any increment or space ACTUALLY *generated in a given time (as in uniform motion); but, then we can easily determine what the contemporary increment, or generated space,* WOULD BE, *if the acceleration or retardation was to cease, at the proposed position, in which the fluxion is to be found. Whence the true fluxion, it-self, will be obtained without the assistance of infinitely small quantities, or any metaphysical consideration.*

Digitized by Google

» quantités infiniment petites, ni d'aucune considération métaphysique. »

On voit, par ces extraits, que la différentielle et la fluxion s'identifient lorsqu'on restreint à un cas tout exceptionnel notre définition générale. Cette restriction, compliquée de la présence constante d'une idée étrangère, la vitesse, présente de graves inconvénients. Il ne suffit pas, en effet, que la définition soit exacte et purement rationnelle, ni que, touchant au fond même de la réalité, elle en accuse une face particulière. Il faut, pour la facilité des applications, que, sans devenir obscure à force d'être abstraite, elle conserve néanmoins toute la généralité dont elle est susceptible, et puisse ainsi, selon les cas, revêtir indifféremment toutes les formes qu'elle comporte. Un sens purement restrictif constitue déjà un obstacle : s'il se complique d'une idée étrangère, qui gène et entrave les déductions, qui voile ou dissimule la vérité, l'obstacle grandit et crée des embarras sérieux. De là vient l'insuffisance de la méthode des fluxions et l'insuccès des efforts laborieux tentés par Mac-Laurin pour l'approprier aux besoins généraux de l'analyse transcendante. De là vient qu'en dépit des avantages qu'elle offre, au point de vue algébrique et rationnel, elle n'a pu prévaloir sur la méthode infinitésimale. Serons-nous plus heureux dans l'essai que nous tentons pour reconstruire la méthode des fluxions sous une forme qui la généralise, la complète et la simplifie jusqu'à la rendre supérieure à toutes les méthodes connues. Nous croyons pouvoir l'espérer, sans trop de présomption. Déjà, depuis dix ans, nous n'avons pas cessé d'appliquer notre méthode, et nulle question ne s'est jamais offerte, que nous n'ayons pu l'aborder et la résoudre avec une facilité toujours au moins égale, et souvent supérieure, à celle que donne la méthode infinitésimale. C'est là que nous puisons notre confiance. Toutefois, nous savons combien la considération habituelle des quantités prétendues infiniment petites rend la notion de continuité difficile à saisir : combien aussi l'on trouve commode de se tenir à des procédés qu'un long usage a rendus familiers. Ces conditions fâcheuses ne nous découragent point. Il n'est, sans doute, aucun géomètre qui se représente l'abscisse et l'ordonnée d'une courbe comme croissant d'une manière discontinue, par des changements brusques et infiniment petits, déterminant des points isolés

Digitized by Google

avec des vides intermédiaires. Là donc, on est forcé d'admettre la variation continue. Dès lors, il y a contradiction évidente à l'exclure dans tous les autres cas où elle subsiste nécessairement de la même façon. Que l'on veuille bien y réfléchir; que l'on fasse quelques efforts pour rompre avec d'anciens errements; que l'on ne recule pas devant les premières difficultés toujours inévitables dans une voie nouvelle : alors, pensons-nous, ce qui serait facile pour de jeunes intelligences, auxquelles une direction différente n'aurait point encore été imprimée, le deviendra de même, et à un bien plus haut degré, pour des esprits déjà initiés à toutes les ressources des combinaisons géométriques.

CHAPITRE PREMIER.

—

DÉMONSTRATION A PRIORI DE L'ÉQUATION FONDAMENTALE

$$\text{Lim.}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

1. Soit une fonction quelconque

$$y=f(x).$$

La variable x croissant d'une manière continue entre certaines limites que je désignerai par x_0 et x_p, il peut arriver que les valeurs correspondantes de la fonction constituent un système unique, ou plusieurs systèmes simultanés et distincts. Dans le cas où la fonction admettrait plusieurs systèmes de valeurs, nous imaginerons que l'on prenne à part l'un quelconque de ces systèmes, et qu'on le considère isolément, de la même façon que s'il subsistait seul. Nous supposerons, en outre, que le système considéré est et demeure *essentiellement* continu pour toute valeur de x prise à partir de x_0 jusqu'à x_p. Il suit de là que, dans l'étendue de cet intervalle, la fonction y doit être considérée comme soustraite à tout changement brusque, et comme affectant toujours une valeur unique, réelle et déterminée.

Digitized by Google

2. Lorsque nous disons de la fonction y qu'elle affecte une valeur réelle et déterminée, nous entendons exprimer que la valeur dont il s'agit est *effectivement atteinte* par la fonction, et, qu'en conséquence, elle ne se réduit pas à une simple *limite*, vers laquelle la fonction serait convergente. Pour bien faire comprendre le sens de cette remarque, sur laquelle nous devons insister, nous prendrons pour exemple la fonction particulière

$$(1)\quad y = x \sin \frac{1}{x}.$$

Cette fonction est continue pour tout intervalle où la variable x demeure constamment, soit positive, soit négative. Néanmoins, elle doit être considérée comme présentant une solution de continuité correspondante à $x = o$.

Lorsqu'on perd de vue *l'impossibilité radicale* accusée par le symbole $\frac{1}{0}$, et qu'on traite l'équation (1), sans tenir compte de cette impossibilité, l'on est conduit à confondre, parmi les *valeurs effectives* de la fonction $x \sin \frac{1}{x}$, la *limite* zéro vers laquelle elle converge, à mesure que la variable x décroît indéfiniment. On peut alors ne point apercevoir la solution de continuité mentionnée ci-dessus, ou bien estimer qu'il n'y a pas lieu d'y avoir égard. Une simple remarque suffira pour montrer que la question n'est point indifférente, et qu'on doit en réalité mettre le plus grand soin à distinguer les *valeurs effectives* de ces autres valeurs, qu'on peut désigner sous le nom de *valeurs limites*, en rappelant ainsi qu'elles restent en dehors de la suite formée par les premières.

Supposons, en effet, que, dans l'exemple choisi, la valeur $y = o$, qui, par hypothèse, répond à $x = o$, puisse être considérée, non pas seulement comme une *valeur limite*, mais bien comme une *valeur effective*. Il s'en suivra que la courbe représentée par l'équation (1) atteint l'origine des coordonnées, et que par suite elle comporte nécessairement un tracé continu ayant cette même origine pour point de départ. Or, il est évident qu'un pareil tracé est absolument impossible, puisque rien ne détermine si c'est en s'élevant au-dessus de l'axe des x, ou, au contraire, en s'abaissant au-dessous, qu'il devrait être commencé. On voit donc que la valeur

Digitized by Google

$y = o$ qui répond à $x = o$ n'est en réalité qu'une *valeur-limite* et qu'il serait *absurde* de lui attribuer le caractère d'une *valeur effective.*

3. La distinction que nous venons d'établir ne devra point être perdue de vue dans tout ce qui suivra. Elle est ici doublement importante; d'abord en ce qui concerne l'exacte définition de la *continuité,* et eu égard aux réserves à faire par rapport aux *valeurs-limites* qui peuvent se présenter accidentellement; ensuite, en ce qui concerne l'objet principal de cette étude, savoir :

1° La démonstration rigoureuse et complète de l'équation fondamentale

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x);$$

2° La détermination précise du sens à attribuer à cette équation, et plus particulièrement encore à celle qui s'en déduit sous la forme

$$dy = f'(x)\, dx,$$

celle-ci devenant la base du calcul différentiel et la clef de toutes les applications de l'analyse transcendante.

4. Aux indications déjà données, concernant la variation de la fonction y, dans l'intervalle compris entre x_0 et x_p, nous ajouterons la suivante :

Constamment variable avec x, et partant de la valeur effective qui répond à x_0, la fonction y ne peut changer d'abord que par augmentation ou par diminution. Si c'est en croissant qu'elle varie à l'origine, il faut qu'elle continue de croître toujours, ou si elle cesse de croître pour devenir décroissante, ce n'est qu'à partir d'une certaine valeur, plus grande à la fois que celles qui la précèdent et la suivent immédiatement. Cette valeur, qu'on peut désigner sous le nom de *valeur maxima,* est nécessairement distincte de la valeur initiale y_0. Elle comprend donc entre elle et celle-ci une infinité de valeurs intermédiaires, que la fonction y a dû successivement franchir, et qui, par conséquent, répondent à un certain intervalle $x_e - x_0$. Dans toute l'étendue de cet intervalle, la fonction y est

Digitized by Google

demeurée continûment croissante; au delà elle décroît, soit constamment, soit jusqu'à une certaine valeur, moindre que celles qui la précèdent et la suivent immédiatement, et qu'on peut désigner sous le nom de *valeur minima*. Ainsi succède au premier intervalle $x_e — x_0$, un second intervalle $x_f — x_e$, où la fonction reste toujours décroissante. A ce second intervalle peut succéder un troisième, où la fonction redevienne croissante, comme elle l'était dans le premier; puis un quatrième, où elle décroisse comme elle l'a fait dans le second, et ainsi de suite jusqu'à épuisement de l'étendue totale à considérer, $x_p — x_0$.

Il est visible que les mêmes déductions, prises en sens inverse, s'appliquent au cas où la fonction décroît d'abord, au lieu de commencer par croître, comme nous l'avons supposé tout à l'heure. On doit donc admettre que si la fonction y n'est pas constamment croissante ou constamment décroissante dans l'intervalle $x_p — x_0$, néanmoins cet intervalle se subdivise nécessairement en un nombre limité d'intervalles plus petits, et pour chacun desquels l'une ou l'autre de ces deux conditions subsiste alternativement. Cela posé, il suffit évidemment que l'intervalle primitif $x_p — x_0$ soit convenablement restreint, pour que, en même temps, l'on soit autorisé à admettre que, dans toute l'étendue de cet intervalle, la fonction y ne fait que croître ou que décroître d'une manière continue.

D'après ce qui précède, il nous est permis d'ajouter, qu'aux conditions qu'elle est supposée remplir, la fonction y joint celle d'être toujours croissante, ou toujours décroissante dans l'intervalle considéré. Que la fonction croisse ou décroisse, pourvu qu'elle ne cesse pas de croître toujours ou de toujours décroître, les déductions restent identiquement les mêmes. Il suffit donc de traiter l'un ou l'autre de ces deux cas; nous choisirons le premier, c'est-à-dire celui où la fonction demeure constamment croissante dans l'intervalle où s'accomplit la variation que l'on considère.

5. En résumé, la fonction

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = f(x),$$

nous est donnée comme étant continue et constamment croissante dans

Digitized by Google

l'intervalle $x_p - x_0$, où pour chaque valeur attribuée à x, elle n'affecte jamais qu'une valeur effective, unique, réelle et déterminée.

Soient x et $x+h$, deux valeurs quelconques comprises entre les valeurs extrêmes x_0 et x_p. Si, dans l'équation (2), l'on remplace x par $x+h$, et qu'on désigne par Δy l'accroissement correspondant de la fonction, il vient

$$(3). \quad y + \Delta y = f(x+h),$$

et, soustrayant, membre à membre, l'équation (2) de l'équation (3),

$$(4). \quad \Delta y = f(x+h) - f(x).$$

Divisons l'accroissement de la fonction par l'accroissement de la variable, désigné indifféremment, soit par h, soit par Δx, nous aurons pour résultat

$$(5). \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

et comme l'équation (5) ne peut se déduire de l'équation (4), qu'elle remplace, que dans le cas où le diviseur, introduit à la fois dans les deux membres, est un nombre, nous ferons observer qu'il nous est absolument interdit de nous placer, relativement à l'équation (5), dans l'hypothèse où ce diviseur s'annulerait.

Tout ce qui précède étant bien entendu, et restant toujours présent à la pensée, comme point de départ des déductions qui vont suivre, nous allons procéder à la recherche analytique des diverses conditions que peut subir le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, lorsque, pour une valeur quelconque attribuée à la variable, l'on fait décroître l'accroissement h de manière qu'il converge indéfiniment vers zéro.

Digitized by Google

Recherche des diverses conditions que peut subir le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable.

6. En général, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dépend à la fois de x et de h. On conçoit néanmoins qu'il puisse être constant, ou du moins ne dépendre que de l'une ou de l'autre de ces deux quantités.

Examinons d'abord les cas les plus simples, et, en premier lieu, celui où le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est supposé constant, indépendamment de toute valeur attribuée soit à h, soit à x.

PREMIER CAS.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est supposé indépendant de x et de h.

—

7. Dans ce cas particulier l'on a évidemment,

$$f(x+h) - f(x) = C.h,$$

C étant une constante absolue. De là résulte,

$$(6) \ldots\ldots\ldots \quad f(x+h) = f(x) + C.h,$$

et comme le premier membre de l'équation (6) ne change point lorsqu'on y remplace en même temps x par h et h par x, il s'ensuit que la même condition doit nécessairement subsister pour le second. On a donc aussi ;

$$f(x) + C.h = f(h) + Cx,$$

ou, ce qui revient au même :

$$(7) \ldots\ldots\ldots \quad f(x) - Cx = f(h) - Ch.$$

La simple inspection de l'équation (7) montre clairement que la diffé-

Digitized by Google

rence $f(h) - Ch$, égale à $f(x) - Cx$, doit demeurer constante indépendamment de toute valeur attribuée, soit à h, soit à x. On a donc :

(8) . . . . $f(h) - Ch = C'$,

C' étant une constante absolue. De là résulte en substituant,

(9) . . . . $f(x) = Cx + C'$.

Les équations (8) et (9) conduisent toutes deux à un seul et même théorème, susceptible d'être énoncé, comme il suit :

Lorsque, pour un intervalle quelconque, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ reste égal à C, indépendamment de toute valeur attribuée, soit à x, soit à h, la fonction y se résout pour ce même intervalle en une fonction linéaire de la forme

$$y = Cx + C'.$$

Il est d'ailleurs visible que la réciproque subsiste également, c'est-à-dire que pour toute fonction linéaire de cette forme, l'on a nécessairement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C = \text{const.}$$

8. Le même mode de démonstration conduit à cet autre théorème.

Lorsque les accroissements de deux fonctions d'une même variable x, sont égaux pour toute l'étendue d'un même intervalle quelconque Δx, la différence des fonctions est constante ou nulle dans toute cette étendue.

Soient, en effet, $f(x)$ et $F(x)$ les deux fonctions dont il s'agit. On a par hypothèse

$$f(x+h) - f(x) = F(x+h) - F(x).$$

De là résulte d'abord,

$$f(x+h) - F(x+h) = f(x) - F(x),$$

puis comme ci-dessus :

$$f(x) - F(x) = f(h) - F(h) = \text{const} = C'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Digitized by Google

DEUXIÈME CAS.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est supposé indépendant de h.

—

9. Supposons maintenant que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ soit indépendant de h; il viendra

$$(10) \ldots\ldots\ldots \quad f(x+h) - f(x) = C.h.$$

C étant une quantité qui ne varie point avec h, mais qui peut dépendre de la variable x.

Si dans l'équation (10) nous remplaçons x par $x+h$, nous aurons :

$$(11) \ldots\ldots\ldots \quad f(x+2h) - f(x+h) = C_1 h.$$

C_1 étant ce que devient C, lorsqu'on y remplace x par $x+h$.

Les équations (10) et (11), ajoutées membre à membre, donnent.

$$(12) \ldots\ldots\ldots \quad f(x+2h) - f(x) = (C + C_1)\, h.$$

D'un autre côté, si l'on opère directement sur l'équation (10) et qu'on y remplace h par $2h$, l'on a :

$$(13) \ldots\ldots\ldots \quad f(x+2h) - f(x) = 2C.h.$$

Il vient donc en vertu des équations (12) et (13),

$$C + C_1 = 2C,$$

et par suite

$$(14) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad C_1 = C.$$

Par hypothèse, C est indépendant de h et peut dépendre de x. Si C dépend de x sans dépendre de h et qu'on y remplace x par $x+h$, la quantité C ainsi obtenue, devient nécessairement dépendante de h. L'égalité (14)

Digitized by Google

prouvant que C_1 ne diffère pas de C, il en résulte : 1° que C_1 ne dépend pas de h; 2° que C ne dépend pas de x.

Concluons, que, pour tout intervalle où le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne dépend pas de h, ce rapport est en même temps indépendant de x.

TROISIÈME CAS.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est supposé indépendant de x.

---

10. Supposons en dernier lieu que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ soit indépendant de x; nous aurons,

$$(15) \quad f(x+h) - f(x) = C.h.$$

C étant une quantité qui ne dépend pas de x mais qui peut dépendre de h.

Soit $h_1 = \frac{h}{m}$, m étant un nombre entier quelconque, et C_1 ce que devient C lorsque, dans l'équation (15), on remplace h par h_1. On a d'abord :

$$(16) \quad f(x+h_1) - f(x) = C_1 h_1,$$

puis substituant à x les valeurs successives $x + h_1, x + 2h_1, x + 3h_1$ etc. $x + (m-1)h_1$.

$$(17) \quad \begin{cases} f(x+2h_1) - f(x+h_1) = C_1 h_1 \\ f(x+3h_1) - f(x+2h_1) = C_1 h_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f(x+[m-1]h_1) - f(x+[m-2]h_1) = C_1 h_1 \\ f(x+mh_1) - f(x+[m-1]h_1) = C_1 h_1. \end{cases}$$

Les équations (16) et (17) ajoutées membre à membre donnent :

$$(18) \quad f(x+mh_1) - f(x) = m\,C_1 h_1,$$

ou remplaçant mh_1, par h.

$$(19) \quad f(x+h) - f(x) = C_1 h.$$

Digitized by Google

La comparaison des équations (15) et (19) conduit à l'égalité.

$$C_1 = C.$$

D'un autre côté, si l'on désigne par h' une valeur quelconque admissible pour h et telle que l'on ait $h' = nh_1$, il est évident qu'en opérant sur n comme on l'a fait sur m, on trouverait au lieu de l'équation (18),

$$f(x + nh_1) - f(x) = nC_1 h_1,$$

c'est-à-dire

$$f(x + h') - f(x) = C_1 h',$$

ou remplaçant C_1 par C, qui lui est égal,

$$(20) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(x + h') - f(x) = Ch'.$$

Cela posé, imaginons que dans l'équation (15) on remplace h par h' et désignons par C', ce que devient C par suite de cette substitution; nous aurons,

$$(21) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(x + h') - f(x) = C'h'.$$

Les équations (20) et (21) donnent

$$C = C',$$

et par conséquent, eu égard à l'équation (15),

$$(22) \ldots \quad \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{f(x + h') - f(x)}{h'} = \text{const} = C.$$

L'équation (22) montre que, pour toute valeur h' commensurable avec h, la quantité C demeure constante. Eu égard à la continuité de la fonction y, cette circonstance suffit pour que cette condition s'étende d'elle-même aux valeurs de h' qui ne seraient point commensurables avec h.

On voit donc que C est une constante absolue et qu'en conséquence le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne peut être indépendant de la variable x sans l'être en même temps de l'accroissement h.

Digitized by Google

11. D'après ce qui précède nous sommes en droit de poser la conclusion suivante :

Abstraction faite du cas particulier et unique présenté par la fonction linéaire

$$y = Cx + C'.$$

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *est une fonction qui dépend, à la fois et toujours, des deux quantités* x *et* h.

Ce premier point établi, laissons de côté le cas simple des fonctions linéaires, et cherchons à reconnaître et à déterminer, d'une manière précise, ce qui arrive en général, lorsque, pour une valeur quelconque attribuée à x, l'accroissement h converge indéfiniment vers zéro.

Étude des diverses conditions que peut offrir la variation du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, *la fonction* y *n'étant pas linéaire, et l'accroissement* $h = \Delta x$ *convergeant vers zéro.*

12. Nous commencerons cette étude par deux observations importantes. La première consiste en ce que, pour chaque valeur attribuée d'une part à la variable x, d'autre part à l'accroissement h, le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ affecte toujours une valeur unique, réelle et déterminée. La seconde, en ce que ce même rapport est essentiellement continu, relativement à chacune des quantités x et h, c'est-à-dire que, variant avec ces quantités, il ne peut jamais subir aucun changement brusque, tant que l'une ou l'autre ne fait que croître ou décroître avec continuité.

Nous nous bornerons à démontrer la dernière de ces propositions, l'énoncé de la première suffisant pour en constater l'exactitude évidente.

Soit i une quantité moindre que h, et d'ailleurs aussi petite qu'on voudra; si, d'abord, on remplace x par $x + i$ dans le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, on aura pour expression du changement subi par ce rapport

$$(1)\ldots \frac{f(x+i+h)-f(x+i)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+i+h)-f(x+h)-[f(x+i)-f(x)]}{h}.$$

Digitized by Google

On trouverait de même, en remplaçant h par $h+i$, que le changement correspondant a pour expression

$$(2).\ \frac{f(x+h+i)-f(x)}{h+i}-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h+i)-f(x+h)}{h+i}-\frac{i}{h+i}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Or il est manifeste que chacune des deux différences (1) et (2) converge indéfiniment vers zéro en même temps que i; il est donc inadmissible que pour aucune valeur attribuée, soit à x, soit à h, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ puisse jamais subir aucun changement brusque, alors que l'une ou l'autre des quantités x et h ne fait que croître ou décroître d'une manière continue.

13. Lorsque, pour une valeur quelconque attribuée à x, l'accroissement h converge vers zéro, il est visible que le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se trouve nécessairement assujetti à remplir l'une ou l'autre des quatre conditions suivantes :

1° Croître sans limites;

2° Converger vers une limite constante;

3° Osciller sans fin entre plusieurs limites;

4° Converger vers une limite qui dépend de la valeur attribuée à x et change avec cette valeur.

On conçoit que, tant qu'il s'agit exclusivement d'une ou de plusieurs valeurs particulières attribuées à la variable, l'une ou l'autre de ces quatre conditions puisse également se réaliser. En est-il de même pour une suite de valeurs qui se succéderaient continûment, ou sans écart assignable, dans toute l'étendue d'un intervalle quelconque déterminé? Tel est le point principal que nous avons actuellement à résoudre; nous le traiterons en nous plaçant d'abord et successivement dans chacune des trois premières hypothèses. Il suffira d'ailleurs que nous raisonnions sur des intervalles où les valeurs de x à considérer se succèdent continûment; les résultats obtenus dans ce cas s'étendent d'eux-mêmes à celui où l'on imagine que, sans être continues, ces valeurs ne conservent, néanmoins, entre elles que des écarts indéfiniment petits.

Digitized by Google

1^re QUESTION A RÉSOUDRE.

Est-il possible que, pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle quelconque déterminé, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ soit et demeure indéfiniment croissant, tandis que h converge vers zéro?

14. Soient x_1 et x_p, deux valeurs de x prises dans l'intervalle que l'on considère, et où, par hypothèse, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devient indéfiniment grand à mesure que h converge vers zéro. Si l'on désigne par x_e une valeur quelconque intermédiaire et par h_e une valeur de h suffisamment petite, on pourra toujours faire en sorte que l'on ait

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{f(x_e + h_e) - f(x_e)}{h_e} > \mathrm{K},$$

K étant une quantité dont on dispose et qu'on peut prendre aussi grande qu'on voudra. La valeur du rapport $\frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1}$ étant déterminée, nous supposerons que l'on ait attribué à K une valeur quelconque, satisfaisant à l'inégalité

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{K} > \frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1}.$$

Partons de la valeur x_1 prise à l'origine de l'intervalle que l'on considère; posons

$$(3) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} x_1 + h_1 \quad = x_2 \\ x_2 + h_2 \quad = x_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} + h_{n-1} = x_n \\ x_n + h_n \quad = x_{n+1}. \end{array} \right.$$

et faisons pour les valeurs (x_1, h_1), ainsi que pour les suivantes (x_2, h_2), (x_3, h_3), etc., ce que j'ai indiqué pour la valeur générale x_e. Nous aurons dans les mêmes conditions que pour l'inégalité (1)

Digitized by Google

$$(4) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} f(x_1 + h_1) - f(x_1) > K h_1 \\ f(x_2 + h_2) - f(x_2) > K h_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_{n-1} + h_{n-1}) - f(x_{n-1}) > K h_{n-1}. \\ f(x_n + h_n) - f(x_n) > K h_n \end{array} \right.$$

Ajoutant membre à membre les inégalités (4), il vient, eu égard aux égalités (3),

$$(5) \ldots\ldots \quad f(x_{n+1}) - f(x_1) > K(h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n).$$

On a d'ailleurs, en vertu de ces mêmes égalités,

$$x_1 + h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n = x_{n+1},$$

et il est visible que la valeur x_{n+1} peut être supposée précisément égale à x_p. On peut donc écrire

$$h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n = x_p - x_1,$$

et substituant dans l'inégalité (5)

$$f(x_p) - f(x_1) > K(x_p - x_1).$$

De là résulte

$$K < \frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1},$$

et comme cette inégalité implique contradiction avec l'inégalité (2), il en résulte que l'hypothèse, d'où nous sommes parti, est inadmissible.

Concluons qu'il n'est aucun intervalle dans toute l'étendue duquel le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *puisse croître sans limites à mesure que h converge vers zéro.*

Digitized by Google

2^me QUESTION A RÉSOUDRE.

Est-il possible que, pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle quelconque déterminé, et tandis que h converge vers zéro, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ soit et demeure convergent vers une seule limite, constamment la même?

15. Soient x_1 et x_p deux valeurs de x prises dans l'intervalle que l'on considère et où l'on suppose que, tandis que h décroît indéfiniment, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne cesse pas de converger vers une seule et même limite constante C. Si l'on désigne par x_e une valeur quelconque intermédiaire, et par h_e une valeur de h suffisamment petite, on pourra toujours faire en sorte que l'on ait

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{f(x_e + h_e) - f(x_e)}{h_e} = C + \eta_e,$$

η_e étant moindre qu'une certaine quantité η dont on dispose et qu'on peut d'ailleurs prendre aussi petite qu'on voudra. Partons de la valeur x_1 prise à l'origine de l'intervalle que l'on considère; posons comme tout à l'heure

$$(2)\ldots\ldots \quad \begin{cases} x_1 + h_1 = x_2 \\ x_2 + h_2 = x_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} + h_{n-1} = x_n \\ x_n + h_n = x_{n+1}. \end{cases}$$

et faisons pour les valeurs conjuguées (x_1, h_1), ainsi que pour les suivantes (x_2, h_2), (x_3, h_3), etc., ce que j'ai indiqué pour les valeurs générales (x_e, h_e). Nous aurons dans les mêmes conditions que pour l'égalité (1).

$$(3)\ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{f(x_1 + h_1) - f(x_1)}{h_1} = C + \eta_1 \\ \dfrac{f(x_2 + h_2) - f(x_2)}{h_2} = C + \eta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{f(x_{n-1} + h_{n-1}) - f(x_{n-1})}{h_{n-1}} = C + \eta_{n-1} \\ \dfrac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n} = C + \eta_n. \end{cases}$$

Digitized by Google

Multipliant la première des équations (3) par h_1, la seconde par h_2, et ainsi de suite, puis ajoutant membre à membre, il vient, eu égard aux équations (1),

$$(4) \quad \ldots \quad f(x_{n+1}) - f(x_1) = (h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n)\,C + h_1\eta_1 + h_2\eta_2 + \text{etc.} + h_n\eta_n.$$

On a, d'ailleurs, en vertu des mêmes équations,

$$x_1 + h_1 + h_2 \text{ etc.} + h_n = x_{n+1}$$

et il est visible que la valeur x_{n+1} peut être supposée précisément égale à x_p. On peut donc écrire

$$h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n = x_p - x_1,$$

et substituant dans l'équation (4)

$$(5) \quad \ldots \quad f(x_p) - fx_1) = C(x_p - x_1) + h_1\eta_1 + h_2\eta_2 \text{ etc.} + h_n\eta_n$$

Par hypothèse chacune des valeurs η_1, η_2, etc., est moindre qu'une certaine quantité η dont on dispose et qu'on peut prendre aussi petite qu'on veut. On a donc d'abord

$$h_1\eta_1 + h_2\eta_2 + \text{etc.} + h_n\eta_n < (h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n)\eta < (x_p - x_1)\eta.$$

Il vient ensuite, eu égard à l'égalité (5)

$$(6) \quad \ldots \quad \frac{f(x_p - f(x_1)}{x_p - x_1} = C + \mu\eta.$$

μ étant moindre que un.

Cela posé, il est évident que si les quantités C et $\frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1}$, *toutes deux constantes,* n'étaient point égales, l'équation (6) où η peut être supposé indéfiniment petit, serait impossible. On a donc nécessairement

$$\frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1} = C,$$

Digitized by Google

et par suite

$$\eta = \eta_1 = \eta_2 \text{ etc.} = o.$$

Concluons qu'il n'est aucun intervalle dans toute l'étendue duquel le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *puisse converger toujours vers une même limite constante* C, *à mesure que* h *décroît indéfiniment.*

16. L'hypothèse admise ci-dessus, en ce qui concerne l'équation (1), implique comme conséquence nécessaire que, dans toute l'étendue de l'intervalle considéré, l'on a constamment

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{const} = C;$$

et puisque cette condition n'est réalisable, ainsi que nous l'avons établi précédemment, que pour le cas de la fonction linéaire

$$f(x) = Cx + C',$$

nous sommes en droit de poser, comme rigoureusement démontré, le théorème suivant :

Lorsque, dans toute l'étendue d'un intervalle quelconque, le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable est reconnu tel qu'il diffère aussi peu qu'on veut d'une limite constante C, *à mesure que l'accroissement de la variable converge vers zéro, il est démontré,* par là même, *que ce rapport est invariable, et qu'il a, pour expression numérique, cette même valeur* C, *considérée, d'abord, comme une simple limite.*

Ce théorème implique d'ailleurs, comme conséquence immédiate, le corollaire suivant :

Si la constante C *considérée comme limite est égale à zéro, la fonction supposée se résout elle-même en une quantité constante* C'.

Le lecteur remarquera sans doute que, dans tout ce qui précède, nous n'avons fait que reproduire, avec certaines modifications, des démonstra-

Digitized by Google

tions depuis longtemps connues. Dans ce qui suit, les questions à résoudre sont infiniment plus délicates; nous croyons d'ailleurs, qu'elles sont tout à fait neuves et qu'un intérêt assez considérable s'attache à leur solution.

3[me] QUESTION A RÉSOUDRE.

Est-il possible que, pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle quelconque déterminé, et tandis que h converge vers zéro, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oscille constamment et sans fin entre plusieurs limites distinctes?

17. Imaginons que, pour une valeur particulière attribuée à x, *et tandis que h converge vers zéro*, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ croisse et décroisse alternativement, de manière à osciller *sans fin* entre certaines limites.

Deux cas répondent à cette hypothèse, selon que les limites dont il s'agit se rapprochent indéfiniment l'une de l'autre, ou qu'au contraire elles conservent entre elles un écart déterminé.

Dans le premier cas, les choses se passent de la même façon que si le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ convergeait vers la valeur finale, commune aux deux limites. Les déductions précédentes s'appliquent d'elles-mêmes à ce cas et il n'y a pas lieu de nous y arrêter.

Dans le second cas, il semble que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cesse de pouvoir être considéré comme convergeant vers une limite quelconque déterminée. Examinons ce qui se passe alors. Par hypothèse, à mesure que h converge vers zéro, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ subit une alternative non interrompue d'accroissements et de décroissements successifs. Lorsque le rapport croît, l'accroissement qu'il subit persiste jusqu'à une certaine valeur *maxima*, à partir de laquelle le décroissement commence. De même, lorsque le rapport décroît, le décroissement qu'il subit persiste jusqu'à une certaine valeur *minima*, à partir de laquelle l'accroissement recommence; et ainsi de suite, sans que ces alternatives cessent de se reproduire en nombre toujours inépuisable. Il suit de là que les valeurs *maxima* et *minima*, qui se succèdent tour à tour, répondent à des valeurs de h qui deviennent de

Digitized by Google

plus en plus petites, et qui, par conséquent, se rapprochent indéfiniment les unes des autres.

Soit M une des valeurs *maxima* affectées par le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Cette valeur peut être choisie de manière à surpasser toutes celles qui viennent à sa suite, à mesure que h décroît indéfiniment, ou bien il faut que cette suite ne cesse pas d'offrir des valeurs *maxima* toujours croissantes, et convergeant ainsi vers une limite supérieure.

Il existe donc nécessairement, ou bien *une limite supérieure* vers laquelle les valeurs *maxima* convergent en croissant, ou bien une valeur *maxima* M qui surpasse toutes celles qui la suivent.

Examinons cette dernière hypothèse.

Si, parmi les valeurs *maxima* considérées dans l'ordre où elles se succèdent, à mesure que h converge vers zéro, il en est une, M, plus grande que les suivantes, il faut de même et nécessairement que celles-ci comprennent, soit une valeur *maxima* moindre que toutes les autres, soit une suite de valeurs *maxima* constamment décroissantes, et convergeant ainsi vers *une limite inférieure.*

Dans le premier cas, M′ étant la valeur *maxima* supposée moindre que toutes les suivantes, il est visible que celles-ci restent comprises entre M et M′; il faut donc qu'elles finissent, ou par converger vers une certaine limite intermédiaire, ou par osciller indéfiniment entre deux limites, *l'une supérieure* et tout au plus égale à M, l'autre *inférieure* et au moins égale à M′.

Dans le second cas, M′ étant la limite inférieure vers laquelle les moindres valeurs *maxima* convergent en décroissant, l'on voit de même que, prises dans leur ensemble, les valeurs *maxima* doivent nécessairement finir, soit par converger vers la limite M′, soit par osciller sans fin entre cette limite et *une limite supérieure* tout au plus égale à M.

Observons que, dans le cas d'une oscillation persistante entre deux limites déterminées et distinctes, les valeurs *maxima* se succèdent alternativement, de manière à présenter deux suites, dont l'une converge vers *la limite supérieure,* et l'autre vers *la limite inférieure;* à chacune de ces deux suites correspond une série distincte de valeurs de h indéfiniment décrois-

santes. *Nous supposerons que l'on prend à part et que l'on considère isolément la première série, c'est-à-dire celle qui répond aux plus grandes valeurs maxima.*

D'après ce qui précède il est aisé de voir que, dans tous les cas possibles, *les plus grandes valeurs maxima* finissent nécessairement par former une suite qui converge, en croissant ou en décroissant, vers une certaine limite L.

On démontrerait de même que, dans tous les cas possibles, *les plus petites valeurs minima* finissent nécessairement par former une suite qui converge, en croissant ou en décroissant, vers une certaine limite l.

Par hypothèse, les limites L et l conservent entre elles un écart déterminé. Il est clair, d'ailleurs, qu'en prenant h suffisamment petit, l'on peut toujours obtenir pour le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ des valeurs aussi rapprochées qu'on veut de l'une ou l'autre de ces deux limites.

18. Cela posé, imaginons que ce ne soit plus seulement pour une valeur particulière attribuée à x que le décroissement indéfini de h détermine, dans les valeurs correspondantes du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, une oscillation sans fin, avec convergence alternative vers deux limites distinctes. Concevons que cette même condition subsiste pour toute l'étendue d'un certain intervalle. Dans cette nouvelle hypothèse, il importe avant tout de reconnaître si les limites L et l, qui sont déterminées pour chaque valeur de x, subissent ou non des changements brusques, lorsque la variable croît d'une manière continue.

Voyons d'abord ce qui se passe relativement à la limite supérieure L.

Soit x_1, x_2, x_3, etc., la suite des valeurs de x à considérer, et L_1, L_2, L_3, etc., les valeurs correspondantes de la limite supérieure L. A chacune des valeurs x_1, x_2, x_3, etc., répond un accroissement h_1, h_2, h_3, etc., tel que, pour cet accroissement et pour une infinité d'autres de plus en plus petits, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ comporte une suite de valeurs qui satisfont toutes à la condition générale,

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = L + \eta,$$

η étant une quantité qui décroît indéfiniment avec h et qu'on peut supposer aussi rapprochée qu'on voudra de zéro.

Parmi les valeurs h_1, h_2, h_3, etc., il en est une moindre que toutes les autres. Nous la désignerons par h_e, et, disposant jusqu'à un certain point de la valeur h qui figure dans l'équation précédente, nous la prendrons telle que l'on ait toujours

$$h < h_e.$$

L'équation (1) appliquée à la valeur particulière x_n donne

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{f(x_n+h)-f(x_n)}{h} = \mathrm{L}_n + \eta_n.$$

Soit i une quantité moindre que h, et d'ailleurs aussi rapprochée qu'on voudra de zéro; si, dans l'équation (2), l'on remplace x_n par x_{n+i}, le premier membre de cette équation subira un changement qu'on peut supposer aussi petit qu'on veut, et toujours d'autant moindre que la quantité i sera elle-même plus petite. Ce changement étant exprimé par ξ, il vient

$$\frac{f(x_n+i+h)-f(x_n+i)}{h} = \mathrm{L}_n + \eta_n + \xi.$$

D'un autre côté, si l'on désigne par x_p la valeur x_{n+i}, et qu'on observe que la valeur L_p correspondante à x_p se réalise avec tel degré d'approximation qu'on veut, pour une valeur h_p supérieure à h, on voit clairement que le rapport $\frac{f(x_p+h)-f(x_p)}{h}$ doit être inférieur à L_p, ou, s'il est supérieur à cette limite, qu'il ne peut la dépasser que d'une certaine quantité tout au plus égale à celle qui fixe le degré d'approximation voulue η_p. On a donc nécessairement

$$\frac{f(x_p+h)-f(x_p)}{h} = \mathrm{L}_n + \eta_n + \xi \underset{=}{\overset{<}{\text{ou}}} \mathrm{L}_p + \eta_p.$$

De là résulte

$$(3) \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{L}_n - \mathrm{L}_p \underset{=}{\overset{<}{\text{ou}}} \eta_p - \eta_n - \xi.$$

Digitized by Google

Or, en premier lieu, si l'on prend h suffisamment petit, chacune des quantités η_n, η_p sera aussi rapprochée qu'on voudra de zéro; si d'ailleurs on imagine que la quantité i décroisse indéfiniment, il en sera de même de la quantité ξ. *Il est donc démontré que, s'il y a excès de L_n sur L_p, cet excès ne peut que décroître indéfiniment, à mesure que les valeurs x_p et x_n vont en se rapprochant l'une de l'autre.* La réciproque se démontre de la même manière, ainsi que nous allons le faire voir, en ne reproduisant toutefois que les points principaux des déductions précédentes.

Concevons à cet effet que, procédant en sens inverse, l'équation (1) soit appliquée à la valeur x_p. Il viendra, en désignant par h' la valeur qu'il convient alors d'attribuer à h :

$$\frac{f(x_p + h') - f(x_p)}{h'} = L_p + \eta_p.$$

De là résulte comme ci-dessus,

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \frac{f(x_p - i + h') - f(x_p - i)}{h'} = L_p + \eta_p + \xi'.$$

ξ' étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que i.

Mais le premier membre de l'équation (4) a évidemment pour valeur

$$\frac{f(x_n + h') - f(x_n)}{h'}.$$

Il ne peut donc qu'être inférieur à L_n, ou, s'il est supérieur à cette limite, il ne peut la dépasser que d'une certaine quantité tout au plus égale à η_n. On a ainsi :

$$L_p + \eta_p + \xi' \ \underset{\text{ou}\ =}{<}\ L_n + \eta_n,$$

et, par conséquent,

$$L_p - L_n \ \underset{\text{ou}\ =}{<}\ \eta_n - \eta_p - \xi'.$$

Il suit de là que, s'il y a excès de L_p sur L_n, cet excès ne peut que décroître indéfiniment à mesure que les valeurs x_n, x_p sont de plus en plus rapprochées. La

Digitized by Google

même proposition ayant déjà été établie en ce qui concerne l'excès de L_n sur L_p, il est actuellement visible que les deux limites L_n, L_p ne peuvent l'emporter l'une sur l'autre, et réciproquement, que d'une quantité indéfiniment décroissante avec i. *On ne peut donc point admettre que la limite supérieure* L *subisse, en général, aucun changement brusque, lorsque la variable x croît avec continuité.*

19. Le fait que nous venons de constater relativement à la limite supérieure L subsiste également en ce qui concerne la limite inférieure l. On le prouverait, au besoin, en suivant le même procédé de démonstration que nous venons de développer. Nous poursuivrons, sans nous arrêter à ce détail qui n'offre aucune difficulté nouvelle.

20. Après avoir reconnu que, dans l'hypothèse où nous raisonnons, les limites L et l varient continûment avec x, nous allons examiner si cette hypothèse elle-même est ou non compatible avec les conditions supposées remplies par la fonction y.

Pour plus de clarté, nous résumerons en quelques mots l'état de la question qu'il s'agit de résoudre.

On suppose que, pour toute l'étendue d'un certain intervalle, le décroissement indéfini de h détermine, dans les valeurs correspondantes du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, une oscillation sans fin avec convergence alternative vers deux limites L et l. Il est d'ailleurs prouvé que, si ces limites varient avec x, c'est d'une manière continue, c'est-à-dire sans subir aucun changement brusque. Cela posé, il s'agit de reconnaître si la supposition d'où l'on part est ou non compatible avec la continuité de la fonction y.

Soient x_1 et x_p, deux valeurs de x prises dans l'intervalle que l'on considère, et assez rapprochées l'une de l'autre pour que de x_1 à x_p les changements subis respectivement par chacune des limites L et l restent toujours extrêmement petits.

Si, pour une valeur quelconque intermédiaire x_e, l'on désigne par L_e et l_e les valeurs correspondantes des limites L et l, on aura généralement

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_e = L_1 + \alpha_e, \\ l_e = l_1 + \epsilon_e. \end{array} \right.$$

Digitized by Google

α_e et ϵ_e étant par hypothèse aussi petits qu'on voudra. Posons en général

$$(6) \ldots\ldots\ldots \quad x_e + h_e = x_{e+1}.$$

Si la valeur h_e est convenablement choisie et d'ailleurs suffisamment petite, l'on peut écrire

$$(7) \ldots \quad \frac{f(x_e + h_e) - f(x_e)}{h_e} = \mathrm{L}_e + \gamma_e = \mathrm{L}_1 + \alpha_e + \gamma_e = \mathrm{L}_1 + \eta_e.$$

γ_e différant aussi peu qu'on voudra de zéro, et par conséquent la quantité η_e n'étant pas sensiblement supérieure à la quantité correspondante α_e.

Partons de la valeur x_1, prise à l'origine de l'intervalle que l'on considère, et faisons pour cette valeur, ainsi que pour les suivantes x_2, x_3, etc., ce que je viens d'indiquer pour la valeur générale x_e, nous aurons dans les mêmes conditions que tout à l'heure, d'une part,

$$(8) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} x_1 + h_1 = x_2 \\ x_2 + h_2 = x_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} + h_{n-1} = x_n \\ x_n + h_n = x_{n+1}. \end{array} \right.$$

et d'autre part

$$(9) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{f(x_1 + h_1) - f(x_1)}{h_1} = \mathrm{L}_1 + \eta_1 \\ \dfrac{f(x_2 + h_2) - f(x_2)}{h_2} = \mathrm{L}_1 + \eta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{f(x_{n-1} + h_{n-1} - f(x_{n-1})}{h_{n-1}} = \mathrm{L}_1 + \eta_{n-1} \\ \dfrac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n} = \mathrm{L}_1 + \eta_n. \end{array} \right.$$

Multipliant la 1re des équations (9) par h_1, la 2me par h_2, etc., puis ajoutant membre à membre, il vient, eu égard aux équations (8) :

$$(10) \quad . \quad . \quad f(x_{n+1}) - f(x_1) = (h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n)\,L_1 + \eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \text{etc.} + \eta_n h_n.$$

On a, d'ailleurs, en vertu des mêmes équations (8)

$$(11) \ldots \ldots \quad x_1 + h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n = x_{n+1},$$

et il est visible que, si la valeur x_{n+1} n'est pas précisément égale à x_p, l'on peut cependant faire en sorte qu'elle en diffère indéfiniment peu. Posons en conséquence

$$(12) \ldots \ldots \ldots \quad x_{n+1} = x_p - i,$$

i étant une quantité dont on dispose, et qu'il est permis de supposer aussi rapprochée qu'on voudra de zéro.

De là résulte, en vertu de l'équation (11)

$$h_1 + h_2 \text{ etc.} + h_n = x_{n+1} - x_1 = x_p - i - x_1,$$

et par suite, en substituant dans l'équation (10),

$$(13) \ldots \quad \frac{f(x_p - i) - f(x_1)}{x_p - i - x_1} = L_1 + \frac{\eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \text{etc.} + \eta_n h_n}{x_p - i - x_1}.$$

soit η la plus grande des valeurs η_1, η_2, etc., l'on a

$$\eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \text{etc.} + \eta_n h_n < (h_1 + h_2 + \ldots h_n)\,\eta < (x_p - i - x_1)\,\eta,$$

et par conséquent, l'équation (13) devient

$$(14) \ldots \ldots \quad \frac{f(x_p - i) - f(x_1)}{x_p - i - x_1} = L_1 + \mu\eta,$$

μ étant une fraction.

D'un autre côté, l'on a évidemment

$$\frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1} - \frac{f(x_p - i) - f(x_1)}{x_p - i - x_1} = \xi,$$

Digitized by Google

ξ étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que i. Il vient donc enfin

$$(15)\ldots\ldots\ldots\quad \frac{f(x_p)-f(x_1)}{x_p-x_1}=\mathrm{L}_1+\mu\eta+\xi.$$

Cela posé, il est clair qu'en opérant sur la limite inférieure l_1, comme nous venons de le faire sur la limite supérieure L_1, l'on aurait de même

$$(16)\ldots\ldots\ldots\quad \frac{f(x_p)-f(x_1)}{x_p-x_1}=l_1+\mu'\eta'+\xi'.$$

Des équations (15) et (16) l'on déduit immédiatement

$$\mathrm{L}_1-l_1=\mu'\eta'+\xi'-\mu\eta-\xi.$$

Cette dernière relation est évidemment impossible, puisque, d'une part, on suppose un écart déterminé entre les constantes L_1, l_1, tandis que, d'autre part, il est prouvé que chacune des quantités ξ, ξ', $\mu\eta$, $\mu'\eta'$ peut être rendue indéfiniment petite. Concluons en conséquence que, *il n'est aucun intervalle dans toute l'étendue duquel le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *puisse osciller sans fin entre deux limites distinctes, à mesure que* h *converge vers zéro.*

RÉSUMÉ.

21. La fonction $y=f(x)$ étant supposée continûment croissante ou continûment décroissante, dans un certain intervalle, et les valeurs qu'elle y prend étant toutes *effectives*, nous avons établi, relativement au rapport,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

1° qu'il ne peut être indépendant de l'une des quantités x ou h, sans l'être en même temps de l'autre;

Digitized by Google

2° Que, lorsque cette indépendance existe, la fonction est linéaire, et réciproquement;

3° Qu'abstraction faite de ce cas exceptionnel, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dépendant à la fois de x et de h, varie continûment avec chacune de ces deux grandeurs, et affecte toujours, en même temps qu'elles, une valeur unique, réelle et déterminée.

Examinant, ensuite, ce qui arrive lorsque, pour une valeur quelconque attribuée à la variable, l'on fait décroître indéfiniment la quantité h, nous avons reconnu que si le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut accidentellement croître sans limites, ou bien converger vers une même limite constante, ou bien encore rester oscillant entre deux limites distinctes, il est néanmoins impossible qu'aucune de ces trois conditions [1] subsiste d'une manière permanente, dans toute l'étendue d'une partie quelconque de l'intervalle considéré.

Si l'on supposait que, pour une certaine étendue, il s'agît, non pas de toutes les valeurs de x comprises dans cette étendue, mais néanmoins d'une suite de valeurs qui se succéderaient sans conserver entre elles *aucune distance assignable*, l'impossibilité que nous venons de rappeler subsisterait également. Cette extension des résultats établis par les démonstrations qui précèdent, se fait en quelque sorte d'elle-même, et sans qu'il soit besoin d'insister pour en faire ressortir la complète évidence.

Cela posé, observons qu'abstraction faite du cas exceptionnel présenté par les fonctions linéaires, *il faut nécessairement*, tandis que h converge vers zéro, *que le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *remplisse l'une ou l'autre des quatre conditions suivantes :*

1° *Croître sans limites;*

2° *Converger vers une limite constante;*

3° *Osciller sans fin entre deux limites distinctes;*

4° *Converger vers une limite variable avec* x.

[1] Il est bien entendu qu'il ne s'agit point ici des fonctions linéaires. Pour ces fonctions, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est constant, indépendamment de toute valeur attribuée à h. Il n'y a donc point lieu d'examiner ce qui se passe, lorsque h converge vers zéro.

Digitized by Google

D'après ce qui précède, il n'est aucune étendue dans laquelle l'une quelconque des trois premières conditions puisse subsister constamment, pour des valeurs de x qui se succéderaient d'une manière continue, ou avec des écarts indéfiniment petits. Il suit de là que le contraire doit avoir lieu pour la quatrième. Supposons, en effet, que pour celle-ci, de même que pour chacune des autres, il n'existe point d'intervalle où elle soit *continûment* persistante; il est visible que, dans cette hypothèse, aucune distance assignable ne pourra jamais s'établir entre les valeurs de x qui réalisent l'une quelconque des trois premières conditions. Il faudra donc nécessairement que l'une ou plusieurs de celles-ci ne cessent point de subsister, soit d'une manière continue, soit pour des valeurs de x qui seraient indéfiniment rapprochées les unes des autres. *Or, c'est là précisément ce qui a été démontré impossible.*

Concluons :

1° *Que, si dans la variation que le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *subit à mesure que h converge vers zéro, l'une ou l'autre des trois premières conditions peut se réaliser, ce n'est jamais qu'accidentellement ou exceptionnellement, c'est-à-dire pour des valeurs de x qui demeurent isolées les unes des autres, et qui conservent entre elles un certain intervalle.*

2° *Que, dans toute l'étendue comprise entre deux quelconques de ces valeurs isolées et successives, le rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *ne cesse point de converger constamment vers une limite déterminée et variable avec x.*

22. Considérons l'un des intervalles compris entre deux de ces valeurs isolées et successives, pour lesquelles le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ croît indéfiniment, ou oscille sans fin entre deux limites distinctes. Si nous désignons par $f'(x)$ la limite vers laquelle ce même rapport converge dans toute l'étendue de cet intervalle, à mesure que h décroît indéfiniment, nous aurons

$$f'(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

et nous pourrons écrire en conséquence

$$(17) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \eta,$$

Digitized by Google

η étant une quantité qui dépend de h et qui converge vers zéro en même temps que cet accroissement.

La limite $f'(x)$ prend, par rapport à la fonction donnée $f(x)$, le nom de fonction dérivée. L'indice, dont on affecte le signe représentatif de la fonction pour désigner la fonction dérivée, sert en même temps à distinguer celle-ci et à rappeler son origine.

23. Telle est la conclusion de la première partie de ce travail. Nous la compléterons en démontrant que la fonction désignée par $f'(x)$ est généralement continue.

Reprenons l'équation (17)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\eta.$$

Applicable à toute valeur de x, comprise dans l'un quelconque des intervalles définis ci-dessus, cette équation exprime que, pour chacune de ces valeurs, l'accroissement h comporte une certaine limite h', à partir de laquelle la quantité η devient aussi petite qu'on veut, et ne fait d'ailleurs que décroître encore, à mesure que h converge vers zéro.

Considérons la suite des valeurs affectées par la limite h', alors que la variable croît continûment de x_1 à x_p. Par hypothèse les valeurs x_1, x_p, sont toutes deux comprises dans un seul et même intervalle répondant à l'équation (17). La condition exprimée par cette équation subsiste en conséquence pour toute l'étendue de la variation qui s'accomplit de x_1 à x_p, et *il n'est aucune valeur intermédiaire x_n pour laquelle la limite h' puisse disparaître ou s'évanouir*. Doit-on conclure de là que, parmi les valeurs affectées par h', il n'en est aucune qui s'abaisse au-dessous d'un certain degré de grandeur assignable d'avance et numériquement exprimable; ou bien, au contraire, faut-il admettre que la moindre de ces valeurs peut devenir indéfiniment petite en même temps que la variable x converge vers certaines valeurs déterminées? Cette question curieuse n'a pas besoin d'être résolue pour l'objet que nous nous proposons. En effet, les deux conditions que nous venons d'énoncer sont évidemment les seules qui puissent se réaliser dans la variation subie par la limite h'; il suffit

Digitized by Google

d'ailleurs de partager convenablement l'intervalle $x_p - x_1$, pour que la première subsiste seule et exclusivement dans chacune des subdivisions obtenues. Soit, par exemple, x_a, x_b, x_c, etc., les valeurs successives et *nécessairement isolées* pour lesquelles la limite h' converge vers zéro, en même temps que la variable x, supposée continûment croissante, se rapproche indéfiniment de l'une ou de l'autre de ces valeurs. Partant de la valeur x_1, la limite h' a un certain degré de grandeur. Plus loin ce degré s'abaisse indéfiniment, à mesure que x converge vers x_a; néanmoins, si près qu'on soit de la valeur x_a, il suffit de s'arrêter au point où l'on est parvenu, pour que, dans l'intervalle franchi depuis la valeur x_1, la limite h' n'ait pas cessé d'être constamment supérieure à zéro d'une quantité déterminée et numériquement assignable. On voit donc clairement que, pour faire subsister cette même condition dans toute l'étendue de chacune des subdivisions successives $x_a - x_1$, $x_b - x_a$, $x_c - x_b$, etc., il suffit d'en exclure respectivement les valeurs extrêmes x_a, x_b, x_c, etc.

Cela posé, soit $x \pm i$ une suite continue de valeurs *s'écartant aussi peu qu'on voudra de x*, et toutes comprises dans l'une quelconque des subdivisions $x_a - x_1$, $x_b - x_a$, etc. On a d'abord

$$(17) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \eta;$$

puis remplaçant x par $x \pm i$, et désignant par η' la valeur que prend η,

$$(18) \quad \frac{f(x \pm i + h) - f(x \pm i)}{h} = f'(x \pm i) + \eta'.$$

De là résulte, en désignant par ξ la différence des premiers membres des équations (17) et (18),

$$f'(x \pm i) - f'(x) = \xi + \eta - \eta'.$$

Or, en premier lieu, il suffit que la valeur attribuée à h ne dépasse pas un certain degré de grandeur pour que, *indépendamment de toute valeur affectée par i dans la suite $x \pm i$*, les quantités η, η' restent aussi rapprochées

Digitized by Google

qu'on voudra de zéro. Si, d'ailleurs, et en second lieu, l'on imagine que la quantité i décroisse indéfiniment, il en est forcément de même de la quantité

$$\xi = \frac{f(x \pm i + h) - f(x \pm i)}{h} - \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Il est donc manifeste que la différence

$$f'(x \pm i) - f'(x) = \xi + \eta - \eta',$$

peut être rendue aussi petite qu'on veut, et, par conséquent, l'on ne saurait admettre que la fonction $f'(x)$ subisse aucun changement brusque de grandeur, lorsque la variable x, dont elle dépend, croît avec continuité dans l'une quelconque des subdivisions, $x_a - x_b$, $x_b - x_a$, $x_c - x_b$, etc.

24. Lorsqu'aux valeurs positives de l'accroissement h on substitue des valeurs négatives, rien n'est modifié ni dans les démonstrations qui précèdent, ni dans leurs conséquences. Veut-on s'en convaincre immédiatement? Il suffit d'observer que, pour toute variation accomplie dans un intervalle quelconque $x_p - x_1$, il y a identité entre les fonctions $f(x)$ et $f(x_1 + x_p - x)$, sauf inversion de l'ordre suivant lequel les valeurs se succèdent. Soit, en effet, x' et x'' deux valeurs conjuguées de la variable x pour lesquelles on ait de part et d'autre

$$x' = x_1 + x_p - x''.$$

Il viendra d'abord

$$f(x') = f(x_1 + x_p - x''),$$

et, comme il en résulte

$$x' - h = x_1 + x_p - x'' - h,$$

l'on aura ensuite

$$f(x' - h) = f[x_1 + x_p - (x'' + h)].$$

On voit ainsi qu'à partir de toute valeur commune des fonctions $f(x_1 + x_p - x)$ et $f(x)$, les changements opérés dans la première, par

Digitized by Google

accroissement de la variable, sont identiques avec ceux que subit la seconde pour un décroissement de la variable égal en grandeur à ce même accroissement. Or, il est démontré qu'on a, en général,

$$\frac{f[(x_1+x_p)-(x''+h)]-f(x_1+x_p-x'')}{h}=\varphi(x'')+\eta,$$

$\varphi(x)$ étant une fonction continue, et η une quantité qui converge vers zéro en même temps que h. On a donc identiquement, par voie de simple substitution

$$\frac{f(x'-h)-f(x')}{h}=\varphi(x_1+x_p-x')+\eta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=\text{F}(x)+\eta.$$

la fonction $\text{F}(x)$ étant généralement continue, et η convergeant vers zéro à mesure que h décroît indéfiniment.

25. Il est prouvé par ce qui précède que, si l'on fait converger vers zéro la quantité h, chacun des deux rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ converge en général vers une certaine limite exprimée par une fonction continue de la variable x. On a donc d'une part,

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\eta,$$

et d'autre part

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{f(x)-f(x-h)}{h}=\text{F}(x)+\zeta,$$

les fonctions $f'(x)$ et $\text{F}(x)$ étant toutes deux continues, et chacune des quantités η, ζ, convergeant vers zéro en même temps que h.

Cela posé, deux cas sont possibles, selon que les fonctions $f'(x)$ et $\text{F}(x)$ se confondent, ou qu'au contraire, elles diffèrent.

Digitized by Google

Soient x_1 et x_2 deux valeurs aussi voisines qu'on voudra, et ne comprenant entre elles aucune de ces valeurs intermédiaires x_a, x_b, etc., dont la variable ne peut se rapprocher indéfiniment, sans qu'il y ait convergence vers zéro de la limite désignée plus haut par h'. Posons $h = x_2 - x_1$. Si dans l'équation (1) l'on remplace x par x_1, il vient

$$(3)\ldots\ldots\ldots\quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) + \eta;$$

de même, si dans l'équation (2) l'on remplace x par x_2 l'on a

$$(4)\ldots\ldots\ldots\quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \mathrm{F}(x_2) + \zeta:$$

De là résulte immédiatement,

$$\mathrm{F}(x_2) - f'(x_1) = \eta - \zeta.$$

et puisque chacune des quantités ζ, η, devient indéfiniment petite, à mesure que h converge vers zéro, il s'ensuit que $\mathrm{F}(x_2)$ converge vers $f'(x_1)$, en même temps que x_2 vers x_1. Il y a donc identité entre les deux fonctions $f'(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ pour toute l'étendue de chacune des subdivisions $x_a - x_1$, $x_b - x_a$, etc., du n° 23.

Ce premier point établi, il est aisé de voir que, réciproquement, toute valeur x_2, pour laquelle on a $f'(x_2) = \mathrm{F}(x_2)$, ne peut coïncider avec aucune des valeurs x_a, x_b, etc., rappelées ci-dessus. En effet, quel que soit le sens suivant lequel la variable x s'écarte de la valeur x_2, la limite h' a, pour le point de départ, un certain degré de grandeur déterminé, et cette même condition subsiste pour une certaine étendue mesurée, soit en avant, c'est-à-dire de x_2 à x_3, soit en arrière, c'est-à-dire de x_2 à x_1. On a donc, d'une part, en vertu de l'équation (1).

$$(5)\ldots\ldots\ldots\quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(x_2) + \eta,$$

et d'autre part, en vertu de l'équation (2),

$$(6) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\mathrm{F}(x_2)+\zeta.$$

La combinaison des équations (5) et (6) donne

$$(7) \ldots \quad f(x_3)-f(x_1)=(x_3-x_2)\,[f'(x_2)-\eta]+(x_2-x_1)\,[\mathrm{F}(x_2)+\zeta],$$

et à raison de l'égalité des deux valeurs $f'(x_2)=\mathrm{F}(x_2)$,

$$(8) \ldots\ldots \quad \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}=f'(x_2)+\frac{(x_3-x_2)\,\eta+(x_2-x_1)\,\zeta}{x_3-x_1};$$

ou bien encore

$$(9) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}=f'(x_2)+\mu\eta,$$

ζ devenant indéfiniment petit, et la fraction μ convergeant vers l'unité à mesure que la valeur x_1 se rapproche indéfiniment de la valeur x_2.

Les équations (8) ou (9) expriment ce qui suit :

Tandis que la variable x croît continûment de x_1 à x_2 l'accroissement $h=x_3-x_1$, reste supérieur à la quantité x_3-x_2, et, néanmoins, le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable se rapproche, autant qu'on le veut, de la limite correspondante $f'(x_2)=\mathrm{F}(x_2)$.

Pour se convaincre de l'exactitude rigoureuse de cette déduction, il suffit d'observer :

1° Que dans l'équation (9) le degré de convergence a pour mesure le produit $\mu\eta$, μ étant une fraction ;

2° Que la quantité η provient de l'équation (5) où l'on a pu la rendre aussi petite qu'on a voulu, tout en conservant à l'écart x_3-x_2 un certain degré de grandeur.

26. Nous venons de reconnaître que les rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$, ont constamment même limite pour toute valeur de x comprise dans chacune des subdivisions x_a-x_1, x_b-x_a, x_b-x_c, du n° (23),

Digitized by Google

et qu'en même temps, aucune des valeurs pour lesquelles cette égalité subsiste ne peut coïncider avec l'une quelconque des valeurs extrêmes x_a, x_b, x_c, etc. Il suit de là que, pour ces dernières valeurs, les deux limites $f'(x)$ et $F(x)$ diffèrent nécessairement, et que, par conséquent, de l'une à l'autre, il y a changement brusque de grandeur. Réciproquement, toutes les fois qu'un pareil changement se produit, pour une valeur déterminée de la variable, l'on peut affirmer que cette valeur appartient à la suite des valeurs isolées x_a, x_b, x_c, etc., précédemment définies.

Soit, en effet, x_2 une valeur de x pour laquelle il y ait inégalité entre les deux quantités $f'(x)$ et $F(x)$, limites respectives des deux rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$. L'équation (7) subsistant comme tout à l'heure, à cela près que les quantités $f'(x_2)$ et $F(x_2)$ ont cessé d'être égales; l'on a, en divisant les deux membres par le facteur x_3-x_1,

$$(10). \quad . \quad . \quad \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}[f'(x_2)+\eta] + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}[F(x_2)+\zeta].$$

Cela posé, si l'on imagine que la quantité x_1 se rapproche indéfiniment de la valeur x_2, *sans toutefois l'atteindre*, il est visible que le second membre de l'équation (10) converge vers la valeur $f'(x_2)$. Or, *dans ces mêmes circonstances*, la limite du rapport $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est $F(x_2)$. On voit donc que si, dans ce cas, l'on se tient à ce procédé, c'est-à-dire si l'on opère en maintenant un certain écart entre les valeurs extrêmes x_1 et x_3, il devient absolument impossible d'obtenir la convergence voulue. Pour remplir cette condition essentielle, il faut alors faire converger la valeur x_3 vers la valeur x_2, de manière à rendre la différence x_3-x_2 indéfiniment petite, par rapport à l'accroissement total x_3-x_1, ce qui exige que cet accroissement converge lui-même vers zéro en même temps que x_1 se rapproche indéfiniment de la valeur x_2. Il est ainsi démontré que

Toute valeur de x, pour laquelle les limites des rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ cessent d'être égales, constitue une des valeurs isolées x_a, x_b, x_c, etc., dont la variable ne peut se rapprocher indéfiniment sans que la limite h' converge vers zéro.

Digitized by Google

On voit aussi par là comment la limite h', qui reste déterminée et numériquement assignable pour chacune des valeurs extrêmes x_a, x_b, x_c, etc., peut néanmoins converger vers zéro, à mesure que la variable converge vers l'une ou l'autre de ces valeurs, soit en croissant, soit en décroissant. Si ces deux faits peuvent, au premier abord, paraître contradictoires, on reconnaît bientôt que leur existence simultanée est non-seulement possible, mais qu'en outre elle dépend d'une condition particulière aussi simple à concevoir que facile à réaliser.

Ajoutons enfin que des équations (7), (8) et (9) du n° 25, résulte le théorème suivant :

En général, et pour toute valeur de x comprise dans l'une des subdivisions $x_a - x_1$, $x_b - x_a$, etc., il est indifférent que l'accroissement Δx soit porté tout entier d'un même côté de cette valeur, ou qu'il se compose de deux parties quelconques portées, l'une en deçà, l'autre au delà. Dans tous les cas, la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ reste identiquement la même.

Les détails dans lesquels nous venons d'entrer n'étaient pas absolument nécessaires au but que nous poursuivons. Néanmoins, nous avons cru utile de ne point les omettre dans une étude approfondie, où leur place se trouve marquée naturellement, et où le jour qu'ils jettent sur plusieurs points délicats satisfait l'esprit, en lui permettant de concilier des faits qui lui sont imposés d'abord, en dépit de leur apparence contradictoire.

Résumé général du chapitre Ier.

27. Soit $y = f(x)$ une fonction quelconque, supposée continue dans l'intervalle $x_p - x_0$ où, pour chaque valeur attribuée à x, elle n'affecte jamais qu'une valeur unique, toujours effective, réelle, et déterminée. Soient en outre x et $x + h$ des valeurs choisies comme on voudra entre les valeurs extrêmes x_0 et x_p.

Le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable ayant pour expression générale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

Digitized by Google

il résulte des démonstrations précédentes que nous pouvons considérer comme étant rigoureusement établis les principes suivants :

1° Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne peut jamais être indépendant de l'une des deux quantités x ou h, sans l'être en même temps de l'autre, et sans se réduire, en conséquence, à une constante absolue. En ce cas, la fonction y est linéaire, et réciproquement;

2° Abstraction faite du cas particulier et unique présenté par la fonction linéaire,

$$y = ax + c,$$

pour laquelle, indépendamment de toute valeur attribuée, soit à x, soit à h, l'on a constamment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ax = \text{const.},$$

le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est une fonction continue qui dépend, à la fois et toujours, des deux quantités x et h;

3° Lorsque la fonction y n'est point linéaire, et que, pour une valeur particulière attribuée à x, l'on fait converger vers zéro l'accroissement h, il peut arriver que le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ croisse sans limite, ou qu'il converge vers une limite constante, ou qu'il oscille sans fin entre plusieurs limites distinctes, ou bien encore qu'il converge vers une limite qui dépend de la valeur attribuée à x, et change avec cette valeur.

De ces quatre conditions, seules possibles dans la variation dont il s'agit, les trois premières ne sont jamais réalisables que d'une manière accidentelle, c'est-à-dire pour des valeurs de x qui demeurent isolées les unes des autres, et qui conservent entre elles certains intervalles. Dans toute l'étendue comprise entre deux quelconques de ces valeurs isolées et successives, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne cesse point de converger constamment vers une limite déterminée et variable avec x. On a donc en général,

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x);$$

Digitized by Google

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\eta,$$

η étant une quantité qui dépend de h et qui converge vers zéro en même temps que cet accroissement;

4° Pour chacun des intervalles, dont il vient d'être fait mention, l'on a généralement :

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim \frac{f(x)-f(x-h)}{h}=f'(x),$$

et la limite $f'(x)$ est une fonction continue de la variable x. Néanmoins, il est possible que, pour certaines valeurs particulières, x_a, x_b, x_c, etc., comprises dans l'un quelconque de ces intervalles, les limites des deux rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ cessent tout à coup d'être égales. En ce cas, il y a lieu d'observer, comme tout à l'heure, que les valeurs auxquelles répondent ces changements brusques, ne peuvent jamais se succéder qu'en conservant entre elles certains écarts. Il s'ensuit donc que la fonction dérivée $f'(x)$, limite commune des deux rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ demeure essentiellement continue dans toute l'étendue de chacune des subdivisions successives x_a-x_1, x_b-x_a, x_c-x_b, etc.;

5° La continuité de *la fonction primitive* $f(x)$ implique celle de la *fonction dérivée* $f'(x)$, pour une suite d'intervalles qui se succèdent sans interruption et qui forment, par leur ensemble, l'étendue totale où s'accomplit la variation de x.

A chaque limite commune à deux de ces intervalles immédiatement successifs, la fonction dérivée peut subir un changement brusque, soit parce que les deux rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$, considérés dans la variation qu'ils subissent pour des valeurs de h indéfiniment décroissantes, cessent de converger vers une même limite, soit que l'un ou l'autre, pris dans les mêmes circonstances, croisse d'une manière indéfinie ou oscille sans fin entre plusieurs limites distinctes. On dit alors qu'il y a solution de continuité. Dans tous les cas, et si rapprochées, si nombreuses qu'elles

Digitized by Google

puissent être, ces solutions de continuité ne constituent jamais que des accidents transitoires, essentiellement dépourvus du caractère de permanence qui appartient à la variation continue de la fonction primitive et de sa dérivée.

CHAPITRE II.

DÉFINITION ET INTERPRÉTATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$dy = f'(x).\ \Delta x.$$

28. Soit une fonction continue de la variable x

(1) . . . . $y = f(x)$.

Si l'on désigne par Δy le changement subi par la fonction lorsque la variable augmente de la quantité Δx, l'on a généralement

(2) . . . . $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$,

et en outre, conformément aux déductions précédentes,

(3) . . . . $\lim \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Nous avons démontré que, pour toute valeur de x à laquelle répond une valeur effective de la fonction y, il existe un certain intervalle où l'équation (2) subsiste continûment, et implique, comme conséquence, la condition exprimée par l'équation (3). De là résulte, entre les accroissements Δy et Δx, un lien de dépendance, qui ne cesse pas de les déterminer l'un par l'autre à mesure que tous deux convergent simultanément vers zéro, et qui s'étend ainsi, sans interruption, jusqu'à leur origine elle-même. Par suite, et inversement, il est visible que la génération simultanée de ces accroissements, *considérée à l'instant précis où elle commence*, doit, *alors même*, être nécessairement régie par *une loi déterminée*. Plaçons-nous à

Digitized by Google

cette origine : considérons cet instant précis où les accroissements Δx et Δy prennent en même temps naissance, et, concevant le mode le plus simple qui puisse régir cette génération, *ainsi prise à son début*, admettons qu'il consiste en *une loi de proportionnalité* constante et uniforme.

La condition que nous venons d'énoncer se réalise, lorsque la fonction y est linéaire, c'est-à-dire de la forme

(4). . . . . $y = ax + b.$

En effet, l'on a dans ce cas,

(5). . . . . $\Delta y = a.\Delta x,$

ou, ce qui revient au même,

(6). . . . . $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \text{const.}$

L'équation (6) met en évidence la loi de proportionnalité, suivant laquelle les grandeurs Δy et Δx s'engendrent l'une par l'autre. Elle montre que cette loi est indépendante de toute valeur attribuée à la variable, et qu'elle reste toujours la même, toujours constante et uniforme, soit que les accroissements s'écartent de leur origine commune en augmentant sans fin, soit au contraire qu'ils s'en rapprochent indéfiniment en convergeant vers zéro. On voit ainsi que le mode, suivant lequel la génération simultanée des accroissements s'accomplit, présente le caractère distinctif d'une invariabilité absolue et, qu'en conséquence, il subsiste à l'origine même de cette génération. Le premier principe à déduire de cette simple analyse peut s'énoncer comme il suit :

Dans toute fonction linéaire

$$y = ax + b,$$

quel que soit le point de départ pris pour origine commune des accroissements Δx *et* Δy, *c'est toujours, suivant la raison de proportionnalité exprimée par* a, *que commence la génération simultanée de ces deux grandeurs.*

Digitized by Google

Cela posé, si, tenant compte des considérations qui précèdent, l'on compare l'équation (3) à l'équation (6), l'on est conduit naturellement à l'induction suivante :

Dans toute fonction continue et non linéaire

$$y = f(x),$$

la génération simultanée des accroissements Δx *et* Δy *commence, en général, suivant une certaine raison de proportionnalité. Constamment variable avec* x*, cette raison est exprimée par la valeur particulière que la fonction dérivée* $f'(x)$ *affecte au point pris pour origine des accroissements.*

Ce deuxième principe étant d'une importance tout à fait capitale, nous croyons nécessaire de l'établir directement et avec une entière rigueur. A cet effet, nous procéderons par la voie synthétique.

29. Nous avons dit qu'*à l'instant précis où elle commence* et quelle qu'en soit d'ailleurs l'origine, la génération simultanée des accroissements Δx, Δy, est nécessairement régie par une loi déterminée. Nous avons ensuite considéré le mode le plus simple que cette loi puisse affecter, et, observant qu'il se résout en une raison de proportionnalité constante et uniforme, nous avons montré comment il se réalise effectivement dans la fonction linéaire

$$y = ax + b.$$

Imaginons, maintenant, qu'au lieu de persister dans une seule détermination, la raison dont il s'agit subisse au contraire une variation incessante, et que, en conséquence, pour chaque valeur affectée par x à l'origine des accroissements, elle soit exprimée par la valeur correspondante d'une certaine fonction continue $\varphi(x)$, choisie comme on voudra.

Il est visible que, dans cette hypothèse, les accroissements Δy et Δx ne peuvent plus, comme tout à l'heure, conserver entre eux le rapport qui régit transitoirement leur génération simultanée prise à son origine. La relation qui les fait dépendre l'un de l'autre est nécessairement plus complexe. Cherchons à la déterminer, car telle est la question que nous avons actuellement à résoudre.

Quelle que soit la valeur attribuée à x, il existe à partir de cette valeur

Digitized by Google

un certain intervalle Δx, où la fonction $\varphi(x)$ ne cesse pas de croître toujours ou de toujours décroître. Nous admettrons, pour plus de simplicité, que l'intervalle Δx se trouve limité de manière à remplir la première de ces deux conditions. Cette restriction, purement apparente, n'ôte rien à la généralité des démonstrations. On verra aisément qu'elles s'étendent, d'elles-mêmes, à tous les cas possibles.

Divisons l'intervalle considéré Δx en n parties, toutes égales à h, nous aurons

$$nh = \Delta x;$$

et, si nous désignons par Δy_1, Δy_2, etc., Δy_m, etc., Δy_n, les accroissements partiels qui répondent successivement à chacune des subdivisions effectuées, il viendra pour l'accroissement total Δy,

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \text{etc.} + \Delta y_m + \text{etc.} + \Delta y_n.$$

L'intervalle h, auquel répond l'accroissement partiel Δy_m, est limité par les valeurs extrêmes $x + (m-1)\,h$, $x + mh$. Les valeurs correspondantes de la fonction $\varphi(x)$ sont respectivement $\varphi(x + (m - 1)\,h)$, $\varphi(x + mh)$. Ce sont donc aussi ces dernières valeurs qui déterminent, pour l'intervalle dont il s'agit, les limites entre lesquelles la raison de proportionnalité qui subsiste à l'origine des accroissements, doit être supposée continûment variable et constamment croissante. Or, puisque, dans le cas d'une raison de proportionnalité constante et représentée par a, l'on aurait,

$$\Delta y_m = ah,$$

il s'ensuit que l'hypothèse, où nous raisonnons, implique, comme conséquence *immédiate, nécessaire et évidente*, les deux inégalités générales

$$\Delta y_m > h.\,\varphi(x + (m-1)\,h)$$
$$\Delta y_m < h\,\varphi\,(x + mh).$$

De là résulte *à fortiori*

$$\Delta y > h\,[\varphi(x) + \varphi(x+h) + \varphi(x+2h) + \text{etc.} + \varphi(x + (n-1)\,h)]$$
$$\Delta y < h\,[\varphi(x+h) + \varphi(x+2h) + \text{etc.} + \varphi(x+nh)],$$

Digitized by Google

et, par suite,

$$(7) \quad . \quad . \quad \Delta y = h\left[\varphi(x) + \varphi(x+h) + \text{etc.} + \varphi(x+(n-1)h)\right] + \mu h\left[\varphi(x+nh) - \varphi(x)\right],$$

μ étant une quantité comprise entre zéro et 1.

En remplaçant h par sa valeur $\frac{\Delta x}{n}$, l'équation (7) devient

$$(8). \quad . \quad . \quad \Delta y = \Delta x\left[\frac{\varphi(x) + \varphi(x+h) + \text{etc.} + \varphi(x+(n-1)h)}{n} + \mu . \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{n}\right],$$

ou bien encore

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\varphi(x) + \varphi(x+h) + \text{etc.} + \varphi(x+(n-1)h)}{n} + \mu . \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{n} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Cela posé, imaginons que, sans rien changer à l'intervalle Δx, l'on augmente indéfiniment le nombre n, qui marque en combien de parties égales cet intervalle est subdivisé. L'équation (9) subsistera toujours, et puisque le second membre de cette équation demeure invariable, les deux termes, qui figurent dans le premier, devront former ensemble une somme constante. Or, à mesure que n est pris de plus en plus grand, l'un de ces termes décroît sans fin et approche autant qu'on le veut de zéro; il faut donc que, dans les mêmes circonstances, l'autre converge à lui seul, vers la limite fixe exprimée numériquement par leur somme. Mais, d'un autre côté, ce terme est la moyenne arithmétique des valeurs que la fonction $\varphi(x)$ affecte à l'origine de chacune des subdivisions introduites dans l'intervalle Δx. Il est, d'ailleurs, évident que cette moyenne arithmétique, considérée directement et en elle-même, converge vers une limite déterminée, à mesure que le nombre n croît indéfiniment. Si donc on désigne cette dernière limite par le symbole $\mathbf{M}_x^{x+\Delta x}\varphi(x)$, on aura d'abord pour la déterminer rigoureusement

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{M}_x^{x+\Delta x}\varphi(x) = \lim \frac{\varphi(x) + \varphi\left(x+\frac{\Delta x}{n}\right) + \text{etc.} + \varphi\left(x+(n-1)\frac{\Delta x}{n}\right)}{n = \infty};$$

Digitized by Google

et si l'on veut simplement la calculer par approximation,

$$(11). \quad . \; . \; . \quad \mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} \varphi(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi\left(x + \frac{\Delta x}{n}\right) + \text{etc.} + \varphi\left(x + (n-1)\frac{\Delta x}{n}\right)}{n},$$

l'erreur commise diminuant à mesure que n augmente, et restant toujours moindre que la quantité

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{n}.$$

Il viendra ensuite, et *telle est précisément la relation qu'il s'agissait d'obtenir,*

$$(12). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \Delta y = \Delta x. \mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} \varphi(x).$$

Cette relation, établie entre les accroissements Δy et Δx, les détermine l'un par l'autre, de manière à réaliser l'hypothèse dans laquelle nous avons raisonné. Ils sont donc tels que leur génération simultanée commence suivant une raison de proportionnalité incessamment variable, et exprimée pour chaque origine par la valeur correspondante de la fonction $\varphi(x)$.

Ainsi que nous l'avons fait voir dans notre *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante*, et qu'on peut d'ailleurs y parvenir par le procédé suivi tout à l'heure, on démontre aisément qu'en désignant par $f(x)$ une fonction quelconque continue, et par $f'(x)$ la dérivée de cette fonction, l'on a en général [1]

$$(13). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \Delta f(x) = \Delta x. \mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} f'(x).$$

Il suit de là que, pouvant choisir comme on veut la fonction $\varphi(x)$, il suffit de l'identifier avec la dérivée $f'(x)$ pour que, en vertu des équations (12) et (13), les accroissements $\Delta f(x)$ et Δy qui répondent à un même intervalle quelconque Δx, deviennent eux-mêmes identiques. Cette double identité permet d'appliquer littéralement à l'équation (13) ce que nous avons dit de la relation (12). On voit ainsi que, bien loin d'être gratuite,

[1] Voir, pour la démonstration, le n° 43 ci-après.

Digitized by Google

l'hypothèse, dans laquelle nous avons raisonné, se réalise au contraire pour toute fonction continue $y = f(x)$, et qu'en conséquence, il est une loi générale de proportionnalité subsistant à l'origine des accroissements Δy, Δx, et régissant leur génération simultanée à l'instant précis où elle commence. Le mode affecté par cette loi est uniforme ou varié, suivant que la fonction y est ou n'est pas linéaire. Dans le premier cas, la raison de proportionnalité, dont la valeur particulière complète la détermination de ce mode, demeure invariable : dans le second, elle change incessamment; dans l'un comme dans l'autre, elle est exprimée, pour chaque origine, par la valeur correspondante de la dérivée

$$f'(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

30. Le principe que nous venons d'établir peut se démontrer de bien des manières différentes. En voici une, très-prompte et très-directe, qu'il nous suffira d'indiquer.

L'intervalle Δx restant assez petit pour que la fonction $\varphi(x)$ y soit toujours croissante, ou toujours décroissante, il est visible que l'on a, en même temps,

$$\Delta y > \varphi(x).\ \Delta x$$

et

$$\Delta y < \varphi(x + \Delta x).\ \Delta x;$$

ou bien, au contraire,

$$\Delta y < \varphi(x).\ \Delta x$$

et

$$\Delta y > \varphi(x + \Delta x).\ \Delta x.$$

De là résulte, dans tous les cas,

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad \Delta y = \Delta x.\ [\varphi(x) + \mu(\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)],$$

μ étant une quantité comprise entre 0 et 1.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction quelconque continue, et $f'(x)$ la dérivée de cette fonction. On a, conformément à l'équation (17) du n° 23,

$$(15). \ldots\ldots\ldots \quad \Delta f(x) = \Delta x.\ [f'(x) + \eta],$$

η étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx.

Digitized by Google

Posons, comme tout à l'heure,

$$\varphi(x) = f'(x);$$

la combinaison des équations (14) et (15) donne :

$$\frac{\Delta f(x) - \Delta y}{\Delta x} = \eta - \mu\left[\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)\right],$$

et, en vertu du théorème établi n° 16,

$$\Delta f(x) = \Delta y. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

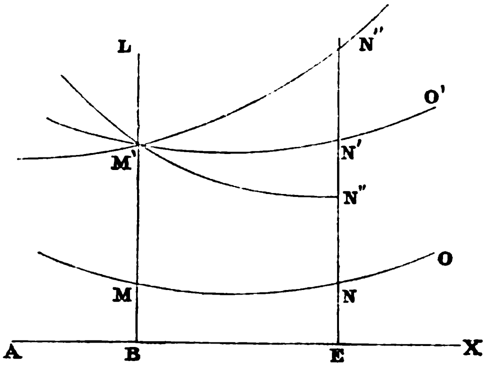
31. Nous avons vu comment, pour toute fonction continue $y = f(x)$, le lien de dépendance, qui s'étend jusqu'à l'origine des accroissements Δy et Δx, se résout, à cette origine, en une loi générale de proportionnalité. Nous avons vu, en outre, que la seule distinction établie entre les fonctions linéaires et les fonctions non linéaires, consiste en ce que, pour les unes, il y a invariabilité absolue de la raison suivant laquelle commence la génération simultanée des accroissements, tandis que, pour les autres, cette même raison est incessamment variable. De là résulte la déduction suivante :

Les accroissements $\Delta(ax + b) = a\Delta x$, et $\Delta f(x) = \Delta x . \mathop{\mathrm{M}}_x^{x+\Delta x} f'(x)$, étant rapportés tous deux à une même origine, et tous deux répondant ensemble à une même variation continue de la quantité Δx, c'est suivant un même mode de composition successive que s'accomplit leur génération simultanée. La seule distinction consiste en ce que, pour l'un, l'élément représenté numériquement par a intervient constamment sans changer de grandeur, tandis que, pour l'autre, ce même élément passe par une suite non interrompue de déterminations transitoires, toutes variables avec x dans l'intervalle Δx, et exprimées par la valeur correspondante de la dérivée $f'(x)$, c'est-à-dire par le nombre $f'(x + \Delta x)$.

Le mode suivant lequel l'accroissement $\Delta(ax + b) = a\Delta x$, se compose avec les deux grandeurs a et Δx, est assez simple pour qu'on puisse aisément s'en former une image précise. Ce mode, appliqué à la génération continue de l'accroissement $\Delta f(x)$, reste identiquement le même, sauf substitution de la grandeur variable $f'(x + \Delta x)$ à la grandeur constante a.

Digitized by Google

Néanmoins, dans ce dernier cas, on éprouvera peut-être quelque difficulté à se le représenter nettement. Pour ne laisser sur ce point capital aucune obscurité, nous allons rendre, en quelque sorte, matériellement palpable le sens qui s'attache à l'énoncé précédent.



32. Soit AX une droite quelconque sur laquelle on mesure, à partir du point A, les diverses longueurs exprimées par x. Soit $AB = x_1$ l'une de ces longueurs prise pour origine de l'accroissement $BE = \Delta x$. Soit enfin MNO une courbe quelconque choisie comme on voudra.

Imaginons que la droite BL, perpendiculaire à AX, se transporte parallèlement à elle-même, et désignons par z une certaine portion de cette droite, mesurée à partir de la courbe MNO. Deux cas pourront se présenter, suivant que la portion z de la droite mobile BL conservera la même grandeur, ou, qu'au contraire, elle sera incessamment et continûment variable.

Dans le premier cas, l'on a, par hypothèse,

$$z = \text{const.} = a.$$

Si donc on prend $MM' = a$, il est clair que, dans le déplacement de la droite BL, l'extrémité supérieure de la portion z décrit la courbe M'N'O', qui n'est autre que la courbe MNO, transportée parallèlement à BL de M en M'. On voit de même (les premières notions de la géométrie élémentaire

Digitized by Google

suffisent pour l'établir), que l'aire engendrée par la portion z dans l'intervalle quelconque Δx, et représentée graphiquement par le quadrilatère mixtiligne MM'N'N, a pour mesure le produit $a.\Delta x$. Il suit de là que, pour un même intervalle quelconque Δx, il y a identité entre la génération continue de l'accroissement $\Delta(ax + b) = a.\Delta x$ et celle de l'aire engendrée par une droite mobile, dont la longueur et la direction demeurent invariables. On peut aussi en inférer que la génération continue de l'accroissement $\Delta f(x)$ ne diffère de la précédente, qu'en ce que la droite mobile change incessamment de grandeur, au lieu de persister dans une seule et même détermination. C'est, au reste, ce que nous allons établir rigoureusement, en examinant le cas où la longueur z est supposée continûment variable.

On a, alors,

$$z = \varphi(x),$$

et l'on peut prendre l'intervalle Δx assez petit pour que la fonction $\varphi(x)$ y demeure toujours croissante, ou toujours décroissante. Admettons que cette condition soit remplie, et que l'on ait, d'ailleurs,

$$\mathrm{MM}' = \varphi(x_1).$$

Il est visible que, dans le déplacement de la droite BL, l'extrémité supérieure de la portion z décrit une ligne M'N'', située tout entière au-dessus, ou tout entière au-dessous de la courbe M'N'. Quant à l'aire engendrée par cette même portion z de la droite BL, et représentée par le quadrilatère mixtiligne MM'N''N, on voit clairement qu'elle est nécessairement comprise entre celles qui, pour le même intervalle Δx, répondent aux deux hypothèses

$$z = \text{const} = \varphi(x_1)$$
$$z = \text{const} = \varphi(x_1 + \Delta x).$$

Or, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure, dans la première de ces deux hypothèses, l'aire engendrée aurait pour mesure

$$\Delta x.\ \varphi(x_1)$$

et dans la seconde

$$\Delta x.\ \varphi(x_1 + \Delta x).$$

Digitized by Google

Il est donc clair que, dans le cas où nous raisonnons, elle a pour expression numérique (μ étant une quantité comprise entre 0 et 1),

$$\Delta x\,[\varphi(x_1) + \mu(\varphi(x_1 + \Delta x) - \varphi(x_1))],$$

ou plus généralement, l'origine x_1 pouvant être changée sans qu'aucune des déductions précédentes cesse d'être applicable,

$$\Delta x\,[\varphi(x) + \mu(\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x))] = \Delta x\,[\varphi(x) + \mu\Delta\,\varphi(x)].$$

Cela posé, si nous désignons par y la fonction inconnue dont l'accroissement Δy, considéré dans sa génération continue, résulte du déplacement de la droite z, constante en direction et variable en grandeur, nous aurons

(16). . . . . $\Delta y = \Delta x.\,[\varphi(x) + \mu.\,\Delta\varphi(x)].$

Imaginons d'un autre côté que, disposant de la fonction arbitaire $\varphi(x)$, nous la prenions égale à la dérivée $f'(x)$, définie n° 22, et satisfaisant à la condition

(17). . . . . $\Delta f(x) = \Delta x\,[f'(x) + \eta];$

soustrayant, membre à membre, les équations (16) et (17) il vient

$$\frac{\Delta f(x) - \Delta y}{\Delta x} = \eta - \mu\Delta.\,\varphi(x).$$

Or, chacune des quantités η et $\mu\Delta\varphi(x)$ décroît indéfiniment à mesure que Δx converge vers zéro. Donc, en vertu du théorème exposé n° 16, l'on a nécessairement,

$$\Delta f(x) = \Delta y.$$

Il est ainsi démontré que, pour tout intervalle Δx où la fonction quelconque $y = f(x)$ demeure continue, la génération successive de l'accroissement $\Delta.f(x)$ peut être considérée comme s'identifiant avec celle de l'aire engendrée par une droite mobile, dont la direction demeure constante, et dont la grandeur, incessamment variable, est exprimée, pour chaque point de l'intervalle Δx, par la valeur correspondante de la dérivée $f'(x)$.

Digitized by Google

Cette représentation sensible du mode suivant lequel commence et s'accomplit la génération simultanée des accroissements Δy et Δx, n'est qu'une expression particulière et restreinte de la loi générale de proportionnalité établie ci-dessus. Toutefois elle peut être utile par le jour qu'elle jette sur quelques-unes des déductions qui précèdent et sur celles qui vont suivre.

33. Étant donné une fonction quelconque continue $y = f(x)$, désignons par a la valeur particulière que la dérivée $f'(x)$ affecte à l'origine des accroissements Δy, Δx, et considérons, en même temps, les deux générations simultanées qui répondent, la première, à l'hypothèse dans laquelle, pour toute l'étendue de l'intervalle Δx, la dérivée $f'(x)$ conserverait la valeur initiale a, la seconde, à la variation continue que cette même dérivée subit en réalité dans l'intervalle dont il s'agit.

Dans ces deux générations simultanées, tout est *transitoirement* identique, à l'instant précis où elles commencent, la génératrice BL affectant alors une position pour laquelle on a, par hypothèse, $z = f'(x_1) = a$. En effet, puisque, en général, ces deux générations ne se distinguent l'une de l'autre que par la substitution de la longueur variable $z = f'(x)$ à la longueur constante $z = a$, il est évident que toute différence s'efface et disparaît, là où ces deux grandeurs sont égales. On voit donc clairement que c'est dans des conditions absolument identiques que commence de part et d'autre la double génération simultanée que nous considérons. On voit aussi, relativement à la seconde génération, prise à son origine, et suivie dans son développement continu :

1° que le seul obstacle apporté à ce qu'elle reste toujours et partout identique à elle-même, réside dans la variation incessante de la grandeur $f'(x)$.

2° Que, si cette génération s'effectuait en subissant, *non plus transitoirement et seulement à l'origine* x_1, la condition particulière qui détermine en ce point la grandeur variable $z = f'(x)$, mais bien en persistant dans cette même condition *devenue permanente*, elle se confondrait entièrement avec la première, au lieu de se borner à *commencer* comme elle.

34. D'après ce qui précède nous sommes naturellement conduit à considérer d'une manière exclusive la seconde génération, et à distinguer en

Digitized by Google

elle le développement qu'elle subit en réalité, eu égard à la variabilité de la grandeur $f'(x)$, de celui qu'elle prendrait, à partir d'une origine quelconque x, si cette grandeur persistait dans la détermination qu'elle affecte à cette origine, ou, en d'autres termes, si la génération *continuait uniformément*, suivant le mode *transitoire* qui la régit *alors qu'elle commence.* Lorsqu'il s'agit du développement effectif qui se réalise, dans la génération complexe que nous étudions, l'on désigne par Δy l'accroissement de la fonction correspondant à un accroissement quelconque Δx. S'il s'agit, au contraire, du *développement hypothétique* qui se substituerait au premier, dans la supposition permise où nous raisonnions tout à l'heure, il est visible que l'accroissement de la fonction pris, dans cette hypothèse, pour un même intervalle quelconque Δx, ne peut plus être égal à Δy. On désigne cet accroissement particulier et distinct par le symbole dy, et l'on a, en conséquence,

$$dy = f'(x).\,\Delta x.$$

La caractéristique d, introduite dans cette équation, exprime à la fois deux conditions qu'il importe essentiellement de ne jamais perdre de vue. La première consiste en ce que la variable x, engagée dans la fonction $f'(x)$, doit être considérée comme persistant, pour toute l'étendue de l'intervalle Δx, dans la valeur qu'elle affecte à l'origine de cet intervalle. La seconde, en ce que cette valeur, *supposée constante*, étant exprimée par x_1, la quantité dy n'est autre chose que la *différence ordinaire* qui répond *à cette hypothèse*, c'est-à-dire l'accroissement de la fonction linéaire

$$x.f'(x_1) + b = ax + b.$$

On vient de voir comment l'accroissement dy constitue, par rapport à la fonction $y = f(x)$, un accroissement particulier essentiellement autre que l'accroissement effectif, représenté par Δy. Pour maintenir cette distinction importante, et en rappeler toujours la signification, il est nécessaire d'affecter à l'accroissement dy, considéré par rapport à la fonction non linéaire $y = f(x)$, une dénomination spéciale. Nous adopterons celle d'*accroissement différentiel*, ou, plus simplement encore, nous dirons, ainsi qu'on le fait

Digitized by Google

habituellement, que l'accroissement dy est *la différentielle* de cette même fonction, dont la quantité Δy est l'accroissement effectif ou la différence ordinaire.

En résumé, toute fonction continue, non linéaire, $y = f(x)$, fournit comme objets distincts de spéculation deux accroissements nettement définis, en général différents l'un de l'autre, et répondant tous deux à un même accroissement quelconque de la variable. L'un constitue l'accroissement effectif de la fonction : l'autre est la différentielle proprement dite. Au premier, l'on affecte la caractéristique Δ; au second, la caractéristique d. On a, d'ailleurs, et simultanément, les deux équations suivantes :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x . \mathrm{M}_{x}^{x+\Delta x} f'(x).$$

et

$$dy = f'(x) . \Delta x.$$

Dans la première de ces équations, on a égard aux valeurs successives que la dérivée $f'(x)$ affecte, en chacun des points de l'intervalle Δx, et l'on voit comment toutes ces valeurs concourent ensemble à la composition de l'accroissement effectif Δy. Dans la seconde, *on suppose au contraire* que, *pour toute l'étendue de l'intervalle* Δx, la dérivée $f'(x)$ conserve une seule et même valeur, celle qu'elle affecte à l'origine de cet intervalle. La différentielle dy se résout ainsi en une simple différence, *déterminée par cette hypothèse*, et répondant à la fonction linéaire.

$$x . f'(x_1) + b = ax + b.$$

35. Les démonstrations développées ci-dessus nous permettent de poser, dès à présent, les conclusions suivantes :

1° *Dans tout intervalle où la fonction non linéaire* $y = f(x)$ *demeure continue, et quel que soit le point pris pour origine commune des accroissements* Δy, Δx, *c'est, en général, suivant une certaine raison de proportionnalité, que* commence *la génération simultanée de ces accroissements.*

2° *Cette raison de proportionnalité varie continûment avec* x, *et elle est exprimée, en chaque point, par la valeur correspondante de la dérivée* $f'(x)$.

Digitized by Google

3° *Lorsque l'on considère la raison de proportionnalité, exprimée par* $f'(x)$, *comme affectant dans l'intervalle* Δx *toutes les déterminations successives qu'elle comporte, on a* la loi variée *qui régit le développement continu de la différence ordinaire* Δy.

On peut se placer à un point de vue différent et SUPPOSER *qu'au lieu de varier dans l'intervalle* Δx, *la raison dont il s'agit conserve, pour toute l'étendue de cet intervalle, une seule et même détermination, celle qu'elle y affecte à l'origine. En ce cas, on a* la loi uniforme *qui régit le développemeut de la différentielle* dy.

4° *A partir de toute origine commune, il y a identité absolue entre* le mode transitoire *suivant lequel* commence *la génération de l'accroissement effectif* Δy *et* le mode permanent *suivant lequel* s'accomplit *la génération de l'accroissement différentiel* dy.

36. Les principes que nous venons de formuler ont pour conséquences immédiates deux théorèmes fondamentaux, d'une grande importance, et si simples, d'ailleurs, qu'ils n'exigent aucune démonstration nouvelle.

On conçoit que le mode uniforme affecté par la différentielle, dans son développement continu, admette, suivant les cas, des énoncés divers. Cela posé, l'on a évidemment ce 1er théorème :

Quel que soit l'énoncé fourni comme traduction équivalente de l'équation

$$dy = f'(x) . \Delta x.$$

par cela seul que la condition exprimée a lieu d'une manière permanente et invariable *dans la génération de la différentielle, on peut affirmer, sans autre intermédiaire, qu'elle subsiste* transitoirement *à l'origine de l'accroissement effectif* Δy.

Vient ensuite cet autre théorème, qui n'est, au fond, que la réciproque du premier :

Soit y *une fonction inconnue de* x *à déterminer d'après les données suivantes :*

« On sait qu'une grandeur z incessamment variable et exprimée numé-
» riquement par $\varphi(x)$, intervient dans la génération continue de l'accrois-
» sement Δy.

» *Si,* au lieu de varier avec x dans l'intervalle Δx, la grandeur z *con-*
» *servait* la valeur quelconque a qu'elle affecte à l'origine de cet intervalle,

Digitized by Google

» (*toutes choses restant d'ailleurs les mêmes*), on sait que dans la génération
» continue, *correspondante à cette hypothèse*, on aurait en général

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Delta y = a.\ \Delta x.$$

Cela posé, pour tenir compte à la fois de ces deux données, il suffit d'écrire,

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad dy = \varphi(x).\ \Delta x.$$

De là résulte, pour le cas dont il s'agit en réalité,

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Delta y = \Delta x \ \mathrm{M}_{x}^{x+\Delta x} \varphi(x).$$

Il est visible en effet :

1° Que l'équation (3) se déduit immédiatement de l'équation (2);

2° Que l'équation (2) n'est autre chose que l'équation (1), écrite de façon à exprimer par elle seule comment elle a lieu, pour la suite des valeurs affectées par $\varphi(x)$, et dans quelle hypothèse, eu égard à la génération complexe que l'on a particulièrement en vue.

Nous n'insisterons point, pour le moment, sur l'importance des deux théorèmes que nous venons d'énoncer. Disons seulement qu'ils forment la base sur laquelle se fondent les diverses applications de l'analyse transcendante; que seuls ils en donnent la clef et permettent de les aborder toutes, par une voie toujours rationnelle, en même temps que simple et directe au plus haut degré.

37. Nous avons démontré qu'à partir de toute origine quelconque, c'est généralement suivant une certaine raison de proportionnalité que *commence* la génération simultanée des accroissements Δy, Δx. On peut donc dire que la génération de ces accroissements, pris à leur origine, est habituellement régie par une loi générale de proportionnalité, et comme nous l'avons déjà fait dans notre essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante, on peut désigner plus particulièrement cette loi générale sous le nom abstrait de *loi de génération*.

La loi de génération, telle que nous venons de la définir, est complétement dégagée de toute obscurité métaphysique. Nous croyons donc pouvoir reproduire sans crainte d'aucun malentendu l'énoncé suivant :

Digitized by Google

« Lorsqu'on fixe l'origine des accroissements, la loi de génération
» affecte une détermination particulière, et l'on peut d'ailleurs concevoir
» qu'elle persiste dans cette détermination. En ce cas, certains accroisse-
» ments résultent du développement continu de cette loi *supposée uniforme*,
» et pour un même intervalle Δx, ils diffèrent en général des accroisse-
» ments effectifs exprimés par Δy. De là résultent à la fois la *différentielle*
» et la *différence*. Toutes deux sont relatives à la fonction y.

» La *différentielle* est l'accroissement pris dans l'hypothèse où la loi de
» génération conserve une seule et même détermination particulière, celle
» qu'elle affecte à l'origine de l'intervalle Δx.

» La *différence* est l'accroissement effectif. Elle ne dépend pas seule-
» ment de l'expression particulière que la loi de génération affecte à l'ori-
» gine des accroissements. Elle dépend en outre des modifications
» continues que cette loi subit dans l'intervalle que l'on considère. »

38. Dans le cas des fonctions linéaires, *la loi de génération est uniforme.* C'est à raison de cette uniformité que, dans son développement continu, *elle admet comme traduction explicite et directe,* la relation algébrique qui s'établit entre l'accroissement de la fonction et l'accroissement de la variable.

Dans le cas des fonctions non linéaires, *la loi de génération est variée.* Quelle que soit l'étendue de l'intervalle Δx, les déterminations qu'elle y affecte subissent des modifications incessantes, et celles-ci ne cessent point d'intervenir, comme éléments complexes, dans la composition successive de l'accroissement Δy. De là vient que, passant par une suite infinie de déterminations *transitoires*, et ne *persistant jamais* dans aucune, elle se traduit par une équation aux différences où l'on n'aperçoit point, d'abord, une seule de ces déterminations qui se dégage entièrement de toutes les autres et se manifeste isolément. Toutefois, si l'on observe que le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable se compose essentiellement:

1° D'une partie constante qui répond au développement continu d'une loi de génération, *supposée uniforme,* et *déterminée* par la valeur que la dérivée affecte à l'origine des accroissements;

Digitized by Google

2° D'une partie variable qui décroît indéfiniment par rapport à la première, à mesure que l'intervalle Δx diminue :

L'on peut en conclure immédiatement,

1° Que cette partie variable ne convergerait pas vers zéro en même temps que Δx, si, à l'origine de cet accroissement, la loi de génération comportait une détermination transitoire autre qu'on l'a supposée tout à l'heure.

2° Qu'en conséquence, telle est effectivement la détermination affectée par cette loi à l'origine des accroissements.

De là résulte évidemment, et avec le sens que nous lui avons assigné n° 34, l'équation différentielle

$$dy = f'(x).\ \Delta x.$$

Il serait d'ailleurs facile d'en déduire toutes les conséquences précédemment établies n^{os} 35 et 36.

Sans nous arrêter plus longtemps à développer des principes que nous croyons avoir suffisamment éclaircis, nous laisserons au lecteur le soin de décider si la voie plus longue que nous avons suivie d'abord est ou non préférable à celle que nous venons d'indiquer.

CHAPITRE III.

—

APERÇU DES RESSOURCES OFFERTES EN ANALYSE ALGÉBRIQUE PAR L'ÉQUATION FONDAMENTALE

$$\text{Lim}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

Théorie des dérivées.

39. Étant donné une fonction quelconque, supposée continue, $y = f(x)$, on sait que la dérivée de cette fonction $y' = f'(x)$ se trouve complétement

Digitized by Google

définie par la relation symbolique

$$f'(x) = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

On sait en outre que de là résulte, comme équation fondamentale équivalente,

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x\,[f'(x) + \eta].$$

la dérivée $f'(x)$ étant une fonction généralement continue, et η une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx.

Cela posé, nous allons faire voir que les notions les plus élémentaires suffisent :

1° Pour établir directement la règle unique qui comprend, dans sa généralité, toutes les règles particulières de la dérivation;

2° Pour atteindre ensuite et, d'un seul coup, aux questions les plus élevées de l'analyse algébrique.

Règle unique et générale de la dérivation.

—

ÉNONCÉ.

40. Soient u et v deux fonctions de la variable x, u' et v' leurs dérivées respectives; soit $y = f(x)$ une troisième fonction de la même variable, liée aux deux premières par la relation

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad y = F(u, v).$$

Si l'on désigne par $F_u'(u, v)$ la dérivée de la fonction F, prise dans l'hypothèse où l'on considère u comme une simple variable, et v comme une constante, (la même signification, prise en sens inverse, s'attachant à

Digitized by Google

l'expression $F_v'(u, v)$), l'on a

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y' = f'(x) = u'F_u'(u, v) + v'F_v'(u, v).$$

DÉMONSTRATION.

L'équation (2) donne identiquement,

$$\Delta y = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v) + F(u + \Delta u, v) - F(u, v).$$

On a d'ailleurs, en vertu de l'équation (1),

$$1^\circ \ \Delta u = \Delta x . [u' + \gamma]$$
$$2^\circ \ \Delta v = \Delta x . [v' + \delta]$$
$$3^\circ \ F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v) = \Delta v . [F_v'(u + \Delta u, v) + \alpha]$$
$$4^\circ \ F(u + \Delta u, v) - F(u, v) = \Delta u . [F_u'(u, v) + \beta]$$
$$5^\circ \ F_v'(u + \Delta u, v) = F_v'(u, v) + K\Delta u.$$

De la résulte, par voie de simple substitution,

$$\Delta y = \Delta x [(v' + \delta)(F_v'(u, v) + K\Delta u + \alpha) + (u' + \gamma)(F_u'(u, v) + \beta)];$$

et puisque chacune des quantités α, β, γ, δ, Δu, converge vers zéro en même temps que Δx, l'on en conclut immédiatement

$$y' = f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'F_u'(u, v) + v'F_v'(u, v). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Règles particulières impliquées par la règle unique et générale exposée ci-dessus.

41. I^re^ règle. — *La dérivée d'une fonction de fonction s'obtient en prenant la dérivée de la fonction principale, par rapport à la fonction secondaire, considérée comme simple variable, et en multipliant cette dérivée par celle de la fonction secondaire.*

Cette règle résulte immédiatement des équations (2) et (3), lorsqu'on y suppose v constant.

Digitized by Google

2^{me} règle. — *La dérivée d'une fonction complexe est la somme des dérivées qu'on obtient en distinguant, dans la fonction, les éléments variables qui la constituent et en opérant tour à tour pour chaque élément distinct, comme s'il restait seul variable tandis que tous les autres sont supposés constants.*

Cette règle n'est, eu égard à la précédente, que la traduction littérale de l'équation (3).

3^{me} règle. — *La dérivée d'une somme est la somme des dérivées de chaque terme.*

4^{me} règle. — *La dérivée d'un produit est la somme des résultats qu'on obtient en substituant successivement à chaque facteur sa propre dérivée.*

Les règles (3) et (4) ne sont évidemment que des formes particulières de la règle (2).

5^{me} règle. — *La dérivée d'une puissance s'obtient en diminuant l'exposant d'une unité et en introduisant comme facteurs, d'une part l'exposant primitif, d'autre part la dérivée de la quantité soumise à l'exposant.*

En appliquant la règle (4) à la dérivation de la fonction $y=x^{\frac{p}{q}}$, où p et q sont des nombres entiers, positifs, et où par conséquent l'on peut distinguer p facteurs tous égaux à $x^{\frac{1}{q}}=z$, l'on déduit, sans autre intermédiaire,

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad y' = px^{\frac{p-1}{q}}.z',$$

Pour déterminer z' supposons p égal à q. En ce cas $y'=1$: il vient donc,

$$z' = \frac{1}{q}\cdot\ x^{\frac{1}{q}-1}$$

cette valeur, substituée dans l'équation (4), donne, en général,

$$(5)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad y' = \frac{p}{q}\cdot\ x^{\frac{p}{q}-1}$$

Soit, maintenant, $u=x^{-\frac{p}{q}}$. Le produit $x^{\frac{p}{q}}\cdot\ x^{-\frac{p}{q}}$ étant égal à 1, sa dérivée est nulle. On a donc en vertu de la règle (2)

$$u'x^{\frac{p}{q}} + y'x^{-\frac{p}{q}} = o;$$

Digitized by Google

et substituant a y' sa valeur tirée de l'équation (5)

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u' = -\frac{p}{q} \cdot x^{-\frac{p}{q}-1}.$$

Les égalités (5) et (6) prouvent que, quel que soit l'exposant m, entier ou fractionnaire, positif ou négatif, l'on a constamment

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \lim \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = mx^{m-1}.$$

Si, d'ailleurs, on observe que le rapport $\frac{(x+h)^m - x^m}{h}$ varie continûment avec m, l'on peut en conclure que l'équation (7) ne cesse pas de subsister pour le cas où m est irrationnel. De là résulte, eu égard à la règle (1), la règle (5) énoncée ci-dessus.

Emploi des dérivées dans l'analyse algébrique.

42. A l'aide des règles que nous venons d'établir, l'on peut démontrer en quelques lignes et avec une extrême simplicité :

1° Le binôme de Newton, pour le cas de l'exposant entier et positif;

2° La formule de Taylor et celle de Maclaurin, présentées toutes deux comme des conséquences immédiates du binôme de Newton.

Nous renvoyons pour ces détails à une note insérée dans le tome XIII des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique.* Toutefois, nous montrerons ici comment on peut parvenir d'un seul coup, d'une manière complète et avec une entière rigueur, à l'établissement d'une formule générale qui comprend, comme cas particuliers, toutes celles que nous rappelions tout à l'heure.

Commençons par établir un théorème dont nous avons déjà signalé l'importance et qui nous paraît susceptible d'applications nombreuses. L'usage restreint que nous ferons de ce théorème suffira, pensons-nous, pour montrer qu'il peut servir de fondement à une *théorie générale des moyennes arithmétiques transcendantes*, théorie purement rationnelle, entièrement dégagée de toute obscurité métaphysique, et féconde en ressources nouvelles.

Digitized by Google

Théorème relatif à la valeur moyenne de la dérivée.

—

ÉNONCÉ.

43. *L'accroissement de la fonction est égal au produit de l'accroissement de la variable par la valeur moyenne de la fonction dérivée.*

DÉMONSTRATION.

Reprenons l'équation fondamentale,

$$\Delta y = \Delta x \, [f'(x) + \eta],$$

et concevons l'intervalle Δx divisé en m parties égales. A chacune des subdivisions, ainsi obtenues, correspond un accroissement de la fonction, et cet accroissement est déterminé par les valeurs particulières que les quantités $f'(x)$ et η affectent à son origine. L'on a ainsi, en posant $h = \frac{\Delta x}{m}$,

$$(8) \ldots \ldots \left\{ \begin{array}{l} \Delta y_1 = h \, [f'(x) + \eta_1] \\ \Delta y_2 = h \, [f'(x+h) + \eta_2] \\ \Delta y_3 = h \, [f'(x+2h) + \eta_3] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta y_m = h \, [f'(x+(m-1)h) + \eta_m]. \end{array} \right.$$

Or, la somme des différences Δy_1, Δy_2, etc., Δy_m est nécessairement égale à la différence totale Δy. Il vient donc, en ajoutant membre à membre les équations (8),

$$(9) \quad . \quad \Delta y = \Delta x \left(\frac{f'(x) + f'(x+h) + f'(x+2h) + \text{etc.} + f'(x+(m-1)h)}{m} + \frac{\eta_1 + \eta_2 + \text{etc.} + \eta_m}{m} \right).$$

Supposons d'abord que la dérivée demeure continue dans l'intervalle Δx, et imaginons en même temps qu'on attribue à m des valeurs de plus en plus grandes; chacune des quantités η_1, η_2, etc., devenant ainsi de plus

Digitized by Google

en plus petite, il est visible que la moyenne arithmétique

$$\frac{f'(x) + f'(x+h) + \text{etc.} + f'(x+(m-1)h)}{m}$$

convergera vers une certaine limite déterminée. Nous désignons cette limite sous le nom de *valeur moyenne de la dérivée*, et nous employons pour l'exprimer la notation suivante :

$$\mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x).$$

De là résulte

$$(10). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{f'(x) + f'(x+h) + \text{etc.} + f'(x+(m-1)h)}{m} = \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x) + \xi,$$

ξ étant une quantité qui converge vers zéro, à mesure que m croît indéfiniment.

Eu égard à l'équation (10), l'équation (9) devient

$$(11). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta y - \Delta x.\,\mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x) = \Delta x\left[\xi + \frac{\eta_1 + \eta_2 + \ldots \eta_m}{m}\right].$$

Le premier membre de l'équation (11) est la différence de deux termes qui demeurent constants, quel que soit m. Il faut donc que le second membre de cette équation soit lui-même constant ou nul. Or, il ne peut être constant, puisqu'il se compose de deux termes dont chacun devient aussi petit qu'on veut, à mesure qu'on attribue à m des valeurs de plus en plus grandes. Donc il est nul, et l'on a, par conséquent,

$$(12). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta y = \Delta x.\,\mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Montrons, par un exemple, l'usage qu'on peut faire de l'équation (12). Soit $y = x^{n+1}$ et par suite $y' = (n+1)\,x^n$. L'équation (12) donne

$$x^{n+1} = x\mathrm{M}_0^x\,(n+1)\,x^n.$$

Il vient donc

$$\mathrm{M}_0^x\,x^n = \frac{x^n}{n+1}.$$

Digitized by Google

On pourrait croire que l'équation (12) est restreinte au cas où la dérivée demeure continue dans l'intervalle Δx : *ce serait une erreur*. Pour que l'équation (12) subsiste, *il faut* et *il suffit* que la fonction soit continue dans l'intervalle que l'on considère. Cette extension de la démonstration que précède se fait très-simplement. L'ayant donnée ailleurs [1], il nous suffit de l'indiquer ici.

Relations générales existant entre les valeurs moyennes des dérivées successives d'une même fonction.

44. Soient $f(x), f'(x), f''(x)$, etc., une suite de termes déduits les uns des autres par des dérivations successives, et tous supposés continus entre les limites x et $x + \Delta x = z$.

z étant quelconque, mais constant, considérons la fonction

$$\varphi(x) = (z - x) f'(x). \tag{13}$$

Il est visible qu'elle a pour dérivée,

$$\varphi'(x) = (z - x) f''(x) - f'(x).$$

On a donc, en vertu du théorème qui précède,

$$\varphi(z) - \varphi(x) = (z - x)\, \mathrm{M}_x^z [(z - x) f''(x) - f'(x)];$$

d'où, substituant à $\varphi(z)$ et à $\varphi(x)$ leurs valeurs déduites de l'équation (13), et réduisant,

$$\mathrm{M}_x^z f'(x) = f'(x) + \mathrm{M}_x^z (z - x) f''(x). \tag{14}$$

La formule (14), lorsqu'on y remplace $f'(x)$ par le produit $(z - x)^{n-1} f^n(x)$, donne d'abord

$$\mathrm{M}_x^z (z - x)^{n-1} f^n(x) = (z - x)^{n-1} f^n(x)$$
$$+ \mathrm{M}_x^z (z - x) [(z - x)^{n-1} f^{n+1}(x) - (n-1)(z - x)^{n-2} f^n(x)],$$

[1] Voir notre *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante.*

Digitized by Google

et, après réduction,

$$(15).\ \ldots\ \mathrm{M}_x^z (z-x)^{n-1} f^n(x) = \frac{1}{n}(z-x)^{n-1} f^n(x) + \frac{1}{n}\mathrm{M}_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x).$$

De là résulte, en attribuant à n les valeurs successives, 1, 2, 3, 4, etc., n,

$$\mathrm{M}_x^z f'(x) = f'(x) + \mathrm{M}_x^z (z-x) f''(x)$$

$$\mathrm{M}_x^z (z-x) f''(x) = \frac{z-x}{2} f''(x) + \tfrac{1}{2}\mathrm{M}_x^z (z-x)^2 f'''(x),$$

$$\mathrm{M}_x^z (z-x)^2 f'''(x) = \frac{(z-x)^2}{3} f'''(x) + \tfrac{1}{3}\mathrm{M}_x^z (z-x)^3 f^{\mathrm{iv}}(x),$$

. . . .

et par conséquent

$$(16).\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}\mathrm{M}_x^z f'(x) = f'(x) + \frac{z-x}{2} f''(x) + \frac{(z-x)^2}{2.3} f'''(x) + \text{etc.}\\ + \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots n} f^n(x) + \frac{1}{1.2\ldots n}\mathrm{M}_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x).\end{aligned}\right.$$

44$^{\text{bis}}$. En substituant dans l'équation 12 la valeur de la moyenne $\mathrm{M}_x^z f'(x)$ déduite de l'équation (14), l'on trouve

$$\Delta y = \Delta x\,[f'(x) + \mathrm{M}_x^z (z-x) f''(x)].$$

Si l'on compare cette dernière formule à l'équation fondamentale,

$$\Delta y = \Delta x\,[f'(x) + \eta],$$

on reconnaît que la fonction inconnue, désignée jusqu'ici par η, se trouve complétement déterminée pour tout intervalle où la dérivée $f'(x)$ demeure continue. La relation très-simple et purement algébrique

$$\eta = \mathrm{M}_x^z (z-x) f''(x)$$

Digitized by Google

peut être considérée comme complétant d'une façon très-satisfaisante l'étude analytique que nous avons faite, concernant la composition de la différence ordinaire

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Théorème fondamental relatif au développement des fonctions.

ÉNONCÉ.

45. *La fonction quelconque $y = f(x)$ et ses dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$ etc., $f^n(x)$, étant supposées continues entre les limites x et $x + \Delta x = z$, l'on a identiquement :*

$$(17).\quad f(z) = f(x) + \frac{z-x}{1} f'(x) + \text{etc.} + \frac{(z-x)^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + \frac{z-x}{1.2\ldots n} \mathrm{M}_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x).$$

DÉMONSTRATION.

Nous avons établi ci-dessus que l'on a, d'une part,

$$\Delta y = \Delta x.\ \mathrm{M}_x^z f'(x),$$

et, d'autre part,

$$\mathrm{M}_x^z f'(x) = f'(x) + \frac{z-x}{2} f''(x) + \text{etc.} + \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots n} f^n(x) + \frac{1}{1.2\ldots n} \mathrm{M}_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x).$$

De là résulte, en substituant, et observant que Δx peut être remplacé par $z - x$, Δy par $f(z) - f(x)$,

$$f(z) = f(x) + \frac{z-x}{1} f'(x) + \text{etc.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

APPLICATIONS GÉNÉRALES.

46. La formule que nous venons d'établir comprend, comme cas particuliers, les suites de Taylor et de Maclaurin. Comparée à ces suites,

Digitized by Google

elle offre l'avantage de les reproduire, *sous forme d'identité*, sans jamais laisser rien d'indécis, ni dans l'extension qu'elles comportent, ni dans l'expression du reste qui les complète.

Pour obtenir la série de Taylor, ainsi complétée, il suffit de remplacer z par $x + h$, ce qui donne :

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\text{etc.}+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x)+\frac{h}{1.2\ldots n}\mathrm{M}_x^z(z-x)^n f^{n+1}(x).$$

S'il s'agissait de la série de Maclaurin, on ferait $x = o$, et l'on aurait de même :

$$f(z)=f(o)+\frac{z}{1}f'(o)+\frac{z^2}{1.2}f''(o)+\text{etc.}+\frac{z^n}{1.2\ldots n}f^n(o)+\frac{z}{1.2\ldots n}\mathrm{M}_o^z(z-x)^n f^{n+1}(x).$$

REMARQUES PARTICULIÈRES.

47. Lorsque la dérivée de l'ordre $(n + 1)$ est constante, les dérivées suivantes sont toutes nulles. On peut alors écrire le dernier terme de l'équation (17), soit en lui conservant sa forme primitive

$$\frac{z-x}{1.2\ldots n}\mathrm{M}_x^z(z-x)^n f^{n+1}(x),$$

soit en lui attribuant celle qui résulte de la loi de formation des termes antérieurs

$$\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\cdot f^{n+1}(x).$$

Égalant ces deux expressions, dont la forme seule peut être différente, observant que, par hypothèse, la dérivée $f^{n+1}(x)$ est indépendante de x, et supprimant les facteurs communs, il vient

$$\mathrm{M}_x^z(z-x)^n=\frac{(z-x)^n}{n+1}.$$

Ce résultat n'est autre que celui auquel nous étions déjà parvenus directement n° (43).

Digitized by Google

48. Nous avons vu que l'équation fondamentale

$$\Delta y = (f'(x) + \eta)\ \Delta x,$$

a pour expression correspondante

$$\Delta y = \Delta x.\ \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x),$$

ou bien encore

$$\Delta y = \Delta x\ [f'(x) + \mathrm{M}_x^z\ (z-x)\ f''(x)].$$

Il est une troisième forme sous laquelle on peut la présenter. Cette forme est la suivante :

$$\Delta y = \Delta x\ f'(x + \theta\Delta x).$$

Eu égard à cette dernière forme, on peut se proposer de déterminer sinon la valeur de θ, du moins la limite vers laquelle cette valeur converge à mesure que Δx décroît indéfiniment. Une pareille recherche est sans doute plus curieuse qu'utile. Toutefois nous en dirons quelques mots, ne fût-ce que pour signaler à cette occasion un exemple singulier de discontinuité.

Reprenons l'équation (17), et remplaçons, comme tout à l'heure, $z - x$ par Δx, et $f(z) - f(x)$ par Δy. Il vient ainsi,

$$(18).\quad \Delta y = \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{1.2} f''(x) + \text{etc.} + \frac{\Delta x^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + \frac{\Delta x}{1.2\ldots n} \mathrm{M}_x^z\,(z-x)^n f^{n+1}(x);$$

on a, d'ailleurs,

$$\Delta y = \Delta x\ \mathrm{M}_x^z\ f'(x).$$

Par hypothèse, la dérivée $f'(x)$ demeure continue dans l'intervalle Δx. Sa valeur moyenne est donc une des valeurs qu'elle affecte dans cet intervalle, et l'on peut écrire

$$\mathrm{M}_x^z\ f'(x) = f'(x + \theta\Delta x),$$

θ étant une fraction. De là résulte, d'abord,

$$\Delta y = \Delta x\ f'(x + \theta.\Delta x),$$

Digitized by Google

puis développant, suivant la formule (18), la fonction $f'(x+\theta\Delta x)$ et substituant,

$$(19)\ \ldots \left\{ \begin{aligned} \Delta y = \Delta x\, f'(x) + \frac{\theta\Delta x^2}{1} f''(x) + \text{etc.} + \frac{\theta^{n-1}\Delta x^n}{1.2\ldots(n-1)} f^n(x) \\ + \frac{\theta\Delta x^2}{1.2\ldots(n-1)} \mathrm{M}_x^{z'} (z'-x)^{n-1} f^{n+1}(x). \end{aligned} \right.$$

On observera que l'on a ici $z' = x + \theta\Delta x$.

Imaginons maintenant que, pour une valeur particulière attribuée à la variable x, les dérivées successives s'annulent toutes à la fois, à partir de la seconde ou de la première, jusques et y compris la $n^{ième}$.

En comparant les identités (18) et (19), il vient alors

$$(20)\ \ldots\ldots \quad n\theta\Delta x\, \mathrm{M}_x^{z'} (z'-x)^{n-1} f^{n+1}(x) = \mathrm{M}_x^{z} (z-x)^n f^{n+1}(x).$$

On peut d'ailleurs supposer l'intervalle Δx assez petit pour que la dérivée $f^{n+1}(x)$ soit toujours croissante ou toujours décroissante dans cet intervalle. Mais en ce cas, l'on a évidemment, d'une part,

$$\mathrm{M}_x^{z} (z-x)^n f^{n+1}(x) = f^{n+1}(x). \mathrm{M}_x^{z} (z-x)^n + \mu. [f^{n+1}(x+\Delta x) - f^{n+1}] \mathrm{M}_x^{z} (z-x^n),$$

et, d'autre part,

$$\mathrm{M}_x^{z'} (z'-x)^{n-1} f^{n+1}(x) = f^{n+1}(x) \mathrm{M}_x^{z'} (z'-x)^{n-1} + \mu'. [f^{n+1}(x+\Delta x) - f^{n+1}(x)] \mathrm{M}_x^{z'} (z'-x)^{n-1},$$

μ et μ' étant des fractions. On peut donc écrire en premier lieu

$$\mathrm{M}_x^{z} (z-x)^n \quad f^{n+1}(x) = [f^{n+1}(x) + \xi]\, \mathrm{M}_x^{z} (z-x)^n,$$

et en second lieu

$$\mathrm{M}_x^{z'} (z'-x)^{n-1} f^{n+1}(x) = [f^{n+1}(x) + \xi']\, \mathrm{M}_x^{z'} (z'-x)^{n-1},$$

ξ et ξ' étant des quantités qui convergent vers zéro en même temps que Δx.

L'équation (20), lorsqu'on y substitue ces dernières valeurs, devient

$$n\theta\Delta x. [f^{n+1}(x) + \xi']\, \mathrm{M}_x^{z'} (z'-x)^{n-1} = [f^{n+1}(x) + \xi]\, \mathrm{M}_x^{z} (z-x)^n.$$

Digitized by Google

D'un autre côté, l'on a, conformément au résultat établi n° 43 ou n° 47,

$$\mathrm{M}_x^z (z-x)^n = \frac{\Delta x^n}{n+1}, \quad \mathrm{M}_x^{z'} (z'-x)^{n-1} = \frac{\theta^{n-1}\Delta x^{n-1}}{n}.$$

Il vient donc, enfin,

$$\theta^n \, [f^{n+1}(x) + \xi'] = \frac{1}{n+1}\,[f^{n+1}(x) + \xi].$$

De là résulte, en passant à la limite, pour le cas où la dérivée $f^{n+1}(x)$ n'est point nulle,

$$\lim \theta^n = \frac{1}{n+1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lim \theta = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$$

On voit ainsi que, lorsque la dérivée du second ordre ne s'évanouit pas, *si petite que soit d'ailleurs la valeur qu'elle affecte,* θ a pour limite constante la fraction $\frac{1}{2}$. Dès que, au contraire, cette dérivée s'annule, la limite de θ change brusquement et elle devient $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, ou plus généralement $\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$, n étant l'ordre de la dernière des dérivées qui s'annulent successivement à partir de la seconde ou de la première. Ces permanences et ces changements brusques des diverses limites assignées à θ, suivant le nombre des dérivées successives qui s'évanouissent pour une même valeur attribuée à la variable, présentent un résultat dont la singularité frappe au premier abord. Toutefois, l'on peut s'en rendre compte, en observant que si la dérivée $f^{n+1}(x)$, *supposée variable avec* x, se réduisait à une constante (les quantités ξ et ξ' s'évanouissant), l'on aurait pour toute l'étendue de l'intervalle Δx

$$\theta^n = \frac{1}{n+1}.$$

Digitized by Google

DIFFÉRENCES DES ORDRES SUPÉRIEURS ET MOYENNES MULTIPLES.

—

49. Soit

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

l'on a d'abord, en prenant la différence des deux membres,

(21). . . $\Delta^2 y = \Delta [f(x + \Delta x) - f(x)] = \Delta x \, \mathrm{M}_x^z [f'(x + \Delta x) - f'(x)] = \Delta x \, \mathrm{M}_x^z \, \Delta f'(x).$

Si, d'ailleurs on écrit:

(22) . . . . $\Delta y = \Delta x \, \mathrm{M}_x^z f'(x),$

on a de même

(23) . . . . $\Delta^2 y = \Delta x . \, \Delta \left[\mathrm{M}_x^z f'(x)\right].$

La comparaison des équations (21) et (23) donne

(24). . . . . . . $\Delta \left[\mathrm{M}_x^z f'(x)\right] = \mathrm{M}_x^z \, \Delta f'(x),$

et de là résulte le théorème suivant:

La différence de la valeur moyenne d'une fonction est égale à la valeur moyenne de la différence de cette même fonction.

L'équation (21), lorsqu'on y remplace $\Delta f'(x)$ par sa valeur $\Delta x \, \mathrm{M}_x^z f''(x)$, devient

$$\Delta^2 y = \Delta x^2 \, \mathrm{M}_x^z \mathrm{M}_x^z f''(x),$$

et l'on en déduit, conformément à ce qui précède,

$$\Delta^3 y = \Delta x^2 \, \mathrm{M}_x^z \mathrm{M}_x^z \, \Delta f''(x) = \Delta x^3 \, \mathrm{M}_x^z \mathrm{M}_x^z \mathrm{M}_x^z f'''(x).$$

Convenons de désigner par les notations $\overset{2}{\mathrm{M}}$, $\overset{3}{\mathrm{M}}$, etc., les *moyennes multiples* M (M.); M [M (M)], etc.; il est visible que nous aurons en général

(25). . . . . $\Delta^n y = \Delta x^n . \, \overset{n}{\mathrm{M}}{}_x^z f^n(x).$

Digitized by Google

Cette relation très-simple peut s'énoncer comme il suit :

La différence de l'ordre n d'une fonction est égale au produit de la puissance n de l'accroissement de la variable par la moyenne multiple $\overset{n}{M}$ *de la dérivée du même ordre.*

Lorsque la dérivée de l'ordre n, $f^n(x)$, est une quantité constante, l'on a évidemment

$$\overset{1}{M} f^n(x) = \overset{2}{M} (f^n(x) = \overset{n}{M} f^n(x) = f^n(x) = C;$$

et, par suite,

$$(26) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Delta^n y = C.\Delta x^n.$$

En général, $f^n(x)$ est une quantité variable. Néanmoins, il est aisé de voir que l'équation (25) est réductible à la forme

$$(27) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Delta^n y = \Delta x^n \, [f^n(x) + \xi].$$

ξ étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx.

Veut-on déterminer directement la valeur de la quantité

$$\xi = \overset{n}{M} f^n(x) - f^n(x),$$

l'on a, d'abord,

$$\Delta y = \Delta x \, [f'(x) + M_x^z (z-x) \, f''(x)].$$

De la résulte, en observant, qu'eu égard à l'équivalence

$$M_x^z (z-x) \, f''(x) = \lim \frac{1}{m} \Big[\Delta x.f''(x) + \frac{m-1}{m} \Delta x f''\left(x + \frac{\Delta x}{m}\right) + \text{etc.} + \frac{\Delta x}{m} f''\left(x + \frac{m-1}{m} \Delta x\right)\Big],$$

le facteur $z-x$ doit être considéré comme constant, dans l'opération indiquée par le symbole $\Delta(z-x) \, f''(x)$,

$$\Delta^2 y = [\Delta x \, \Delta f'(x) + M_x^z (z-x) \, \Delta f''(x)] = \Delta x^2 \, [f''(x) + M_x^z (z-x) [f'''(x) + M f'''(x)]].$$

On trouverait de même,

$$\Delta^3 y = \Delta x^3 \, [f'''(x) + M_x^z (z-x) \, (f^{\text{IV}}(x) + M_x^z f^{\text{IV}}(x) + \overset{2}{M} f^{\text{IV}}(x))],$$

Digitized by Google

et généralement

$$(28). \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^n y = \Delta x^n \Big[f^n(x) + \mathop{\mathrm{M}}_x^z (z-x) \big(f^{n+1}(x) + \mathop{\mathrm{M}}_x^z f^{n+1}(x) \\ + \overset{2}{\mathop{\mathrm{M}}}{}_x^z f^{n+1}(x) + \text{etc.} + \overset{n-1}{\mathop{\mathrm{M}}}{}_x^z f^{n+1}(x) \big) \Big]. \end{aligned} \right.$$

L'équation (28), comparée à l'équation (27) donne

$$\xi = \mathop{\mathrm{M}}_x^z (z-x) \left[f^{n+1}(x) + \mathop{\mathrm{M}}_x^z f^{n+1}(x) + \overset{2}{\mathop{\mathrm{M}}}{}_x^z f^{n+1}(x) + \text{etc.} + \overset{n-1}{\mathop{\mathrm{M}}}{}_x^z f^{n+1}(x) \right].$$

On voit ainsi que tout se trouve complétement déterminé dans l'expression générale qui fait dépendre la différence $\Delta^n y$ de la dérivée du même ordre $f^n(x)$.

Dans le cas particulier où la dérivée de l'ordre $(n+1)\, f^{n+1}(x)$ se résout en une constante, l'on a,

$$\xi = n\, f^{n+1}(x)\, \mathop{\mathrm{M}}_x^z (z-x) = \frac{n\Delta x}{2} f^{n+1}(x),$$

et par conséquent

$$\Delta^n y = \Delta x^n \, f^n(x) + \frac{n\Delta x}{2} f^{n+1}(x)].$$

Extension générale de la formule

$$\Delta y = f'(x)\Delta x. + f''(x)\frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{etc.}$$

50. Nous venons de montrer comment les différences des ordres supérieurs sont liées aux moyennes multiples. Il existe également des relations très-simples entre ces différences et les moyennes du premier ordre. Nous en dirons quelques mots.

Reprenons l'identité du n° 45, et écrivons-la sous la forme suivante:

$$(29) \quad . \quad f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\, f'(x) + \text{etc.} + \frac{\Delta x^p}{1.2\ldots p} f^p(x) + \frac{\Delta x}{1.2\ldots p} \mathop{\mathrm{M}}_x^{x+\Delta x} (z-x)^p f^{p+1}(x).$$

D'après la loi de composition des différences ordinaires, il est facile d'éta-

Digitized by Google

blir cette autre identité :

$$(30)\ldots\ \left\{\begin{array}{l}\Delta^n y = f(x+n\Delta x) - \frac{n}{1} f[x+(n-1)\Delta x] + \text{etc.}\\ \pm \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m} f[x+(n-m)\Delta x] \mp \text{etc.} \pm f(x).\end{array}\right.$$

Cela posé, développons chacun des termes de la différence $\Delta^n y$ d'après la formule (29), et servons-nous de la notation $\binom{q}{n}$ pour représenter l'expression complexe

$$\frac{1}{1.2\ldots q}\left(n^q - \frac{n}{1}(n-1)^q + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^q - \text{etc.} \pm n\right);$$

nous trouverons ainsi,

$$(31)\ldots\ \Delta^n y = \left\{\begin{array}{l}\left\{{1 \atop n}\right\}\Delta x\, f'(x) + \left\{{2 \atop n}\right\}\Delta x^2 f''(x) + \text{etc.} + \left\{{p \atop n}\right\}\Delta x^p\, f^p(x)\\ + \frac{\Delta x}{1.2\ldots p}\left(n \mathop{\mathbf{M}}_x^{x+n\Delta x}(z-x)^p f^{p+1}(x) - \frac{n}{1}(n-1)\mathop{\mathbf{M}}_x^{x+(n-1)\Delta x}(z-x)^p f^{p+1}(x) + \text{etc.}\right.\\ \left.\mp \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}(n-m)\mathop{\mathbf{M}}_x^{x+(n-m)\Delta x}(z-x)^p f^{p+1}(x) \pm \text{etc.}\right).\end{array}\right.$$

La quantité z variant d'une moyenne à l'autre et affectant pour chacune la valeur constante exprimée par l'indice supérieur.

Considérons d'abord le cas d'une fonction algébrique rationnelle et entière, soit, par exemple, $y = x^p$. On a alors $f^p(x) = \text{cons}^{\text{te}} = 1.2\ldots p$ et les dérivées suivantes sont toutes nulles. L'équation (31) se réduit en conséquence à

$$(32)\ldots\ \Delta^n y = \left\{{1 \atop n}\right\}\Delta x.\, f'(x) + \left\{{2 \atop n}\right\}\Delta x^2 f''(x) + \text{etc.} + \left\{{p \atop n}\right\}\Delta x^p f^p(x).$$

On a d'ailleurs, conformément au principe établi n° 49,

$$(33)\ldots\ \Delta^p y = \Delta x^p\, f^p(x),$$

et pour toute valeur de n supérieure à p

$$(34)\ldots\ \Delta^n y = o.$$

La comparaison des équations (32) et (34) prouve que, pour toute

Digitized by Google

valeur de p inférieure à n, l'on a nécessairement

$$\left\{ {p \atop n} \right\} = o.$$

Il suit de là, et eu égard à l'équation (33), que l'hypothèse $p = n$, donne en général

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = 1.$$

Revenant au cas général, et tenant compte des résultats précédents, il est visible que l'équation (31) peut se simplifier et s'écrire de diverses manières selon qu'on prend p inférieur, égal ou supérieur à n.

Pour plus de facilité représentons par

$$\sum_{m=o}^{m=n-1} (-1)^m \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m} (n-m) \mathbf{M}_x^{x+(n-m)\Delta x} (z-x)^p f^{p+1}(x).$$

L'expression sommatoire et limitée

$$n \mathbf{M}_x^{x+n\Delta x} (z-x)^p f^{p+1}(x) - \frac{n}{1}(n-1) \mathbf{M}_x^{x+(n-1)\Delta x} (z-x)^p f^{p+1}(x) + \text{etc.}$$
$$\mp \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m} (n-m) \mathbf{M}_x^{x+(n-m)\Delta x} (z-x)^p f^{p+1}(x) \pm \text{etc.};$$

nous aurons ainsi:

dans le premier cas, c'est-à-dire lorsque p reste moindre que n,

$$(35) \quad \ldots \quad \Delta^n y = \frac{\Delta x}{1.2\ldots p} \sum_{m=o}^{m=n-1} (-1)^m \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m} (n-m) \mathbf{M}_x^{x+(n-m)\Delta x} (z-x)^p f^{p+1}(x),$$

dans le second cas, c'est-à-dire lorsque l'on prend p égal à n

$$(36).\ \Delta^n y = \Delta x^n f^n(x) + \frac{\Delta x}{1.2\ldots n} \sum_{m=o}^{m=n-1} (-1)^m \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m} (n-m) \mathbf{M}_x^{x+(n-m)\Delta x} (z-x)^n f^{n+1}(x),$$

dans le dernier cas, c'est-à-dire lorsqu'on attribue à p une valeur plus grande que n,

$$(37). \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^n y = \left\{ {n \atop n} \right\} \Delta x^n f^n(x) + \left\{ {n+1 \atop n} \right\} \Delta x^{n+1} f^{n+1}(x) + \text{etc.} + \left\{ {p \atop n} \right\} \Delta x^p f^p(x) \\ + \dfrac{\Delta x}{1.2\ldots p} \displaystyle\sum_{m=o}^{m=n-1} (-1)^m \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m} (n-m) \mathbf{M}_x^{x+(n-m)\Delta x} (z-x)^p f^{p+1}(x). \end{array} \right.$$

Digitized by Google

51. Les formules (35), (36) et (37) prises isolément ou combinées soit entre elles, soit avec la formule (28) du n° 49, permettraient d'en établir un grand nombre d'autres. Nous nous bornerons à en indiquer deux.

La formule (35) subsistant pour toute valeur de p inférieure à n, il est visible que, *dans cette hypothèse,* il suffit d'attribuer successivement à p la valeur o et une autre valeur quelconque, pour en déduire immédiatement,

$$\sum_{m=o}^{m=n-1} (-1)^m \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-m+1)}{1.2\ \dots\ m} (n-m) \mathbf{M}_x^{x+(n-m)\Delta x} f'(x)$$
$$= \frac{\Delta x}{1.2 \dots p} \sum_{m=o}^{m=n-1} (-1)^m \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-m+1)}{1.2\ \dots\ m} (n-m) \mathbf{M}_x^{x+(n-m)\Delta x} (z-x)^p f^{p+1}(x).$$

La combinaison des formules (36) et (28) donne de même,

$$1.2.3 \dots n \Delta x^{n-1}. \mathbf{M}_x^{x+\Delta x} (z-x) \left(f^{n+1}(x) + \overset{1}{\mathbf{M}}{}_x^{x+\Delta x} f^{n+1}(x) + \overset{2}{\mathbf{M}}{}_x^{x+\Delta x} f^{n+1}(x) + \text{etc.} + \overset{n-1}{\mathbf{M}}{}_x^{x+\Delta x} f^{n+1}(x). \right)$$
$$= \sum_{m=o}^{m=n-1} (-1)^m \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-m+1)}{1.2\ \dots\ m} (n-m) \mathbf{M}_x^{x+(n-m)\Delta x} (z-x)^n f^{n+1}(x).$$

Nous ne multiplierons pas ces applications qui ne présentent aucune difficulté. Celles que nous venons de faire suffisent pour mettre en évidence les relations curieuses qui existent, pour les dérivées d'ordres différents, entre les moyennes simples à indices variables, et, pour les dérivées du même ordre entre ces mêmes moyennes et les moyennes multiples à indices fixes.

Vérification de la formule générale

$$\Delta^n y = \left\{ {1 \atop n} \right\} \Delta x\, f'(x) + \left\{ {2 \atop n} \right\} \Delta x^2 f''(x) + \text{etc.} + \left\{ {p \atop n} \right\} \Delta x^p f^p(x) + \text{etc.}$$

52. Terminons ce sujet par une dernière remarque.

On sait qu'en désignant par e la limite de la série convergente,

$$1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$$

l'on a, quel que soit x,

$$(38) \quad \dots\dots\dots \quad f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Digitized by Google

et, quel que soit n,

$$f^n(x) = e^x.$$

Admettons ces diverses relations, faciles à établir sans autre secours que celui de l'équation fondamentale

$$\lim \frac{f(x+h) - f'(x)}{h} = f'(x).$$

Si nous posons,

$$y = e^x,$$

Nous aurons d'abord et directement

$$\Delta^n y = e^x \left(e^{\Delta x} - 1\right)^n.$$

Il viendra ensuite, conformément à l'équation (31),

$$\Delta^n y = e^x \left(\begin{Bmatrix}1\\n\end{Bmatrix} \Delta x + \begin{Bmatrix}2\\n\end{Bmatrix} \Delta x^2 + \text{etc.} + \begin{Bmatrix}p\\n\end{Bmatrix} \Delta x^p + \text{etc.}\right).$$

De là résulte *identiquement*

$$\left\{e^{\Delta x} - 1\right\}^n = \begin{Bmatrix}1\\n\end{Bmatrix} \Delta x + \begin{Bmatrix}2\\n\end{Bmatrix} \Delta x^2 + \text{etc.} \begin{Bmatrix}p\\n\end{Bmatrix} \Delta x^p + \text{etc.},$$

ou, ce qui revient au même, Δx étant quelconque,

$$(39)\ldots\ldots \left\{e^x - 1\right\}^n = \begin{Bmatrix}1\\n\end{Bmatrix} x + \begin{Bmatrix}2\\n\end{Bmatrix} x^2 + \text{etc.} + \begin{Bmatrix}p\\n\end{Bmatrix} x^p + \text{etc.}$$

Si, dans le second membre de l'identité (39), l'on prend la dérivée de l'ordre p, et qu'ensuite on attribue à x la valeur zéro, l'on a pour résultat

$$1.2.3 \ldots. p \begin{Bmatrix}p\\n\end{Bmatrix}.$$

Il faut donc qu'en opérant de même sur le premier membre, on trouve identiquement cette même valeur.

Or, on a d'abord

$$\left(e^x - 1\right)^n = e^{nx} - \frac{n}{1} e^{(n-1)x} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-2)x} \pm \text{etc.} \mp ne^x \pm 1;$$

puis, prenant la dérivée de l'ordre p,

$$n^p e^{nx} - \frac{n}{1}(n-1)^p e^{(n-1)x} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^p e^{(n-2)x} \text{ etc.} \pm ne^x$$

Digitized by Google

Cette dernière expression, lorsqu'on y fait $x = o$, devient,

$$n^p - \frac{n}{1}(n-1)^p + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^p - \text{etc.} \pm n.$$

Il est donc vérifié que l'on a généralement pour le coefficient du rang p

$$\left\{ {p \atop n} \right\} = \frac{1}{1.2 \ldots p}\left(n^p - \frac{n}{1}(n-1)^p + \text{etc.}\right)$$

Reprenons l'identité (39). En y remplaçant e^x par le développement (38), elle devient

$$x^n\left(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \text{etc.}\right)^n = \left\{ {1 \atop n} \right\} x + \left\{ {2 \atop n} \right\} x^2 + \left\{ {3 \atop n} \right\} x^3 + \text{etc.}$$

La simple inspection de cette dernière formule montre avec évidence que, pour toute valeur de p inférieure à n, l'on a nécessairement

$$\left\{ {p \atop n} \right\} = o,$$

L'identité (39) se réduit, dès lors, à

$$\left(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \text{etc.}\right)^n = \left\{ {n \atop n} \right\} + \left\{ {n+1 \atop n} \right\} x + \left\{ {n+2 \atop n} \right\} x^2 + \text{etc.},$$

et elle prouve que, pour toute valeur de p non inférieure à n, et représentée par $n + q$, l'expression $[{p \atop n}] = [{n+q \atop n}]$ n'est autre chose que le coefficient du terme dans lequel x entre à la puissance $p - n = q$ dans le développement

$$\left(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \text{etc.} + \frac{x^q}{1.2 \ldots (q+1)}\right)^n.$$

L'on trouve ainsi

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = 1, \left\{ {n+1 \atop n} \right\} = \frac{n}{1.2}, \left\{ {n+2 \atop n} \right\} = \frac{n}{1}\frac{1}{1.2.3} + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1}{1.2}\right)^2 = \frac{n}{6} + \frac{n(n-1)}{8},$$

ce qui complète la vérification proposée et fournit, en outre, un moyen simple de calculer l'expression $[{n+q \atop n}]$, lorsque q est petit et que n est grand.

Digitized by Google

Ajoutons que l'on a d'ailleurs et généralement

$$\left\{ {n+q+p \atop n+q} \right\} = \left\{ {n+p \atop n} \right\} + \left\{ {n+p-1 \atop n} \right\} \left\{ {q+1 \atop q} \right\} + \left\{ {n+p-2 \atop n} \right\} \left\{ {q+2 \atop q} \right\} + \text{etc.} + \left\{ {q+p \atop q} \right\}$$
$$= \Sigma_{r=q}^{r=q+p} \left\{ {r \atop q} \right\} \left\{ {n+q+p-r \atop n} \right\}.$$

CHAPITRE IV.

—

APERÇU DES RESSOURCES OFFERTES EN ANALYSE TRANSCENDANTE PAR L'EXACTE DÉFINITION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

53. Nous avons établi, n° 22, l'équation fondamentale

(1) . . . . $\Delta y = \Delta x \, [f'(x) + \eta].$

Il résulte de cette équation que l'accroissement de la fonction, supposée continue, $y = f(x)$ se compose, en général, de deux termes essentiellement distincts. L'un de ces termes est égal au produit de l'accroissement de la variable par la fonction dérivée; l'autre est plus complexe, mais il possède la propriété distinctive de décroître indéfiniment *par rapport* au premier à mesure que les accroissements sont supposés de plus en plus petits. En s'arrêtant à cette simple remarque, rien n'empêche de considérer *isolément* la première partie de la différence et de lui donner le nom de *différentielle*. Si, d'ailleurs, on affecte à la différentielle, *ainsi définie*, la caractéristique d, il vient immédiatement

(2) . . . . $dy = f'(x) \Delta x$ [1].

[1] Tout ce qui précède s'applique, ainsi que les observations suivantes, aux différentielles d'un ordre quelconque. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que l'équation (1) implique comme conséquence directe et facile à établir par une déduction tout élémentaire, l'équation générale

$$\Delta^n y = [f^n(x) + \xi] \, \Delta x^n,$$

Digitized by Google

D'après cette définition, la différentielle est une quantité essentiellement finie, susceptible de croître sans limites et de décroître indéfiniment. Rien en elle n'est obscur, ni mystérieux. Identique, comme grandeur, aux grandeurs algébriques, elle se compose avec les mêmes unités et s'introduit dans le calcul sous l'empire des mêmes règles. Dépouillée de tout appareil merveilleux, elle tombe à la fois sous les sens et sous le raisonnement. Elle devient ainsi l'objet d'une conception purement rationnelle et se soutient d'elle-même, sans qu'on soit réduit à faire appel à la foi ou à exiger aucune de ces concessions illogiques qui répugnent à l'intelligence et révoltent le simple bon sens.

Lorsque la fonction y est linéaire, la quantité η s'annule indépendamment de toute valeur attribuée soit à x, soit à Δx. En ce cas, la différentielle et la différence se confondent, sans qu'on puisse établir entre elles aucune distinction. Lorsque la fonction y n'est point linéaire, la quantité η ne peut plus s'annuler que pour certaines valeurs de l'accroissement Δx, qui conservent entre elles des écarts déterminés et qui, par conséquent, ne se présentent jamais que d'une façon tout accidentelle. Convergeant vers zéro avec Δx, elle subsiste aussi longtemps que cet accroissement, et ne permet jamais que, pour aucune étendue, si petite qu'on l'imagine, l'inégalité existant entre la différence et la différentielle s'efface et disparaisse. On doit observer, sans doute, qu'à mesure que l'intervalle Δx diminue, la quantité η varie et décroît indéfiniment, tandis que la dérivée $f'(x)$ conserve une seule et même valeur. Cette remarque est essentielle à faire par les motifs suivants :

1° Elle fixe les caractères précis auxquels on reconnaît, sans pouvoir les confondre, les deux parties essentiellement distinctes qui se composent, avec le facteur Δx, pour former la différence ordinaire Δy.

$f^n(x)$ étant la dérivée de l'ordre n et ξ une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx.

Cela posé, l'on distingue aisément dans la différence $\Delta^n y$ les deux parties dont elle se compose et qui sont irréductibles entre elles, après la suppression du facteur commun Δx^n. Prenant à part et isolément la première de ces parties, l'on a comme ci-dessus

$$d^n y = f^n(x).\ \Delta x^n.$$

Digitized by Google

2° Elle permet d'opérer la séparation de ces deux parties, de mettre en évidence celle qui tend à s'évanouir en même temps que Δx, de la supprimer enfin, et *par cette suppression* de dégager la différentielle.

De là résulte avec une extrême simplicité le procédé généralement suivi pour passer de la différence à la différentielle. Il consiste à développer l'expression $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, à dégager le facteur Δx que le développement obtenu contient nécessairement, et à supprimer, dans le second facteur, tous les termes qui s'annulent avec Δx. La suppression dont il s'agit s'effectue, non pas, comme on le dit trop souvent, parce qu'avant de s'évanouir la quantité η devient infiniment petite et peut, *sans erreur,* être négligée par rapport à la dérivée $f'(x)$; elle a lieu, parce que la propriété de converger vers zéro en même temps que Δx, caractérise, d'une manière complète et exclusive, l'ensemble des termes qu'il faut soustraire du facteur $[f'(x)+\eta]$ pour changer l'expression de la différence en celle de la différentielle. Dès qu'on a reconnu les termes à supprimer, et qu'on les a fait disparaître, il n'y a plus à se préoccuper du moyen dont on s'est servi pour les distinguer de ceux qu'il fallait conserver; l'on a *rigoureusement*

$$dy = f'(x)\,\Delta x;$$

et bien loin qu'elle doive être restreinte à une suite de valeurs *prétendues infiniment petites,* cette équation s'étend, au contraire, à toutes les valeurs finies de l'accroissement Δx.

54. La différentielle étant définie, comme on vient de le faire, on voit qu'elle est une partie de la différence ordinaire, mais on n'aperçoit point encore ce qu'elle est par elle-même, ni ce qu'elle exprime par rapport à la fonction dont elle dérive. La définition est algébrique; elle satisfait l'esprit et le repose. Elle offre ainsi des avantages précieux; néanmoins tant qu'elle est réduite à la simple traduction d'un fait qu'elle n'explique point et dont le sens échappe, elle se trouve frappée d'une sorte de stérilité relative, et bien qu'elle suffise pour fonder, sur une base rationnelle, la méthode des limites, elle n'y diminue pas sensiblement la difficulté des applications. Veut-on suppléer à cette impuissance qui résulte uniquement d'un défaut d'appropriation? Veut-on réunir aux avantages signalés ci-

Digitized by Google

dessus, l'avantage important de ces déductions si faciles qui font prévaloir la méthode infinitésimale? Le moyen est extrêmement simple; il se réduit à donner à la définition de la différentielle toute l'extension qu'elle comporte, ou, ce qui revient au même, à saisir, dans l'équation différentielle sa véritable signification. Bornons-nous, sur ce point capital, à rappeler en quelques lignes les principes que nous avons établis précédemment.

Étant donné une fonction quelconque, supposée continue et non linéaire, $y=f(x)$, il existe entre les accroissements simultanés $\Delta y, \Delta x$, un lien de dépendance mutuelle et réciproque. Ce lien s'étend jusqu'à l'origine des accroissements, et il régit leur génération de manière qu'elle commence toujours suivant une certaine raison de proportionnalité. Cette raison de proportionnalité change incessamment, et a pour expression générale la valeur correspondante de la dérivée $f'(x)$. De là vient que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite vers laquelle il converge à mesure que Δx décroît indéfiniment. De là vient aussi que, tout en convergeant vers cette limite, exprimée par $f'(x)$, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ demeure constamment variable et ne peut s'arrêter à aucune valeur dans laquelle il persiste. Imaginer que cette dernière condition cessât d'avoir lieu pour des valeurs de Δx prétendues infiniment petites, ce serait admettre en même temps que la raison de proportionnalité exprimée par $f'(x)$ demeure constamment la même dans toute l'étendue d'un certain intervalle. Une pareille hypothèse est évidemment absurde et contradictoire, lorsqu'il s'agit de l'accroissement effectif Δy. Toutefois elle peut être faite et rester de tout point légitime, pourvu que l'on considère à part l'accroissement particulier qui y correspond. C'est cet accroissement particulier, essentiellement distinct de la différence ordinaire, avec laquelle il ne peut jamais se confondre, qui constitue la différentielle proprement dite, et tel est le sens de l'équation fondamentale

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

Dans cette équation la raison de proportionnalité exprimée par $f'(x)$ *est supposée constante* pour toute l'étendue de l'intervalle quelconque Δx. *Eu égard à cette hypothèse*, la différentielle dy n'est plus qu'une différence ordi-

Digitized by Google

naire, et la fonction, dont elle devient ainsi la différence, une fonction linéaire. En d'autres termes, la différentielle *est* ce que *serait* la différence dont elle dérive, *si* la raison de proportionnalité qui régit la génération des accroissements *cessait de varier* dans l'intervalle Δx, et y *conservait une seule et* même détermination *constante*, celle qu'elle affecte *transitoirement* à l'origine de cet intervalle.

Lorsque la définition de la différentielle se trouve ainsi complétée, elle offre toutes les ressources possibles. La méthode qu'elle sert à fonder se distingue alors, non plus seulement parce qu'elle est purement algébrique, mais parce qu'en outre elle égale et dépasse même la méthode infinitésimale, sous le double rapport de la facilité des applications et de la fécondité. Pour justifier cette assertion, qui paraîtra sans doute exagérée, nous prendrons quelques exemples, et nous les traiterons à l'aide des théorèmes que nous avons exposés n° 36, comme conséquences immédiates de la définition de la différentielle. Si ces exemples ne suffisaient pas pour mettre en évidence la supériorité de notre méthode, nous renverrions le lecteur à notre essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante; là, les applications sont nombreuses, et nous croyons qu'elles seront facilement saisies, maintenant que nous les avons dégagées de toute obscurité, en rendant sensibles les principes abstraits qui leur servaient de fondement.

Nature intime de la ligne courbe reconnue a priori et démontrée directement par l'équation différentielle

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

55. Reprenons le 1er théorème du n° 36 :

Quel que soit l'énoncé fourni comme traduction équivalente de l'équation

$$dy = f'(x)\,\Delta x,$$

par cela seul que la condition exprimée a lieu d'une manière PERMANENTE ET INVARIABLE dans la génération de la différentielle, on peut affirmer, SANS AUTRE INTERMÉDIAIRE, qu'elle subsiste TRANSITOIREMENT à l'origine de l'accroissement effectif Δy.

Digitized by Google

Cela posé imaginons que l'équation

$$y = f(x),$$

représente une courbe plane rapportée à des axes quelconques. Si nous prenons l'équation différentielle

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad dy = f'(x)\,\Delta x,$$

nous devons y considérer la dérivée $f'(x)$ comme *une constante* déterminée par la valeur particulière affectée par x à l'origine de l'intervalle Δx. Dans *cette hypothèse*, dy n'est plus qu'une différence ordinaire : c'est donc une droite qui se trouve représentée par l'équation (3), et l'inclinaison de cette droite par rapport aux axes est fixée par la valeur particulière de la dérivée $f'(x)$. Or, dans la génération de la droite, le déplacement du point générateur s'effectue toujours suivant une seule et même direction. Voilà donc une condition *permanente et invariable* exprimée par l'équation différentielle, et complétement déterminée par la valeur particulière que la variable x affecte à l'origine des accroissements. On peut et l'on doit en conclure que cette même condition, ainsi particularisée, subsiste *transitoirement* à l'origine de l'accroissement effectif Δy. De là résultent, comme conséquences immédiates et rigoureuses, les deux énoncés suivants :

1° *Dans la génération d'une courbe quelconque* $y = f(x)$, *c'est toujours suivant une certaine direction, déterminée pour chaque position et incessamment variable d'une position à l'autre, que s'effectue le déplacement du point générateur.*

2° *La droite qui fixe cette direction et que l'on nomme tangente, a pour équation aux différences ordinaires l'équation différentielle*

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

On voit ainsi qu'en chaque point d'une courbe, il est une direction première suivant laquelle la continuité s'établit. *La tangente ne fait que manifester cette direction en la rendant sensible.* Sur la courbe, la direction change incessamment, et nul espace n'est franchi, sans qu'elle se soit modifiée. Le contraire a lieu pour la tangente où la direction *persiste* dans la détermination que la courbe affecte *transitoirement* au point que l'on considère.

Digitized by Google

Dans la méthode des limites, comme dans celle des fonctions dérivées, la définition de la tangente est exacte, mais imparfaite et insuffisante. Elle n'apprend rien sur ce qu'il importe le plus de connaître, le lien intime existant entre la tangente et la courbe. Dans la méthode infinitésimale ce lien est nettement accusé, mais avec une exagération absurde et dangereuse. On ne s'y contente pas d'attribuer à la direction tangentielle la détermination *essentiellement transitoire* qu'elle affecte en chaque point : on admet, contre toute logique, que cette détermination demeure persistante, pour une certaine étendue, et l'on s'imagine corriger une aussi grave erreur, en affirmant de l'étendue dont il s'agit qu'elle est infiniment petite, c'est-à-dire que, sans être nulle, elle s'évanouit néanmoins devant toute longueur finie. Dans cette méthode, où l'on ne craint pas d'accumuler les absurdités et les contradictions, la circonférence de cercle est considérée comme s'identifiant avec un polygone rectiligne où se succèdent une infinité d'angles et de côtés. Cependant elle ne cesse pas d'avoir tous ses points équidistants d'un point intérieur, ni par conséquent d'être la ligne engendrée par l'extrémité du rayon tournant autour du centre. Où sont les côtés de ce polygone? Où sont les sommets de ses angles? Comment le rayon tournant autour du centre peut-il engendrer une succession *discontinue* d'éléments rectilignes? Comment est-il possible qu'un mode de génération *essentiellement uniforme*, toujours et partout identique à lui-même, produise tantôt *une suite continue de points* n'admettant tous qu'une seule et même tangente, tantôt *des points isolés* auxquels deux tangentes correspondent? On ne saurait ni le voir, ni le comprendre. Ce que l'on ne voit pas est donné comme échappant à la grossièreté de nos sens, qui ne nous permettent pas de pénétrer dans la région des infiniment petits : ce que l'on ne comprend pas est tout simplement affirmé; c'est un mystère qu'il n'est pas besoin d'éclaircir; c'est une révélation qu'il faut admettre et respecter.

Laissant de côté l'absurde conception du *cercle polygone*, je dois néanmoins insister sur la définition de la tangente. J'ai pu me convaincre que l'usage de la méthode infinitésimale, alors même qu'on sait en éviter les abus, suffit pour obscurcir la notion de continuité et la rendre en quelque sorte inintelligible. De là vient sans doute que j'ai rencontré, chez des

Digitized by Google

géomètres, partisans modérés des infiniment petits, une difficulté presque insurmontable à concevoir nettement que, dans le mouvement d'un point qui décrit une courbe, il y a à chaque instant direction déterminée, cette direction n'étant jamais persistante et produisant la courbure par les modifications continues qu'elle subit incessamment. Toutefois il est plusieurs moyens de démonstration qui m'ont souvent réussi comme élucidation du sens exprimé par l'équation différentielle. Je vais essayer d'en reproduire ici quelques-uns. Directs ou indirects, ils tendent également au but proposé; s'ils l'atteignent, le lecteur n'hésitera pas sans doute à les admettre.

56. Imaginons qu'un point m se meuve en se dirigeant toujours vers un autre point n. Quelles que soient les deux positions affectées simultanément par ces points, elles déterminent une droite qui peut, suivant les cas, être fixe ou mobile et que nous désignerons par ses extrémités m, n. Supposons, d'abord, que le point directeur soit arrêté dans la position qu'il occupe à un instant quelconque. Il est visible, qu'à partir de ce même instant, le point m décrit une portion de la droite mn devenue fixe. Supposons, ensuite, que le point n entre en mouvement et se déplace suivant une ligne quelconque, toujours autre que la droite mn. A partir de l'instant précis où ce mouvement commence, la ligne décrite par le point m ne peut plus être droite *sur aucune étendue*. Elle est donc courbe. Toutefois rien n'est changé pour le point m dans la direction qu'il affecte à l'origine de l'arc curviligne; il arrive seulement, qu'au lieu d'être *persistante*, comme dans le premier cas, cette direction n'est plus que *transitoire*. Il en est de même pour toute autre direction suivie par le point m dans le parcours de la courbe. Veut-on rendre sensible l'une quelconque de ces directions? Il suffit d'arrêter le point n dans la position correspondante, où il est parvenu. De *transitoire* qu'elle était, la direction dont il s'agit devient alors *permanente*, et l'on voit clairement que, ne cessant jamais de coïncider avec celle de la droite mn, pour toute l'étendue de l'arc curviligne, elle est, comme celle-ci, déterminée pour chaque point de cet arc, et constamment variable d'un point à un autre.

L'exemple que je viens de développer me paraît à lui seul assez dé-

Digitized by Google

monstratif. Néanmoins j'en ajouterai un second, emprunté à la dynamique, et plus propre encore que le premier à forcer les convictions rebelles.

Soit un point matériel décrivant une courbe, sous l'action d'une force infléchissante. Si, à un instant quelconque, l'action de la force infléchissante vient à cesser, l'on sait qu'à ce même instant le point s'échappe suivant la tangente à la courbe qu'il décrit. Il est d'ailleurs établi en principe qu'un point matériel, supposé libre et soustrait à toute action extérieure, est impuissant à modifier par lui-même son état de mouvement, de telle sorte qu'il ne fait jamais que persister dans cet état, que caractérisent une certaine vitesse et une certaine direction, déterminées toutes deux et toutes deux invariables.

Il suit de là que si le point matériel, dont nous parlions tout à l'heure, s'échappe suivant la tangente à la courbe qu'il décrit, c'est en persistant dans l'état de mouvement qui l'anime à l'intant que l'on considère. Cet état, qu'il ne peut changer par lui-même, n'aurait subsisté que *transitoirement*, sous l'action continue de la force infléchissante. Cette action cessant par hypothèse, l'état dont il s'agit devient *permanent*, et puisque le mouvement a lieu en ligne droite, on voit avec évidence qu'il *révèle comme direction préexistante* cette même direction suivant laquelle le déplacement s'accomplit.

57. Nous venons de voir qu'à partir d'un point quelconque pris sur une courbe, la continuité s'établit suivant une direction déterminée. Lorsque cette direction *persiste* et devient *permanente*, la ligne engendrée est droite. En général la direction dont il s'agit n'est que *transitoire* et elle varie avec continuité. De là naît la courbure; elle résulte des modifications continues que la direction tangentielle subit incessamment.

Soit ω l'angle qu'une tangente quelconque à la courbe $y = f(x)$, fait avec l'axe des abscisses, on a généralement, les axes étant rectangulaires,

$$\omega = \text{arc tang. } f'(x).$$

De là résulte, d'abord,

$$d\omega = \frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2}\,\Delta x;$$

Digitized by Google

si d'ailleurs on désigne par Δs la longueur de l'arc qui répond à l'intervalle Δx, l'on a pour l'accroissement différentiel ds mesuré sur la tangente

$$ds = \Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Il vient donc en substituant

$$d\omega = \frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}} ds.$$

L'équation différentielle que nous venons d'écrire s'applique à la génération simultanée des accroissements angulaires et arcuels. Elle détermine :

1° Le rapport suivant lequel *commence* cette génération;

2° La ligne qui se substitue à la courbe donnée, lorsqu'on suppose que ce rapport persiste dans la détermination *transitoire* qu'il affecte à l'origine des accroissements.

Considérant cette ligne, et substituant les différences aux différentielles, il vient

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \text{const.}$$

En ce cas, deux arcs quelconques, égaux en longueur, sont toujours superposables. La courbure est donc uniforme, et la ligne engendrée une circonférence de cercle ayant pour rayon

$$\rho = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

Le cercle, ainsi déterminé, a en tous ses points même courbure que la courbe donnée au point que l'on considère. On le nomme *cercle osculateur*, et son rayon *rayon de courbure*. En général la courbure varie d'un point à un autre. Dans tous les cas elle est mesurée par le rapport $\frac{1}{\rho}$ et le changement de direction *pris à son origine*, *commence* sur la courbe de la même manière qu'il s'effectue constamment sur toute l'étendue du cercle osculateur.

Digitized by Google

Conditions intimes du mouvement d'un point matériel rendues sensibles et démontrées directement par la différentiation.

58. Un point matériel se meut dans l'espace. Une relation existe entre le temps t et le chemin parcouru e. On suppose cette relation connue et exprimée par l'équation

$$e = f(t).$$

De là résulte immédiatement

$$de = f'(t)\ \Delta t,$$

c'est-à-dire l'équation d'un mouvement uniforme où la vitesse se conserve sans altération, et demeure constamment exprimée par la valeur particulière que la dérivée $f'(t)$ affecte à l'origine des accroissements Δe, Δt. Concluons, en vertu du théorème rappelé ci-dessus n° 55, que, si l'on désigne en général par v la vitesse acquise après le temps t dans le mouvement auquel s'applique l'équation

$$e = f(t),$$

l'on a, en général,

$$v = f'(t).$$

Différentiant cette dernière équation, il vient

$$dv = f''(t).\ \Delta t,$$

c'est-à-dire l'équation d'un mouvement uniformément varié, où l'action motrice demeure toujours la même et a pour expression constante, rapportée à l'unité de masse, la valeur que la dérivée $f''(t)$ affecte à l'origine des accroissements Δv, Δt.

Concluons comme tout à l'heure que, dans le mouvement dont il s'agit en réalité, si l'on désigne par F, pour l'unité de masse, la valeur que l'action motrice affecte à l'instant t, l'on a généralement

$$F = f''(t).$$

59. Les applications qui précèdent montrent suffisamment le rôle assigné à la différentiation, lorsqu'il s'agit de pénétrer au fond des choses et d'en

Digitized by Google

découvrir la nature intime. Pour atteindre ce résultat important, il n'est pas besoin de recourir à l'hypothèse dangereuse d'une discontinuité impossible ou contradictoire; tout se réduit à saisir la véritable signification de l'équation différentielle. Cette notion éminemment simple, fournit d'ailleurs d'autres ressources également précieuses et plus fécondes encore, à raison de l'extension qu'elles comportent. Pour en donner une idée, nous indiquerons par quelques exemples comment s'applique le second théorème exposé n° 35, et énoncé dans les termes suivants :

Soit y une fonction inconnue de x qu'il s'agit de déterminer d'après les données suivantes :

« *On sait qu'une grandeur z incessamment variable et exprimée numériquement* » *par $\varphi(x)$ intervient dans la génération continue de l'accroissement Δy.*

» Si, *au lieu de varier avec x dans l'intervalle Δx la grandeur z* conservait *la* » *valeur quelconque a qu'elle affecte à l'origine de cet intervalle* (toutes choses » restant d'ailleurs les mêmes), *on sait que dans la génération continue*, corres» pondante à cette hypothèse, *on aurait en général*

$$\Delta y = a\Delta x;$$

» *cela posé, pour tenir compte à la fois de ces deux conditions, il suffit d'écrire*

$$dy = \varphi(x)\Delta x.$$

» *De là résulte pour le cas dont il s'agit en réalité*

$$\Delta y = \Delta x \, \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} \varphi(x). \text{ »}$$

PREMIER EXEMPLE.

Mesure du volume engendré par le mouvement d'une aire plane qui se transporte parallèlement à elle-même en changeant de grandeur.

Soit V le volume engendré par une aire plane ω, qui se transporte parallèlement à elle-même, en changeant de grandeur. Imaginons qu'à partir d'une position quelconque, et toutes choses restant d'ailleurs les mêmes, l'aire ω persiste dans la détermination qu'elle affecte. Il suffit de

Digitized by Google

prendre l'axe des x perpendiculaire au plan de l'aire ω pour que, dans l'hypothèse où nous venons de nous placer, l'on ait généralement

$$\Delta V = \omega \Delta x.$$

De là résulte, pour le cas dont il s'agit en réalité,

$$dV = \omega \Delta x,$$

et, par conséquent,

$$\Delta V = \Delta x. \ \mathop{\mathrm{M}}_{x}^{x+\Delta x} \omega.$$

DEUXIÈME EXEMPLE.

Mesure de l'espace décrit par un point mobile animé d'une vitesse variable.

Soit un point mobile animé d'une vitesse v incessamment variable avec le temps t. Si, à partir d'un instant quelconque, on suppose que la vitesse v persiste dans la détermination particulière qu'elle affecte à ce même instant, et qu'on désigne par e l'espace déjà parcouru, l'on a généralement pour l'accroissement Δe qui répond à cette hypothèse

$$\Delta e = v \Delta t;$$

de là résulte, pour le cas dont il s'agit en réalité,

$$de = v \Delta t,$$

et, par conséquent,

$$\Delta e = \Delta t \ \mathop{\mathrm{M}}_{t}^{t+\Delta t} (v).$$

60. La méthode dont nous venons de donner une idée, par deux exemples très-simples, s'applique avec la même facilité aux cas les plus complexes. Notre essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante fournit, à cet égard, tous les développements nécessaires. Ne pouvant les reproduire ici, nous nous bornerons à dire en quelques mots quel est le véritable rôle assigné au calcul différentiel dans toutes les applications de ce genre.

Digitized by Google

Concevons que l'on se propose l'étude d'un phénomène quelconque, et qu'il s'agisse de traduire algébriquement les lois qui en régissent le développement continu. C'est uniquement par la mesure des effets produits, que le calcul peut intervenir. En général, certaines grandeurs, connues *a priori*, concourent à la génération des effets qu'il s'agit de calculer, et c'est parce que ces grandeurs varient, c'est parce que leurs expressions numériques changent incessamment que le problème à résoudre est rendu difficile. Ce point admis, la question se trouverait singulièrement simplifiée, s'il suffisait de la traiter directement, pour le cas où, *toutes choses restant d'ailleurs les mêmes*, les grandeurs dont il s'agit cesseraient de varier numériquement, et conserveraient une valeur quelconque toujours constante. Le problème est-il convenablement résolu dans cette hypothèse, et *veut-on restituer aux quantités supposées quelconques, mais constantes, leur caractère de variabilité continue*, il suffit de substituer aux différences ordinaires les différentielles qui leur correspondent. Cela fait, et *par cela seul*, on obtient la solution cherchée pour le cas général.

On voit ainsi d'où vient la puissance de l'analyse différentielle. Elle résulte essentiellement de ce que, dans certaines classes de problèmes, les équations aux différences ordinaires, établies pour les cas les plus simples, ne sont pas plutôt transformées en équations différentielles, par un simple changement de caractéristique, qu'elles deviennent immédiatement applicables aux cas plus compliqués que l'on a principalement en vue, et que l'on ne saurait aborder directement par aucune autre méthode. Cette extension si remarquable des moyens bornés, dont l'analyse ordinaire dispose, se distingue peut-être moins encore par sa puissance que par sa simplicité.

Lorsqu'on a reconnu que, là où certaines grandeurs *continûment variables* concourent à la production d'un phénomène, l'équation différentielle n'intervient que comme expression directe et purement algébrique des effets qui répondent à une détermination quelconque de ces grandeurs *supposées constantes*, on conçoit aisément pourquoi cette équation s'établit avec tant de facilité, pourquoi aussi, la question ne cessant pas d'être en

Digitized by Google

réalité complexe, les difficultés qui lui sont inhérentes se trouvent transportées dans l'intégration.

61. Au lieu d'appliquer littéralement les deux théorèmes du n° 36, l'on peut, dans un grand nombre de cas, procéder plus simplement encore, en se fondant sur certaines déductions de ces théorèmes ou des principes sur lesquels ils reposent. De là, de nouveaux avantages, dont il convient que nous fassions ressortir l'importance par quelques applications particulières. Disons d'abord un mot de la forme sous laquelle peut s'écrire l'équation fondamentale

(1). . . . . $dy = f'(x)\,\Delta x,$

lorsque la variable x dépend ou est supposée dépendante d'une autre variable.

Si l'on désigne par t cette nouvelle variable et par $x = \mathrm{F}(t)$ la relation qui existe en réalité, ou qu'on établit arbitrairement, entre x et t, l'on a

(2). . . . . $dx = \mathrm{F}'(t)\,\Delta t.$

Dans l'équation (1) l'on dispose de la quantité Δx et l'on peut la déterminer comme on veut. Il en est de même de la quantité Δt dans l'équation (2). Il est donc évident que rien n'empêche que, dans l'équation (1), l'on attribue à Δx la valeur dx fournie par l'équation (2). Il vient alors

(3). . . . . $dy = f'(x).\,dx.$

Présentée sous cette forme, l'équation (1) conserve le sens que nous lui avons attribué précédemment. Elle ne cesse pas de fixer par la valeur du quotient $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ la raison suivant laquelle commence la génération simultanée des accroissements Δy, Δx. Toutefois, elle a l'avantage d'être plus symétrique, de mettre mieux en évidence la réciprocité du lien de dépendance existant entre les variables x et y, enfin de pouvoir se combiner directement avec l'équation (2), de fournir ainsi la relation

$$dy = f'(x)\,\mathrm{F}'(t)\,\Delta t,$$

et par conséquent de donner immédiatement la raison $f'(x)\,\mathrm{F}'(t)$, suivant

Digitized by Google

laquelle commence la génération simultanée des accroissements Δy et Δt.

Lorsqu'il existe entre n variables $(n-1)$ relations, chaque variable peut être considérée comme fonction de l'une quelconque des autres. Dans chacun des couples qu'on peut ainsi former, la variable, prise pour fonction, a une différentielle particulière. Si ces différentielles sont toutes prises par rapport à une seule et même variable, dont on puisse disposer librement, celle-ci est dite variable indépendante, et chaque différentielle se trouve déterminée. Le choix de la variable indépendante est tout à fait arbitraire. Néanmoins, et pour plus de généralité, il convient souvent d'introduire, par la pensée, une variable que l'on n'exprime point, et de la prendre pour variable indépendante, en la supposant liée, par telle relation qu'on voudra, à l'une quelconque des variables sur lesquelles on opère explicitement. Dans ce système, les calculs offrent plus de symétrie, et ils se prêtent, en outre, à toute détermination ultérieure de la variable indépendante.

Lorsque les relations existant entre n variables sont en nombre inférieur à $(n-1)$, le procédé que nous venons d'indiquer n'est plus, en général, un simple artifice auquel on est ou non libre de recourir. Ce procédé, qui consiste à introduire, par la pensée, une variable que l'on n'exprime point, et dont on fait dépendre toutes les autres par un nombre convenable de relations arbitraires, est impérieusement prescrit toutes les fois que le nombre des variables l'emporte de plus d'une unité sur celui des équations. Ainsi que nous l'avons dit et démontré ailleurs [1], il est le seul qui puisse, en ce cas, donner un sens précis aux différentiations successives.

62. Cela posé, soient $x, y, z,$ les coordonnées rectangulaires d'un point pris sur la courbe

$$x = f(z)$$
$$y = F(z).$$

Soit d'ailleurs σ la longueur d'un arc mesuré sur cette courbe et terminé au point (x, y, z).

[1] Voir notre essai déjà cité.

Considérer les différentielles dx, dy, dz, $d\sigma$, c'est à partir du point (x, y, z), substituer à la courbe sa tangente en ce point. C'est par rapport à cette tangente, exprimer par ces différentielles, les différences ordinaires correspondantes. Il suit de là que, si l'on désigne par α, 6, γ, les angles que la tangente, dont il s'agit, fait respectivement avec les axes coordonnés des x, des y et des z, l'on a directement et sans aucun intermédiaire

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{d\sigma}.$$

$$\cos 6 = \frac{dy}{d\sigma}.$$

$$\cos \gamma = \frac{dz}{d\sigma}.$$

De là résulte encore

$$d\sigma = dz \sqrt{1 + f'(z)^2 + F'(z)^2};$$

puis prenant z pour variable indépendante,

$$\Delta\sigma = \Delta z \, \mathbf{M}_z^{z+\Delta z} \sqrt{1 + (f'(z))^2 + (F'z)^2}.$$

Soient maintenant t, u, v, les coordonnées d'un point quelconque pris dans le plan mené par le point (x, y, z), normalement à la courbe. Si l'on considère ce point comme le centre d'un cercle touchant la courbe au point (x, y, z), et qu'on désigne par R le rayon de ce cercle, on a d'abord

$$(t-x)^2 + (u-y)^2 + (v-z)^2 = R^2;$$

puis différentiant par rapport aux variables y, x, z considérées comme appartenant au cercle dont il s'agit :

$$(t-x)\,dx + (u-y)\,dy + (v-z)\,dz = o.$$

Cette relation subsiste évidemment pour un point quelconque du plan normal. Elle est donc l'équation de ce plan. D'un autre côté, le cercle a même tangente que la courbe au point considéré (x, y, z). On peut donc,

Digitized by Google

comme tout à l'heure, remplacer par $f'(z)$ et $F'(z)$ les rapports $\frac{dx}{dz}$, et $\frac{dy}{dz}$, et, par conséquent, écrire l'équation du plan normal sous la forme suivante,

$$(t-x)f'(z)+(u-y)F'(z)+v-z=o.$$

63. Soit une surface

$$u=F(x,y,z)=o,$$

et sur cette surface un point quelconque (x_0, y_0, z_0). Il est un lieu géométrique déterminé par l'ensemble infini des directions suivant lesquelles la continuité s'établit sur la surface à partir de ce point. Quel que soit ce lieu, il reste le même lorsque, supposant permanentes les raisons de proportionnalité suivant lesquelles commence pour une section quelconque la génération simultanée des accroissements Δx, Δy, Δz, on substitue à la surface donnée celle qui a pour équation

$$\frac{du_0}{\Delta x_0}dx+\frac{du_0}{\Delta y_0}dy+\frac{du_0}{\Delta z_0}dz=o,$$

c'est-à-dire,

$$(x-x_0)\frac{du_0}{\Delta x_0}+(y-y_0)\frac{du_0}{\Delta y_0}+(z-z_0)\frac{du_0}{\Delta z_0}=o.$$

Or, cette équation appartient à un plan. Elle exprime donc le lieu géométrique lui-même. On le nomme plan tangent.

Considérons tant de courbes qu'on voudra tracées sur la surface et passant par le point de contact du plan tangent. A partir de ce point la continuité s'établit, pour chaque courbe, suivant la direction fournie par la tangente. Lieu géométrique de ces directions, le plan tangent contient toutes les tangentes.

64. Lorsque deux courbes ont en un point commun (x, y, z) même tangente, les quantités dx, dy, dz sont identiques de part et d'autre, et il en est de même de l'accroissement différentiel

$$d\sigma=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Suppose-t-on, en outre, qu'en ce point, les deux courbes aient même courbure? il en résulte que les différentielles secondes d^2x, d^2y, d^2z s'iden-

tifient de part et d'autre, comme celles du premier ordre et réciproquement. Soient, en effet, α, β, γ les angles que la tangente commune aux deux courbes fait avec les axes des x, des y et des z; l'on a généralement

$$dx = \cos\alpha\, d\sigma$$
$$dy = \cos\beta\, d\sigma$$
$$dz = \cos\gamma\, d\sigma.$$

ce qui donne d'abord

$$d^2x = -\sin\alpha\, d\alpha\, d\sigma + \cos\alpha\, d^2\sigma$$
$$d^2y = -\sin\beta\, d\beta\, d\sigma + \cos\beta\, d^2\sigma$$
$$d^2z = -\sin\gamma\, d\gamma\, d\sigma + \cos\gamma\, d^2\sigma;$$

puis divisant par $(d\sigma)^2$.

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} = -\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\sigma} + \cos\alpha\frac{d^2\sigma}{d\sigma^2}$$
$$\frac{d^2y}{d\sigma^2} = -\sin\beta\frac{d\beta}{d\sigma} + \cos\beta\frac{d^2\sigma}{d\sigma^2}$$
$$\frac{d^2z}{d\sigma^2} = -\sin\gamma\frac{d\gamma}{d\sigma} + \cos\gamma\frac{d^2\sigma}{d\sigma^2}.$$

Or, on sait que pour une direction tangentielle déterminée par les angles α, β, γ, la courbure dépend exclusivement des raisons de proportionnalité suivant lesquelles commence la génération simultanée des accroissements $(\Delta\alpha, \Delta\sigma)$, $(\Delta\beta, \Delta\sigma)$, $(\Delta\gamma, \Delta\sigma)$. On sait de plus que ces raisons ont pour valeurs respectives les quotients $\frac{d\alpha}{d\sigma}$, $\frac{d\beta}{d\sigma}$, $\frac{d\gamma}{d\sigma}$. Les équations qui précèdent montrent donc, avec évidence, que là où deux courbes ont même tangente, l'égalité de courbure implique l'identité des différentielles d^2x, d^2y, d^2z, et réciproquement [1].

La déduction que nous venons d'établir est susceptible d'applications nombreuses. Elle offre, dans toutes, et au plus haut degré, l'avantage important d'une grande simplicité, jointe à une entière rigueur; donnons-en un exemple.

[1] Pour le voir, il suffit d'observer que l'on a en général

$$d\sigma\, d^2\sigma = dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z,$$

ce qui permet d'éliminer $d^2\sigma$ sans introduire aucune variable nouvelle.

Digitized by Google

Courbure des surfaces

65. Soit une surface

$$z = F(x, y).$$

Pour abréger, nous représenterons par p et q les dérivées partielles du premier ordre $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$, et par r, s, t, les dérivées partielles du second ordre $F''_x(x, y)$, $F''_{x,y}(x, y)$, $F''_y(x, y)$.

Soit un point quelconque pris sur la surface. En ce point, où nous supposons l'origine des coordonnées transportée, le plan tangent a pour équation

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad dz - pdx - qdy = o;$$

on a, d'ailleurs, pour équation différentielle du second ordre,

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad d^2z - pd^2x - qd^2y = rd^2x + 2sdxdy + tdy^2.$$

Considérons le cercle osculateur à une section plane faite sur la surface, pour le point dont il s'agit, et quel que soit ce cercle, concevons-le tracé sur la sphère.

$$(3) \ldots\ldots\ldots \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \rho^2;$$

par hypothèse, la sphère passe par l'origine, et l'on peut l'assujettir à toucher en ce point la surface donnée. On a donc, d'abord,

$$a^2 + b^2 + c^2 = \rho^2;$$

puis, différentiant l'équation (3)

$$(4) \ldots\ldots\ldots \quad (x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz = o,$$

et posant $x = o$, $y = o$, $z = o$,

$$adx + bdy + cdz = o.$$

De là résulte, eu égard à l'identité du plan représenté par cette équation, et du plan tangent fourni par l'équation (1)

$$\frac{a}{c} = -p, \quad \frac{b}{c} = -q;$$

Digitized by Google

il vient donc, en substituant dans l'expression de ρ,

$$\rho = c\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Veut-on maintenant que pour deux sections quelconques faites par un même plan, l'une sur la surface donnée, l'autre sur la sphère, le point de contact devienne un point d'osculation? Il faut exprimer que, pour chacune de ces deux sections, la courbure, en ce point, est la même de part et d'autre.

Différentions, en conséquence, l'équation (4) et posons $x = o$ $y = o$, $z = o$, dans le résultat de la différentiation. Il vient ainsi

$$ad^2x + bd^2y + cd^2z = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2;$$

ou remplaçant a et b par leurs valeurs

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad d^2z - pd^2x - qd^2y = \frac{d\sigma^2}{c};$$

observons que, si le plan sécant est déterminé, les quantités dx, dy, dz le sont également. Donc, aussi, pour faire coïncider les équations de courbure (2) et (5), il suffit d'écrire

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d\sigma^2}{c} = rdx^2 + 2s\,dxdy + tdy^2,$$

et l'on en déduit *immédiatement*

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \rho = \frac{d\sigma^2\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{rdx^2 + 2s\,dxdy + tdy^2}.$$

Cela posé, s'il s'agit d'une section normale, la section qui lui correspond dans la sphère est un grand cercle, et elle a pour rayon de courbure le rayon ρ de la sphère. S'agit-il au contraire d'une section oblique, la section correspondante est un petit cercle. Néanmoins la sphère, sur laquelle ce cercle est tracé, ne change pas, si les quantités dx, dy, dz, restent les mêmes, c'est-à-dire si la section oblique a même tangente que la section normale. Or, en ce cas, désignant par ε l'angle des deux sections et par R le rayon du petit cercle, on a évidemment,

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad R = \rho \cos \varepsilon.$$

Digitized by Google

Donc, pour toute section normale, le rayon de courbure est fourni par l'équation (7), et, pour toute section oblique ayant même tangente, par l'équation (8).

Que l'on compare ces diverses solutions à celles que fournissent les méthodes ordinaires, et l'on devra convenir que, tout en gagnant sous le double rapport de la facilité des déductions et de la rigueur algébrique, nous sommes parvenus à acquérir des notions plus précises et plus approfondies.

Dans le dernier exemple, nous avons fait usage des différentielles du second ordre. Il convient qu'avant de terminer, nous indiquions en quelques mots le sens qui s'attache en général à ces différentielles, ainsi qu'à celles des ordres supérieurs.

Différentielles des ordres supérieurs.

66. Reprenons l'équation différentielle

$$dy = f'(x)\,\Delta x,$$

et imaginons que la valeur attribuée à Δx soit quelconque, mais constante.

L'expression $f'(x)\,\Delta x$ peut alors être considérée comme variant avec l'origine de l'intervalle Δx. En ce cas l'on prend, pour objet direct de spéculation, l'étude des changements que subit, avec cette origine, le rapport suivant lequel *commence* la génération simultanée des accroissements, et rien n'empêche qu'on n'opère sur le produit $f'(x)\,\Delta x$, comme on l'a fait d'abord sur la fonction donnée $y=f(x)$.
De là résulte, en différentiant,

$$d.\,dy = f''(x)\,\Delta x^2.$$

On aurait de même

$$d.\,d.\,dy = f'''(x)\,\Delta x^3,$$

et ainsi de suite, indéfiniment.

En général, on rappelle par un indice le nombre des différentiations

effectuées successivement, et l'on a, pour la différentielle de l'ordre n,

$$d^n y = f^n(x)\,\Delta x^n,$$

Les notions qui précèdent peuvent suffire, en ce qui concerne la définition des différentielles des ordres supérieurs. Cependant, elles ne donnent point une idée précise de ce que sont ces différentielles par rapport aux différences du même ordre qui leur correspondent, et, ne fût-ce que par ce motif, il ne saurait être sans utilité d'établir, pour une différentielle d'un ordre quelconque, l'interprétation directe dont elle est immédiatement susceptible.

Nous avons établi n° 49 que lorsque la dérivée de l'ordre n, $f^n(x)$ se résout en une constante, l'on a

$$\Delta^n y = f^n(x)\,\Delta x^n,$$

et, généralement, dans le cas contraire,

$$\Delta^n y = \Delta x^n\,[f^n(x) + \xi],$$

ξ étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx.

De là résultent, comme conséquences faciles à démontrer, sinon tout à fait évidentes, les énoncés suivants :

1° *C'est suivant une raison déterminée, et exprimée, pour chaque origine, par la valeur correspondante de la dérivée $f^n(x)$, que commence la génération simultanée des grandeurs $\Delta^n y$, Δx^n;*

2° *Dans le cas des fonctions algébriques rationnelles et entières de l'ordre n, cette raison est constante : elle est nulle pour les mêmes fonctions d'un ordre inférieur. Sauf ces exceptions, elle est toujours variable avec x dans l'intervalle Δx.*

Cela posé, considérons une fonction quelconque autre que celles qui rentrent dans les exceptions précitées; si *l'on suppose* pour cette fonction que la dérivée de l'ordre n conserve dans toute l'étendue de l'intervalle Δx la valeur particulière qu'elle y affecte à l'origine, la différence de l'ordre n *correspondante à cette hypothèse* est généralement autre que la différence effective $\Delta^n y$. Pour l'en distinguer, on lui donne le nom de *différentielle,* et l'on

Digitized by Google

substitue à la caractéristique Δ la caractéristique d. L'on a ainsi et simultanément

$$\Delta^n y = \Delta x^n \left[f^n(x) + \xi \right] = \Delta x^n \overset{n}{\mathbf{M}}{}_x^{x+\Delta x} f^n(x).$$

$$d^n y = \Delta x^n . f^n(x).$$

On voit, par ces détails très-simples, que la définition, donnée d'abord pour la différentielle du premier ordre, s'étend d'elle-même aux différentielles des ordres supérieurs, la différentielle de l'ordre n n'étant, en général, qu'une différence ordinaire du même ordre *prise dans une hypothèse particulière*. Quant à cette hypothèse, voici en quoi elle consiste :

On sait que la raison de proportionnalité, suivant laquelle *commence* la génération simultanée des grandeurs $\Delta^n y$, Δx^n varie incessamment dans l'intervalle Δx. Cela posé, au lieu de considérer *ce qui a lieu effectivement,* c'est-à-dire la génération complexe qui correspond à la succession non interrompue *des valeurs toujours changeantes et toujours transitoires* de la raison dont il s'agit, on *suppose* que cette même raison, *devenue permanente,* persiste dans la valeur particulière qu'elle affecte à l'origine des accroissements. *A cette hypothèse* répond une différence ordinaire de l'ordre n exprimée par le produit $f^n(x)\ \Delta x^n$ et constituant, par rapport à la fonction donnée, la différentielle du même ordre $d^n y$. A ce point de vue la différentielle n'est qu'une différence ordinaire. Toutefois elle ne doit pas être confondue avec la différence effective $\Delta^n y$. De là le changement de caractéristique. Il accuse à la fois la distinction qui doit être maintenue entre les grandeurs $\Delta^n y$ et $d^n y$ et le lien de dépendance qui les détermine l'une par l'autre, et réciproquement.

D'après ce qui précède, il est visible que les formules générales (18) et (37) des numéros (48) et (50) peuvent s'écrire très-simplement à l'aide des différentielles des ordres supérieurs. Suppose-t-on, par exemple, que la fonction donnée soit développable en série convergente d'après la formule de Taylor? L'on a dans ce cas

(1) . . . . $$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{1.2} + \frac{d^3 y}{1.2.3} + \text{etc.} + \frac{d^n y}{1.2\ldots n} + \text{etc.}$$

et plus généralement

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta^n y = \left\{ {n \atop n} \right\} d^n y + \left\{ {n+1 \atop n} \right\} d^{n+1} y + \left\{ {n+2 \atop n} \right\} d^{n+2} y + \text{etc.}$$

Nous avons d'ailleurs démontré que, dans tous les cas possibles, les équations (1) et (2) subsistent identiquement, pourvu qu'on arrête les développements avant la première des différentielles qui cesse d'être continuè, et qu'on les complète par le terme sommatoire dont nous avons donné l'expression rigoureuse. Ce terme sommatoire, lorsqu'on s'arrête au terme de rang p, $\left\{ {p \atop n} \right\} d^p y$, a pour valeur exacte

$$\frac{\Delta x}{1.\,2 \ldots p} \sum_{m=0}^{m=n-1} (-1)^m \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots m} (n-m) \mathbf{M}_x^{x+(n-m)\Delta x} (z-x)^p f^{p+1}(x).$$

La forme sous laquelle nous venons d'écrire les équations (1) et (2) peut être considérée comme résumant cette étude. Elle tranche nettement avec la méthode des infiniment petits, et met en évidence l'absurdité radicale de cette conception qui fait évanouir, les unes devant les autres, les différentielles d'ordres différents.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

		Pages.	Numéros.
Exposé général		3	
Analyse succincte	du chapitre I[er]	4	
	du chapitre II[me]	5	
	du chapitre III[me]	7	
	du chapitre IV[me]	9	
Méthode des fluxions comparée à notre méthode		11	

Chapitre I[er]. — *Démonstration* à priori *de l'équation fondamentale*

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

		Pages.	Numéros.
Remarque sur les valeurs *effectives* et sur les valeurs *limites*		16	2
Conditions supposées remplies par la fonction $y = f(x)$		17	3 à 5
Recherche des diverses conditions que peut subir le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable		20	6
Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut-il être indépendant	de x et de h. 1[er] cas	20	7
	de h. 2[me] cas	22	9
	de x. 3[me] cas	23	10
Conséquences premières		25	11
Observations sur la variation du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$		25	12 à 13
1[re] Question à résoudre		27	14
2[me] Question à résoudre		29	15 à 16
3[me] Question à résoudre		32	17 à 20
Résumé		40	21
Conclusion		42	22
Continuité générale de la fonction dérivée $f'(x)$		43	23 à 26
Résumé général du chapitre I[er]		50	27

Chapitre 2[me]. — *Définition et interprétation de l'équation différentielle*

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

	Pages.	Numéros.
Le lien de dépendance, qui s'étend jusqu'à l'origine des accroissements Δy et Δx, se résout, à cette origine, en une loi générale de proportionnalité	53	28 à 30

Digitized by Google

	Pages.	Numéros.
Image sensible du mode de génération de l'accroissement Δy.	60	31 à 33
Définition de la différentielle	64	34 à 35
Conséquences	67	36 à 38

CHAPITRE III^me^. — *Applications algébriques du théorème fondamental*

$\lim \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$.	70	39
Règle unique et générale de la dérivation	71	40
Conséquences	72	41
Emploi des dérivées dans l'analyse algébrique.	74	42
Théorème fondamental $\Delta y = \Delta x \, \mathbf{M}_x^{x+\Delta x} f'(x)$	75	43
Relations générales entre les valeurs moyennes des dérivées successives . . .	77	44
Conséquences. $f(z) = f(x) + \dfrac{z-x}{1} f'(x) + \text{etc.} + \dfrac{(z-x)^n}{1.2\ldots n} f^n(x)$ $+ \dfrac{z-x}{1.2\ldots n} \mathbf{M}_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x)$.	79	45
Applications générales. Formules de Taylor et de Mac-Laurin	79	46 à 47
Remarque curieuse sur la discontinuité de θ dans l'équation $\Delta y = \Delta x f'(x+\theta\Delta x)$.	81	48
Différence des ordres supérieurs et *moyennes multiples*	84	49
Formule générale $\Delta^n y = \left\{ {n \atop n} \right\} \Delta x^n f^n(x) + \left\{ {n+1 \atop n} \right\} \Delta x^{n+1} f^{n+1}(x) + \text{etc.}$ . .	86	50
Relations curieuses entre les moyennes simples et les moyennes multiples . .	89	51
Vérification de la formule $\Delta^n y = \left\{ {n \atop n} \right\} \Delta x^n f^n(x) + \text{etc.}$, et remarques. . .	89	52

CHAPITRE IV^me^. — *Applications de l'équation* $dy = f'(x) \Delta x$.

Définition exacte et complète de la différentielle. Discussion	92	53 à 54
Nature intime de la courbe démontrée *a priori*	96	55 à 57
Conditions intimes du mouvement d'un point	102	58
Applications du second théorème du n° 36	102	59
Rôle assigné au calcul différentiel	104	60
Autres applications générales	106	61
Tangente et plan normal à une courbe	107	62
Plan tangent à une surface	109	63
Courbure des courbes	109	64
Courbure des surfaces	111	65
Différentielles des ordres supérieurs	113	66
Formule générale $\Delta^n y = \left\{ {n \atop n} \right\} d^n y + \left\{ {n+1 \atop n} \right\} d^{n+1} y + \text{etc.}$	116	66

FIN.

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR UNE

NOUVELLE MÉTHODE D'APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

A LA RECHERCHE

DES PROPRIÉTÉS DE L'ÉTENDUE,

PAR

J.-B. BRASSEUR,

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE.

(Lu à la séance du 3 décembre 1853.)

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR UNE

NOUVELLE MÉTHODE D'APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

A LA RECHERCHE

DES PROPRIÉTÉS DE L'ÉTENDUE.

INTRODUCTION.

Tout le monde sait que la géométrie descriptive fournit des méthodes variées pour transformer graphiquement une figure qui réunit les trois dimensions en une figure plane, et qu'elle fait connaître les dépendances qui existent entre la figure primitive et la figure transformée. Par cela seul, elle constitue une science propre à rechercher et à démontrer les propriétés de l'étendue; car tout moyen de démonstration se réduit, en dernière analyse, à transformer une difficulté en une autre que l'on sache résoudre.

Aussi, en examinant attentivement une épure de géométrie descriptive, construite en vue d'un résultat particulier, il est presque toujours possible d'en déduire, par cette comparaison, des propriétés géométriques dont l'importance scientifique est à celle de ce résultat particulier comme un résultat algébrique est à un résultat arithmétique.

Digitized by Google

Quant à la démonstration de ces mêmes propriétés, soit par la géométrie élémentaire, soit par la géométrie analytique, elle serait le plus souvent, si pas impossible, du moins excessivement difficile, et, dans tous les cas, très-compliquée. Or, de grandes difficultés ou de grandes complications dans la solution d'une question sont, presque toujours, la preuve que cette question n'est pas du domaine de la science par laquelle on a cherché à la résoudre.

Le domaine de la géométrie descriptive, ainsi que l'indique le titre que le célèbre Monge lui a donné, embrasse les propriétés descriptives ou de position, et l'on peut dire, avec le savant M. Olivier, que la géométrie descriptive est toute-puissante lorsqu'il ne s'agit que de démontrer des propriétés de cette espèce.

Ajoutons ici que les propriétés descriptives ou de position, par cela même qu'elles forment image, sont en général plus faciles à énoncer et à retenir, et que, par ce motif, leur exposition, quand la chose est possible, devrait précéder celle des propriétés métriques; d'ailleurs, les propriétés descriptives une fois connues, faciliteront la recherche de ces dernières.

En général, la discussion d'une épure conduira toujours à une propriété géométrique, lorsque l'une des deux ou toutes les deux projections du résultat cherché ne varient pas, en faisant varier d'une certaine manière, dans l'espace, soit tout ou partie des données de la question, soit les quantités auxiliaires dont on s'est servi pour la résoudre.

C'est ainsi que, par un examen attentif de l'épure de l'intersection de deux cônes, on reconnaît que les sommets de ces cônes peuvent tous deux changer d'une certaine manière de position dans l'espace, sans que la projection horizontale de cette intersection soit affectée de ce changement. Ce fait conduit à la propriété géométrique suivante :

« Si les sommets de deux cônes à traces horizontales constantes se meuvent sur deux verticales respectivement, de manière que la trace horizontale de la droite qui unit ces sommets reste fixe, alors la courbe à double courbure, intersection des deux cônes, décrira un cylindre vertical. »

C'est ainsi encore que dans l'épure du point de rencontre d'une droite avec un plan, les deux projections de ce point restent les mêmes pour

Digitized by Google

toutes les positions du plan auxiliaire que l'on doit mener par la droite. Ce fait conduit également à une propriété très-générale que nous croyons inutile d'énoncer ici.

Sans vouloir multiplier ces exemples, ce qui serait facile, nous insisterons sur cette considération importante : que la variation des données d'une question, alors que l'une ou l'autre projection du résultat n'est pas affectée de cette variation, est, en géométrie descriptive, aussi féconde en propriétés utiles que la variation des constantes arbitraires l'est en géométrie analytique.

Dans l'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue, deux difficultés se présentent : la première, c'est d'expliquer les constructions de l'épure; la seconde, c'est d'énoncer la proposition qui en découle.

Pour éviter les longueurs auxquelles entraîne l'explication d'une épure, il faut nécessairement supposer le lecteur familiarisé avec les constructions graphiques de la géométrie descriptive, et se borner à donner la solution de la question dans l'espace, en indiquant la manière dont les plans de projection doivent être disposés par rapport aux données, pour que l'épure mette en évidence la propriété que l'on a en vue de démontrer.

Quant à la difficulté d'énoncer cette propriété, difficulté qui naît du grand nombre de lignes de l'épure, on ne peut y obvier, dans la plupart des cas, qu'en classant par *systèmes* les lignes qui entrent dans l'épure, et en définissant ces mêmes systèmes. Et si nous avons réussi à revêtir les propriétés démontrées dans le présent mémoire de la forme simple et laconique des énoncés de la géométrie élémentaire, c'est à cette classification par systèmes que nous le devons. Enfin, pour nous résumer sur l'importance que nous attachons aux mots *systèmes*, *transformations*, et *énoncés*, nous dirons que ces mots impliquent, à nos yeux, toute une géométrie supérieure.

Quoi qu'il en soit, et malgré les belles applications qui ont été faites de la géométrie descriptive par ce que nous nommerons la discussion d'une épure, les propriétés qu'elle conduit à démontrer sont en général isolées et sans corrélation, et l'on voit difficilement comment il faudrait

Digitized by Google

s'y prendre pour arriver à la déduction d'un ensemble de propriétés descriptives de l'étendue ayant entre elles un enchaînement.

Or, si l'on considère qu'une propriété descriptive n'est en réalité que la définition d'un lieu géométrique, on comprendra qu'une règle générale qui enseignerait à définir, par des relations descriptives, des lieux géométriques de tous les degrés, constituerait déjà une méthode puissante dans l'étude des propriétés de l'étendue.

Le but que nous nous sommes proposé d'atteindre dans ce mémoire est de faire connaître un ensemble de nouvelles propriétés projectives du point, de la droite et du plan, et de déduire de ces propriétés, entre autres applications dont elles sont susceptibles, la règle générale dont il vient d'être question pour la définition d'un lieu géométrique.

Nous divisons ce mémoire en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous exposons les propriétés des plans bissecteurs; nous développons ensuite les théorèmes fondamentaux conduisant à la définition de lieux géométriques de tous les degrés, soit par l'intersection de deux systèmes de lignes, soit par un seul système de lignes considérées comme enveloppées de ces lieux.

Dans le second chapitre, nous définissons par des considérations descriptives, certains systèmes de lignes, principalement ceux que l'on peut former avec la droite, et nous énonçons les surfaces que ces lignes, considérées comme projections, peuvent représenter dans l'espace. Enfin, nous donnons des applications à la définition de lieux géométriques de tous les degrés.

Dans le troisième chapitre, nous examinons les systèmes de lignes droites que l'on peut définir par la relation métrique la plus simple, la proportion. Nous indiquons de même les surfaces que ces lignes représentent dans l'espace, d'où nous concluons quels sont les lieux géométriques formés par l'intersection de ces mêmes systèmes de lignes.

Digitized by Google

CHAPITRE PREMIER.

PREMIÈRE SECTION.

NOUVELLES PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DÉDUITES DE LA CONSIDÉRATION DES PLANS BISSECTEURS.

1. — Nous conviendrons de nommer *plan bissecteur* B′ celui qui divise en deux parties égales l'angle de deux plans de projection, et *plan bissecteur* B celui qui divise en deux parties égales le supplément de cet angle.

Ces deux plans bissecteurs se coupent toujours à angle droit, quel que soit l'angle que forment les deux plans de projection, et ils sont les plans diamétraux principaux de l'ensemble des deux plans de projection, considérés comme surface du second degré.

Nous prévenons qu'il s'agit toujours dans ce mémoire de projections orthogonales, quel que soit l'angle des plans de projection; et qu'il faut toujours considérer le plan vertical rabattu, de l'avant en arrière, sur le plan horizontal.

§ I.

Propriétés projectives du plan bissecteur B.

2. — Tout point de l'espace dont les deux projections coïncident sur une épure, est situé dans le plan bissecteur *B*, et réciproquement.

D'où l'on déduit que tous les points de l'espace dont les deux projections de chacun coïncident sur une épure, sont tous situés dans le plan bissecteur *B*.

3. — Nous nommerons quelquefois les deux projections coïncidentes d'un point situé dans le plan bissecteur *B*, la projection double de ce point.

Digitized by Google

4. — Il suit de (2) que le point de rencontre des deux projections d'une droite ou d'une ligne quelconque sur une épure, est la projection double du point de rencontre de cette droite ou de cette ligne avec le plan bissecteur *B*.

5. — Si une droite est perpendiculaire à un plan de projection, le point dans lequel se projette la droite est la projection double du point où cette droite rencontre le plan bissecteur *B*.

Nous nommerons quelquefois la projection double du point de rencontre d'une droite avec le plan bissecteur *B*, la trace principale de cette droite.

6. — Toute droite de l'espace dont les deux projections coïncident sur une épure, est située dans le plan bissecteur *B*, et réciproquement. Cependant une droite dont les deux projections coïncident avec une perpendiculaire à la ligne de terre, peut ne pas être située dans le plan bissecteur *B*; ce cas sera examiné plus loin.

7. — Pour qu'une droite de l'espace rencontre une autre droite, située dans le plan bissecteur *B*, il faut que les deux projections de la première se coupent en un point de la projection double de la seconde. Autrement, il faut que la trace principale de la première droite se trouve sur la projection double de la seconde droite.

8. — Toute droite de l'espace dont les deux projections sont parallèles entre elles sur une épure, est parallèle au plan bissecteur *B*, et réciproquement.

9. — L'intersection d'un plan quelconque avec le plan bissecteur *B*, est une droite dont la projection double passe par le point d'intersection des deux traces du plan proposé.

Nous nommerons quelquefois cette projection double, la trace principale de ce plan.

10. — Il est évident que la trace principale d'un plan renferme les traces principales de toutes les droites situées dans ce plan.

11. — Lorsqu'un plan se projette suivant sa trace sur l'un des plans de projection, son intersection avec le plan bissecteur *B* se projette suivant la même trace.

Digitized by Google

12. — Les deux projections de chaque point d'une courbe située dans le plan bissecteur B coïncident, et partant les deux projections d'une courbe située dans le plan bissecteur B coïncident également.

Nous nommerons les deux projections coïncidentes d'une courbe de l'espace située dans le plan bissecteur B, la projection double de cette courbe.

Le degré de cette projection double est le même que celui de la courbe de l'espace.

c étant la projection double d'une courbe située dans le plan bissecteur B, nous représenterons cette courbe de l'espace par la notation (c, c), qui fait voir assez bien que les deux projections de la courbe de l'espace sont les mêmes.

Réciproquement, toute courbe de l'espace dont les deux projections de chaque point coïncident, est située dans le plan bissecteur B.

§ II.

Propriétés projectives du plan bissecteur B'.

13. — Tout point de l'espace dont les deux projections sont à égale distance de la ligne de terre, c'est-à-dire symétriquement placées par rapport à cette ligne, est situé dans le plan bissecteur B', et réciproquement.

14. — Si une droite est située dans le plan bissecteur B', ses deux projections se coupent en un même point de la ligne de terre et sont symétriques par rapport à cette ligne.

Réciproquement, toute droite de l'espace dont les deux projections passent par un même point de la ligne de terre et sont symétriques par rapport à cette ligne, est située dans le plan bissecteur B'.

15. — Toute droite de l'espace, dont les deux projections sont également inclinées sur la ligne de terre, sans se rencontrer en un point de cette ligne, est parallèle au plan bissecteur B', et réciproquement.

16. — Les deux projections de l'intersection d'un plan quelconque

Digitized by Google

avec le plan bissecteur *B'*, passent par le point d'intersection des deux traces du plan proposé, et sont également inclinées ou symétriques par rapport à la ligne de terre.

17. — Les deux projections d'une courbe située dans le plan bissecteur *B'*, sont deux autres courbes symétriques par rapport à la ligne de terre. Ces deux courbes sont du même degré et du même genre que la courbe proposée.

Réciproquement, si les deux projections d'une courbe de l'espace sont symétriques par rapport à la ligne de terre, cette courbe sera située dans le plan bissecteur *B'*.

18. — Il suit de cette dernière propriété que, si deux courbes tracées sur un plan sont symétriques par rapport à une droite *D* située dans ce même plan, elles seront les projections d'une courbe de l'espace située dans le plan bissecteur *B'*, à la condition de prendre la droite *D* pour ligne de terre et chaque paire de points symétriques des deux courbes pour les deux projections d'un point de l'espace.

19. — Une courbe *c* qui a un diamètre principal, sera les deux projections d'une courbe de l'espace située dans le plan bissecteur *B'*, si l'on prend le diamètre pour ligne de terre, et chaque paire de points symétriques de la courbe proposée pour les projections de deux points de l'espace. Ainsi, *a*, *a'* étant les deux extrémités d'une corde conjuguée au diamètre, les deux points de l'espace (a, a'), (a', a) appartiennent chacun à la courbe de l'espace mentionnée [1].

20. — Nous représentons une courbe de l'espace située dans le plan bissecteur *B'*, par la notation (*c*, ɔ), qui rappelle assez bien que les deux projections *c* et ɔ d'une telle courbe sont symétriques par rapport à la ligne de terre.

[1] Dans cette notation, la première lettre entre parenthèses représente la projection horizontale et la seconde, la projection verticale.

Digitized by Google

§ III.

Propriétés projectives d'une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

21. — Quand nous représentons une droite de l'espace par la notation (abc ..., $a'b'c'$ ...), cela signifie que a, b, c ..., sont les projections horizontales d'un certain nombre de points consécutifs de cette droite, et a', b', c' ..., les projections verticales correspondantes de ces mêmes points. Cela posé, si une droite de l'espace (abc ..., $a'b'c'$ ...) est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, alors ses deux projections coïncident avec une même perpendiculaire à cette ligne et l'on aura toujours la proportion $ab : a'b' = bc : b'c' =$ etc.; réciproquement, si cette proportion existe pour un certain nombre de points situés dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, ces points seront en ligne droite dans l'espace.

22. — Soit une droite de l'espace (abc ..., $a'b'c'$ ...), située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et parallèle au plan bissecteur B, cette droite est alors également inclinée sur les deux plans de projection et jouit des propriétés suivantes :

1° Les deux projections de chacun de ses segments sont égales, c'est-à-dire que l'on a : $ab = a'b'$, $bc = b'c'$, $cd = c'd'$, etc.;

2° Les projections horizontales a, b, c ..., et les projections verticales correspondantes a', b', c' ..., se succèdent dans le même sens sur l'épure.

Ces propriétés subsistent à l'évidence si la droite est située dans le plan bissecteur B, au lieu de lui être parallèle.

23. — Soit une droite de l'espace (abc ..., $a'b'c'$ ...), située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et parallèle au plan bissecteur B'; cette droite est, comme dans le cas précédent, également inclinée sur les deux plans de projection, et jouit des quatre propriétés suivantes :

1° Les deux projections d'un segment quelconque de cette droite sont égales, c'est-à-dire que l'on a : $ab = a'b'$, $bc = b'c'$, $cd = c'd'$, etc.;

Digitized by Google

2° Les projections horizontales *a, b, c, ...*, se succèdent sur l'épure en sens inverse des projections verticales *a', b', c', ...*;

3° Les deux projections d'un point quelconque de cette droite, étant prises l'une pour l'autre, représentent un autre point de l'espace qui appartient toujours à la même droite.

Nous ferons voir une autre fois qu'une perspective quelconque des projections horizontales et verticales de trois points quelconques, pris sur une telle droite, sont six points en involution.

4° Les deux traces, horizontale et verticale de cette droite, coïncideront sur l'épure; d'où il suit :

Que si les génératrices d'un cylindre sont perpendiculaires à la direction de la ligne de terre et parallèles au plan bissecteur *B'*, les deux traces de ce cylindre coïncideront sur l'épure; de plus, d'après (25), les deux traces d'un plan tangent quelconque à ce cylindre coïncideront également.

Les propriétés qui précèdent subsistent également si la droite est située dans le plan bissecteur *B'* au lieu de lui être parallèle.

24. — Tout plan conduit suivant une droite perpendiculaire à la ligne de terre et située dans le plan bissecteur *B*, aura ses deux traces également inclinées sur la ligne de terre, sans toutefois coïncider sur l'épure, et réciproquement.

25. — Tout plan conduit suivant une droite perpendiculaire à la ligne de terre et située dans le plan bissecteur *B'*, aura ses deux traces en ligne droite sur l'épure.

26. — Réciproquement, tout plan dont les deux traces coïncident sur une épure, coupe le plan bissecteur *B'* suivant une droite perpendiculaire à la ligne de terre; d'où suit :

1° Que la droite qui relie, sur une épure, les deux traces d'une droite quelconque de l'espace, est à la fois la trace horizontale et la trace verticale d'un plan qui passe par cette droite de l'espace et qui coupe le plan bissecteur *B'* suivant une perpendiculaire à la ligne de terre;

2° Que tous les plans de l'espace ayant leurs deux traces en ligne droite sur l'épure, sont tous parallèles à une même droite, perpendiculaire à la ligne de terre et située dans le plan bissecteur *B'*.

Digitized by Google

27. — Nous terminerons ces considérations générales par la solution du problème suivant, dont nous aurons besoin par la suite :

PROBLÈME. — *Étant données les projections de deux points d'une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, construire la projection double du point où elle rencontre le plan bissecteur* B, *ou, en d'autres mots, construire la trace principale de cette droite.*

SOLUTION. — Soient (a, a'), (b, b'), deux points d'une droite $(ab, a'b')$ située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Par cette droite $(ab, a'b')$ et par un point (p, p'), pris arbitrairement dans l'espace, imaginons un plan. Comme les trois droites $(ab, a'b')$, $(pa, p'a')$, $(pb, p'b')$ appartiennent à ce même plan, il s'ensuit que leurs traces principales sont en ligne droite. D'après cela, la droite qui unit les traces principales des deux droites $(pa, p'a')$, $(pb, p'b')$, coupera la droite ab ou son prolongement en un point qui sera la trace principale de la droite $(ab, a'b')$, c'est-à-dire la projection double du point de rencontre de la droite $(ab, a'b')$ avec le plan bissecteur B.

28. — Le résultat de ce problème étant indépendant de la position du point (p, p'), il en résulte cette proposition :

PROPOSITION. — Dans deux triangles, dont les bases sont sur une même droite D et dont les sommets opposés aux bases se meuvent sur une droite quelconque parallèle à D, les deux côtés de l'un des deux triangles forment, avec les deux côtés de l'autre, un quadrilatère dont les diagonales passent respectivement par deux points fixes de la droite D.

DEUXIÈME SECTION.

APPLICATION A LA DÉFINITION DE LIEUX GÉOMÉTRIQUES DE TOUS LES DEGRÉS.

29. — THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Étant donnée une surface d'un degré quelconque, si l'on trace sur cette surface des lignes arbitraires et qu'on les projette orthogonalement sur deux plans, rectangulaires ou non, les points, s'il y en a, où*

Digitized by Google

les deux projections de chacune de ces lignes se rencontreront sur l'épure, appartiendront à un lieu géométrique dont le degré sera le même que celui de la surface proposée.

Démonstration. — Il résulte, en effet, de la propriété (4) que chaque point du lieu géométrique mentionné dans l'énoncé, est à la fois la projection horizontale et la projection verticale d'un point de la section faite dans la surface proposée par le plan bissecteur *B*. Or, le degré de cette section, qui est le même que celui de sa projection, est aussi celui de la surface.

Pour que les deux systèmes de lignes dont il est question puissent se couper, il faut donc que les plans de projection soient disposés de manière que leur plan bissecteur *B* coupe la surface.

Construction de la tangente. — *A chaque point du lieu géométrique correspond un point de la surface; cela posé, la tangente en un point de ce lieu et les deux traces du plan tangent au point correspondant de la surface, doivent concourir en un même point de la ligne de terre. Il suffit donc, dans chaque cas, de construire une seule des deux traces de ce plan tangent et de la prolonger jusqu'à sa rencontre avec la ligne de terre pour avoir un second point de la tangente.*

30. — Pour appliquer ce théorème à la définition de lieux géométriques d'un degré donné, tout consiste à tracer, sur une surface du même degré, un système de lignes suivant une certaine loi; à définir les deux systèmes de projections qui résultent du système proposé; et, enfin, à énoncer que ces deux systèmes de lignes se coupent, deux à deux, sur un lieu géométrique du même degré.

Il ressort du même théorème que si l'on veut obtenir un lieu géométrique d'un degré quelconque par l'intersection de deux systèmes de droites, il faudra connaître une surface réglée du même degré.

La définition de ces deux systèmes de lignes et l'énoncé du degré du lieu géométrique, intersection de ces deux systèmes, constituent, dans chaque cas, un véritable théorème et pour la forme et pour le fond.

31. — Théorème réciproque. — *Si l'on a, sur un même plan, deux systèmes de lignes qui se correspondent deux à deux d'après une loi quelconque, pour connaître le degré du lieu géométrique, intersection de ces deux systèmes de lignes,*

Digitized by Google

on doit chercher si, en considérant ces deux systèmes de lignes comme les deux projections d'un système unique de lignes de l'espace, ces dernières ne peuvent pas faire partie d'une certaine surface dont le degré serait connu; dès lors, le lieu géométrique, intersection des deux systèmes de lignes proposés, sera du même degré que la surface, et l'on saura lui mener une tangente, si l'on sait construire le plan tangent à cette surface.

32. — Dans le cas où un lieu géométrique étant déterminé par l'intersection de deux systèmes de lignes, l'on ne trouve pas dans l'espace un système unique de lignes appartenant à une même surface, et dont les systèmes proposés seraient respectivement les projections horizontales et les projections verticales, on pourra recourir à la règle suivante, laquelle, à défaut de faire connaître le degré du lieu géométrique, donnera au moins le moyen d'y mener une tangente.

Théorème. — *Si deux systèmes de lignes se correspondent deux à deux sur un plan, pour construire la tangente au lieu géométrique, intersection de ces deux systèmes de lignes, on doit chercher si ces systèmes ne peuvent pas être les projections, sur le plan, des sections faites dans deux surfaces de l'espace par une série de surfaces auxiliaires; dès lors, le lieu géométrique, intersection des deux systèmes de lignes, serait une projection de l'intersection de ces deux surfaces et la tangente à ce lieu serait la projection de l'intersection de deux plans tangents à ces surfaces.*

33. — Remarque. — Dans la construction d'un lieu géométrique par points, si l'on conserve toutes les lignes auxiliaires qui servent à construire chaque point, et que nous nommerons *lignes correspondantes*, on mettra en évidence autant de systèmes que l'on aura tracé de lignes pour déterminer un premier point. A chaque ligne, dans un de ces systèmes, en correspondra toujours une dans chacun des autres systèmes, et le lieu géométrique se trouvera être l'intersection de deux de tous ces systèmes. Dès lors, il y a lieu de chercher à appliquer les règles précédentes à ces deux systèmes de lignes pour connaître le degré de ce lieu géométrique et lui mener une tangente.

Citons un exemple :

Si l'on construit une ellipse par points en s'appuyant sur la propriété

Digitized by Google

des foyers, l'on mettra en évidence deux systèmes de circonférences concentriques, ayant respectivement pour centres les deux foyers; et si l'on fait en sorte que les rayons de l'un de ces systèmes de circonférences procèdent suivant une progression arithmétique croissante dont la raison soit r, les rayons de l'autre système de circonférences procéderont suivant une progression arithmétique décroissante dont la raison sera la même. De là une nouvelle définition des courbes du second degré par l'intersection de deux systèmes de circonférences concentriques.

Le degré de la courbe étant connu, il s'agit seulement de lui construire une tangente. Or, dans le cas actuel, le théorème (32) n'est pas applicable, car il n'existe pas dans l'espace un système de lignes, appartenant à une même surface, et dont les deux systèmes de circonférences seraient, respectivement, les projections horizontales et verticales. Il faut donc essayer le théorème (33) qui conduit effectivement au résultat cherché; car si l'on donne à chaque circonférence du premier système, une cote de hauteur égale au rayon de cette circonférence, et si l'on attribue la même cote à la circonférence correspondante du second système [1], les deux systèmes de circonférences pourront être considérés comme les projections cotées de toutes les sections faites, par des plans horizontaux, dans deux cônes de révolution dont les axes se projettent aux centres des deux systèmes de circonférences et dont les génératrices sont inclinées à 45°; l'ellipse, intersection de ces deux systèmes de circonférences, est donc la projection horizontale de l'intersection de ces deux cônes. — Au moyen de deux plans tangents à ces cônes, on aura la tangente à l'ellipse, ce qui conduit à la règle connue pour mener une tangente à cette courbe.

34. — Les considérations qui précèdent servent à définir un lieu géométrique par l'intersection de deux systèmes de lignes. — Le théorème suivant donne le moyen de définir un lieu géométrique, considéré comme enveloppe, par un seul système de lignes, ses enveloppées.

Théorème. — *La perspective du contour apparent d'une surface courbe quelconque est tangente aux perspectives de toutes les lignes qui, sur la surface, touchent*

[1] Deux circonférences appartenant respectivement aux deux systèmes sont dites correspondantes lorsque la somme de leurs rayons est constante.

Digitized by Google

ou coupent le contour apparent; et si le contour apparent est une courbe plane du degré n, *sa perspective sera une courbe du même degré. Si la ligne coupe ou touche le contour apparent en* m *points, la perspective de la ligne touchera la perspective du contour apparent en* m *points.*

35. — De ce théorème on peut déduire le corollaire suivant, dont nous ferons un usage fréquent par la suite et dont nous avons donné une démonstration directe, dans le *Bulletin de l'Académie*, en partant de la double génération rectiligne de l'hyperboloïde à une nappe :

Corollaire I. — *Les projections orthogonales sur un plan quelconque des deux systèmes de génératrices rectilignes dont sont composés le paraboloïde hyperbolique et l'hyperboloïde à une nappe, sont tangentes à une même courbe du second degré.*

D'où l'on peut déduire :

Corollaire II. — *Si deux droites tracées sur un plan sont divisées en parties respectivement proportionnelles, ces deux droites, et toutes celles qui relient les points de divisions correspondants, sont tangentes à une même courbe du second degré.*

36. — Le théorème fondamental (29) est susceptible d'être énoncé sous une autre forme que nous croyons utile d'indiquer ici :

Théorème. — *Si une courbe plane ou à double courbure, constante ou variable de forme et de grandeur, se meut dans l'espace de manière à engendrer une surface du degré* n, *le point d'intersection des deux projections de la courbe mobile décrira sur l'épure un lieu géométrique du degré* n, *auquel appartiendra le point d'intersection des deux projections de chacune des directrices de la surface.*

Ce lieu géométrique n'est autre, en effet, que la projection double de l'intersection de la surface avec le plan bissecteur B.

Si les deux projections de la courbe génératrice, pour une ou plusieurs positions de celle-ci, se rencontrent à l'infini, le lieu géométrique aura un même nombre de points à l'infini.

Si la génératrice est une droite, le lieu géométrique fourni par le point d'intersection des deux projections de la droite mobile, aura autant de points à l'infini que la droite mobile aura pris de positions parallèles au plan bissecteur B.

Car chaque fois que la droite devient parallèle au plan bissecteur *B*, ses deux projections sont parallèles, et leur point d'intersection est à l'infini.

Digitized by Google

Si une droite se meut dans l'espace de manière à décrire un plan, le point d'intersection des deux projections de la droite mobile décrira une droite. Donc, si une droite tourne tangentiellement à une même courbe plane, les deux projections de la tangente mobile se couperont sans cesse sur une même droite.

Réciproquement, pour démontrer qu'une courbe de l'espace dont on connaît la définition des projections est plane, il suffit de prouver que le lieu du point d'intersection des deux projections d'une tangente quelconque à la courbe est une ligne droite.

Dans d'autres cas, pour prouver qu'une courbe n'est pas plane, on peut recourir au principe suivant : *Une courbe est à double courbure, lorsque ses deux projections orthogonales sur deux plans qui se coupent ne sont pas des courbes à la fois de même degré et de même genre.*

Si une droite décrit dans l'espace une surface gauche du second degré, alors les deux projections de cette droite se mouvront, sur l'épure, tangentiellement à deux courbes du second degré respectivement (35, coroll. 2), *tandis que leur point d'intersection décrira une troisième courbe du second degré.*

37. — Indiquons, en passant, quelques cas particuliers de l'emploi des plans bissecteurs.

Le plan bissecteur *B* étant pris pour tableau, la perspective d'un objet dont on a les deux projections s'obtiendra par l'intersection de deux systèmes de droites. En effet, la perspective de chaque point se trouve à l'intersection des deux projections du rayon visuel de ce point. Il est vrai que ce moyen ne donne que la projection double de la perspective d'un objet et qu'il reste, pour construire le rabattement de la perspective, à réduire dans un même rapport toutes les ordonnées de cette projection double (ordonnées perpendiculaires à la ligne de terre) [1].

Les deux projections d'une courbe plane ou d'un polygone plan sont deux figures homologiques, dont le centre d'homologie est à l'infini sur une perpendiculaire à la ligne de terre; l'axe d'homologie est la projec-

[1] Ne serait-ce pas là la méthode nouvelle de perspective attribuée à Pascal, de laquelle il est dit que chaque point du tableau se construisait par l'intersection de deux lignes droites? (*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, t. XI des *Mémoires couronnés par l'Académie royale*, p. 73, § 19.

Digitized by Google

tion double de l'intersection du plan du polygone ou de la courbe plane avec le plan bissecteur *B*.

La même droite d'intersection est une sécante réelle ou idéale des deux projections de la courbe plane, selon que les deux projections se coupent ou ne se coupent pas.

En disant que les deux projections d'une courbe plane sont deux figures homologiques dont l'axe d'homologie est la trace principale du plan de la courbe, nous disons implicitement que la considération des plans bissecteurs peut apporter de grandes simplifications dans la construction d'une épure de géométrie descriptive.

Ainsi trois points de l'espace et les trois droites qui les unissent étant toujours dans un même plan, la considération des traces principales de ces droites et de leur plan donnent sur-le-champ la solution du problème :

« Étant données les projections horizontales et verticales de trois points de l'espace et la projection horizontale d'un quatrième point du même plan, construire la projection verticale du quatrième point, en n'employant que la règle. »

C'est ainsi encore que la solution du problème : « Par un point mener une droite qui en rencontre deux autres non situées dans un même plan, » n'exige, à part le tracé des données, que la construction de huit lignes droites.

38. — Terminons par quelques réflexions générales :

Les systèmes de lignes mentionnés dans les théorèmes précédents font, en géométrie synthétique, le même office que les systèmes de coordonnées rectilignes en géométrie analytique et l'on voit que la géométrie synthétique est beaucoup plus riche en systèmes de coordonnées que ne l'est la géométrie analytique.

En outre, la géométrie synthétique sait tirer un plus grand parti d'un même système de lignes considérées comme ordonnées. C'est ainsi qu'en n'ayant recours qu'à des systèmes de lignes droites, pour définir par des relations descriptives les courbes du second degré, on pourra le faire : 1° par l'intersection de deux systèmes de droites respectivement parallèles à deux droites fixes; 2° par l'intersection de deux systèmes de droites

Digitized by Google

qui concourent respectivement en deux points fixes; 3° par l'intersection d'un système de droites parallèles avec un système de droites qui concourent en un même point; 4° par un seul système de droites tangentes à une même courbe du second degré. A cela nous ajouterons que parmi les divers systèmes de lignes qui, par leurs intersections, produisent un même lieu géométrique, on pourra remarquer que plus le degré de ces lignes (ordonnées) est élevé, et plus est simple l'énoncé des conditions auxquelles doivent satisfaire ces deux systèmes de lignes pour produire ce lieu géométrique. La définition des courbes du second degré, donnée à l'article (33) vient à l'appui de cette observation [1].

Sans doute la géométrie analytique sait donner la condition pour que deux systèmes de lignes définies se coupent sur une courbe également définie; mais l'équation qui exprime ces conditions est rarement susceptible d'être énoncée géométriquement et la construction de la tangente, au moyen de son équation, approche rarement de la simplicité des constructions auxquelles conduisent les considérations géométriques.

Les théorèmes précédents énonçant des propriétés descriptives, toutes celles que nous en déduisons sont nécessairement des propriétés descriptives aussi; mais comme la plupart n'ont été démontrées que par la théorie des transversales ou par les propriétés soit du rapport harmonique, soit du rapport anharmonique, nous dirons qu'il nous semble plus conforme à l'esprit de la science d'établir des propriétés descriptives par des considérations descriptives, que de les démontrer par des considérations métriques; mais nous ajoutons que la science ne sera entière que lorsque ces mêmes propriétés pourront être démontrées par l'un et l'autre moyen.

[1] A l'appui de la même considération, nous citerons encore la définition suivante, que nous avons démontrée ailleurs :

Si un système de parallèles interceptent sur une tranversale, qui leur est perpendiculaire, des parties respectivement proportionnelles aux parties qu'un système de circonférences concentriques interceptent sur une transversale menée par leur centre, alors le système de parallèles rencontrera le système de circonférences sur une section conique (*applications des projections cotées*).

Digitized by Google

DEUXIÈME CHAPITRE.

PREMIÈRE SECTION.

DÉFINITIONS DE SYSTÈMES DE LIGNES ; LEUR SIGNIFICATION DANS L'ESPACE.

§ I.

Définitions des systèmes de lignes les plus simples que l'on peut former avec la droite : systèmes de polaires, systèmes de parallèles.

39. — Par système de polaires, nous comprenons un ensemble quelconque de droites tracées dans un même plan et partant d'un même point, que nous nommerons pôle.

40. — Par système de parallèles, nous comprenons un ensemble de droites parallèles entre elles et tracées dans un même plan. Un système de parallèles est donc un système de polaires dont le pôle est à l'infini.

41. — Par transversale d'un système de polaires, nous comprenons une droite qui coupe toutes les polaires de ce système, sauf une polaire à laquelle la transversale, dans des cas donnés, pourra être parallèle.

42. — Deux systèmes de polaires, qui dépendent l'un de l'autre, sont définis lorsque, à une polaire quelconque donnée dans l'un des deux systèmes, on peut toujours construire la ou les polaires correspondantes dans l'autre système.

43. — On dit que deux systèmes de polaires se coupent sur une droite ou sur une courbe, lorsque toutes les polaires du premier système rencontrent respectivement les polaires du second système en des points situés sur cette droite ou sur cette courbe. Les polaires qui, deux à deux, se coupent sur cette droite ou sur cette courbe, sont dites polaires correspondantes.

Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, il y a

Digitized by Google

deux polaires correspondantes qui sont parallèles à la droite proposée et deux autres polaires correspondantes qui coïncident avec la droite unissant les deux pôles.

Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, les polaires de l'un des systèmes se suivent dans le même sens ou en sens contraire des polaires correspondantes de l'autre système, selon que les deux pôles sont situés d'un même côté ou de part et d'autre de la droite proposée.

44. — Deux systèmes de polaires sont dits parallèles lorsque les polaires du premier système sont respectivement parallèles aux polaires du second système.

Chaque paire de polaires parallèles sont nommées polaires correspondantes.

Dans deux systèmes de polaires parallèles il y a deux polaires correspondantes qui coïncident avec la droite unissant les deux pôles.

45. — Deux systèmes de polaires situées dans un même plan ou dans deux plans différents, étant coupés chacun par une transversale, si les points d'intersection $a, b, c,$... etc., des polaires du premier système par leur transversale, et les points d'intersection $a', b', c',$... etc., des polaires correspondantes du second système par leur transversale, se trouvent deux à deux sur des droites parallèles entre elles, nous dirons que ces deux transversales sont reliées par un système de parallèles ou bien que les droites qui relient les deux transversales constituent un système de parallèles.

46. — On comprendra, sans qu'il soit nécessaire de les définir, ce que l'on doit entendre par deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires.

47. — Dans deux systèmes de polaires coupés chacun par une transversale, le point d'intersection des deux transversales sera souvent nommé sommet des deux transversales.

Et généralement lorsqu'il ne s'agira que du point d'intersection de deux droites, nous nommerons ce point d'intersection sommet des deux droites.

48. — Dans deux systèmes de polaires nous entendons par ligne des pôles, la droite qui unit les deux pôles.

49. — Nous désignerons un système de polaires, tantôt par la lettre

Digitized by Google

placée à son pôle, tantôt par deux lettres dont la première indiquera le pôle et la seconde la transversale. Ainsi le système de polaires p signifie le système de polaires dont le pôle est en p et le système de polaires pt signifie le système de polaires qui a pour pôle p, et pour transversale t.

§ II.

Signification géométrique dans l'espace de points et de droites situés dans un même plan.

50. — Deux points a, a', marqués sur un même plan, peuvent représenter les projections horizontale et verticale d'un point de l'espace, si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire quelconque à la droite qui unit ces deux points. Nous désignerons ce point de l'espace par la notation connue (a, a'), en convenant que la première lettre entre parenthèses représente toujours la projection horizontale et la seconde la projection verticale; de sorte que (a, a') et (a', a) représentent, dans l'espace, deux points distincts qui jouissent de la propriété d'être situés dans un même plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Si la ligne de terre passe par le milieu de la droite aa', alors les deux points de l'espace (a, a') et (a', a) sont situés dans le plan bissecteur B'.

Un seul point a marqué sur un plan peut être considéré comme les deux projections coïncidentes d'un point de l'espace. Nous représenterons un tel point de l'espace par la notation (a, a), en rappelant qu'il est toujours situé dans le plan bissecteur B.

51. — Deux droites d, d', tracées sur un plan, peuvent toujours être prises pour les projections d'une droite de l'espace, quelle que soit la droite que l'on choisisse pour ligne de terre. Nous désignerons une telle droite de l'espace par la notation (d, d'). Ici encore nous conviendrons que la première lettre entre parenthèses représente toujours la projection horizontale et la seconde la projection verticale. De sorte que (d, d') et (d', d) représentent deux droites distinctes dans l'espace, qui ont cela de particulier, qu'elles rencontrent le plan bissecteur B au même point. De

plus, le plan conduit suivant ces deux droites a ses deux traces en ligne droite sur l'épure.

Remarque. — En faisant mouvoir le plan vertical de projection parallèlement à lui-même, la ligne de terre se mouvra aussi parallèlement à elle-même ainsi que le plan bissecteur *B*, et alors *d*, *d'* seront les projections d'une droite différente pour chaque position de la ligne de terre. Toutes ces droites sont parallèles entre elles et situées dans un même plan vertical élevé suivant *d*; de plus, toutes ces droites rencontrent le plan bissecteur *B*, lequel varie pour chaque ligne de terre, sur une même verticale qui a pour projection le point de rencontre de *d* avec *d'*.

52. — Si l'on prend pour ligne de terre la bissectrice de l'angle de deux droites *d*, *d'*, les deux droites de l'espace (*d*, *d'*) et (*d'*, *d*) sont situées dans le plan bissecteur *B'*.

53. — Une seule droite *D*, tracée sur un plan, peut représenter, pour une ligne de terre quelconque, les deux projections coïncidentes d'une droite de l'espace, que nous désignerons par (*D*, *D*), en rappelant qu'elle est toujours située dans le plan bissecteur *B*.

§ III.

Diverses représentations du plan.

54. — En disant que deux systèmes de lignes représentent un plan ou une surface, nous entendons par là que les lignes d'un système sont les projections horizontales et les lignes de l'autre système les projections verticales des lignes de l'espace appartenant à un même plan ou à une même surface courbe.

55. — Deux systèmes de polaires *pt*, *p't'*, dont les transversales sont reliées par un système de parallèles à la ligne des pôles, représentent un plan passant par le point (*p*, *p'*) et par la droite (*t*, *t'*), si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la ligne des pôles.

56. — Deux systèmes de parallèles dont les transversales *t*, *t'* sont reliées par un troisième système de parallèles, représenteront respective-

Digitized by Google

ment les projections horizontales et verticales de droites de l'espace, parallèles entre elles, et qui s'appuient toutes sur la droite de l'espace (t, t'), si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire quelconque au troisième système de parallèles. Toutes ces droites de l'espace sont donc situées dans un même plan.

57. — Deux systèmes de polaires pt, pt' qui ont même pôle p et dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, représenteront un plan, c'est-à-dire les projections horizontales et verticales de droites de l'espace qui passent toutes par le point (p, p) situé dans le plan bissecteur B, et qui s'appuient sur la droite (t, t'), si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la direction des parallèles.

Ces deux systèmes ont une paire de polaires correspondantes qui coïncident avec la droite qui unit le pôle commun au sommet des deux transversales; cette droite est la trace principale du plan mentionné ci-dessus.

58. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une droite D représenteront un plan, c'est-à-dire les projections horizontales et verticales de droites de l'espace qui passent toutes par le point (p, p') et s'appuient sur la droite (D, D), située dans le plan bissecteur B, si on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la ligne des pôles.

59. — Deux systèmes de parallèles de direction différente qui se coupent sur une droite D, représenteront un plan, c'est-à-dire les projections horizontales et verticales de droites de l'espace parallèles entre elles, et s'appuyant sur la droite (D, D) située dans le plan bissecteur B, et cela a lieu, quelle que soit la droite que l'on prenne pour ligne de terre.

60. — Deux systèmes de polaires p, p' respectivement parallèles représenteront un plan, c'est-à-dire les projections horizontales et verticales de droites de l'espace parallèles au plan bissecteur B, et passant toutes par le point (p, p'), si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la ligne des pôles.

61. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une droite D représenteront un système de plans de l'espace, si l'on prend la droite D pour ligne de terre et chaque paire de polaires correspondantes pour les traces horizontale et verticale d'un même plan; tous ces plans passent par une même droite de l'espace qui a pour traces les deux pôles p, p'.

Digitized by Google

§ IV.

Différentes représentations des surfaces réglées du second degré.

62. — Deux systèmes de polaires pt, $p't'$, dont les transversales sont reliées par un système de parallèles ayant une direction autre que celle de la ligne des pôles, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe, si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la direction des parallèles. Cet hyperboloïde a pour directrices : 1° la verticale (p); 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite de l'espace (t, t').

Les deux polaires respectivement parallèles aux deux transversales sont deux polaires correspondantes; car ces deux polaires sont les projections horizontale et verticale de la génératrice parallèle à la directrice (t, t').

Projetons, par des perpendiculaires à la ligne de terre, le pôle de chaque système sur la transversale de l'autre système; désignons par π' (*fig.* 25) la projection du pôle p sur la transversale t' et par π la projection du pôle p' sur la transversale t. Il est facile de voir que la verticale (π) et la perpendiculaire (π') au plan vertical sont deux génératrices de l'hyperboloïde. Ces deux génératrices, que nous nommerons génératrices principales, étant prises pour deux directrices dans le second mode de génération, il en résulte que les deux projections d'une génératrice quelconque de ce second mode doivent passer respectivement par π et π'. Donc, si n, n' sont les deux projections d'un point de l'hyperboloïde, la droite de l'espace $(pn, p'n')$ sera une génératrice d'un mode, et la droite de l'espace $(\pi n, \pi' n')$ sera une génératrice de l'autre mode de génération de l'hyperboloïde.

Il est donc bien facile de construire soit les deux traces, soit la trace principale d'un plan tangent mené à l'hyperboloïde par un point donné sur sa surface, puisque l'on peut construire immédiatement les projections des deux génératrices de mode différent qui passent par ce point [1].

[1] Comme nous supposons connue la double génération de l'hyperboloïde à une nappe, nous devons prévenir ici que nous en avons donné ailleurs une démonstration nouvelle, au moyen des

Digitized by Google

Remarque. — Trois génératrices quelconques d'un hyperboloïde à une nappe n'étant jamais parallèles à un même plan, ne peuvent conséquemment pas être parallèles au plan bissecteur *B*. Donc :

Deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, ne sauraient avoir plus de deux paires de polaires correspondantes parallèles, sans que toutes les polaires de l'un soient respectivement parallèles à leurs correspondantes de l'autre système. D'où il est facile de conclure que :

Deux systèmes de polaires de même pôle *p*, qui sont respectivement parallèles à deux autres systèmes de polaires π, π' ayant leurs transversales reliées par un système de parallèles, ne sauraient avoir plus de deux paires de polaires correspondantes qui coïncident, sans que toutes les polaires de l'un coïncident avec leurs correspondantes de l'autre.

63. — Réciproquement, pour que les projections d'un hyperboloïde à une nappe, défini par ses trois directrices, donnent deux systèmes de polaires dont les transversales soient reliées par un système de parallèles, il faut que les deux plans de projection soient respectivement perpendiculaires à deux des trois directrices.

64. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une droite *D* représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe, si l'on prend pour ligne de terre une droite qui ne soit pas perpendiculaire à la ligne des pôles. Les trois directrices de cet hyperboloïde sont alors : 1° la perpendiculaire (p) au plan horizontal; 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite (D, D) située dans le plan bissecteur *B*.

Parmi toutes les génératrices de cet hyperboloïde, il y en a trois qu'il convient de prendre de préférence à toutes les autres pour directrices dans le second mode de génération. Voici leur construction : Ayant projeté les deux pôles p, p' sur la droite *D*, par des droites perpendiculaires à la ligne de terre (*fig.* 32), si l'on désigne par π' la projection du pôle p, et par π la projection du pôle p', on verra facilement que : 1° la verticale

projections cotées, laquelle est plus élémentaire que celle qui repose sur la propriété analytique connue du quadrilatère gauche.

Digitized by Google

(π), 2° la perpendiculaire (π') au plan vertical, 3° la droite de l'espace, dont la projection double coïncide avec la ligne des pôles et qui est située dans le plan bissecteur B, sont trois génératrices de l'hyperboloïde, que nous nommerons les trois génératrices principales. Les deux projections de toute droite qui s'appuie sur ces trois génératrices principales doivent passer respectivement par π et π', et se couper sur la ligne des pôles pp'. D'où l'on peut conclure que si les deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une droite D représentent les génératrices d'un mode de génération de l'hyperboloïde, les deux autres systèmes de polaires π, π' qui se coupent sur la ligne des pôles pp' des deux premiers systèmes, représentent les génératrices de l'autre mode de génération.

Pour mener le plan tangent en un point (n, n') de cet hyperboloïde, on saura que les deux droites de l'espace (pn, $p'n'$) et (πn, $\pi' n'$) sont les deux génératrices de mode différent qui passent par le point (n, n').

65. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une droite D non parallèle à la ligne des pôles, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique, si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la droite D. Les trois directrices de ce paraboloïde, toutes parallèles à un même plan perpendiculaire à la ligne de terre, sont : 1° la perpendiculaire (p) au plan horizontal; 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite (D, D) perpendiculaire à la ligne de terre et située dans le plan bissecteur B.

66. — Voici une démonstration nouvelle de ce que nous admettons implicitement dans ce qui précède, à savoir, que l'hyperboloïde, dont les trois directrices sont parallèles à un même plan, est un paraboloïde hyperbolique.

Les plans de projection étant choisis de manière que deux des trois directrices soient respectivement perpendiculaires à ces deux plans, la 3^{me} directrice sera dès lors située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Il s'agit de prouver que tout plan perpendiculaire à la ligne de terre coupe toutes les génératrices de cet hyperboloïde en des points qui sont en ligne droite. Soient (*fig.* 24) p la projection de la directrice perpendiculaire au plan horizontal, p' la projection de la directrice perpen-

Digitized by Google

diculaire au plan vertical de projection, et, enfin, a, b, c, etc., les projections horizontales, a', b', c', etc., les projections verticales correspondantes d'un nombre quelconque de points de la 3^me^ directrice située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. De ce que les points (a, a'), (b, b'), (c, c'), etc., sont en ligne droite dans l'espace, on a la proportion :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc.}$$

En coupant maintenant les génératrices $(pa, p'a')$, $(pb, p'b')$, etc., par un plan perpendiculaire à la ligne de terre, il sera facile de conclure de l'épure et de la proportion précédente qu'il existe une proportion analogue entre les projections horizontales α, β, γ, etc., et les projections verticales α', β', γ', etc., des points de rencontre de ces génératrices avec le plan en question. De là suit que ces points de rencontre sont en ligne droite dans l'espace. Donc, la surface étant coupée par tout plan perpendiculaire à la ligne de terre suivant une ligne droite, est un paraboloïde hyperbolique.

67. — Deux systèmes de polaires parallèles (40) représentent respectivement les projections horizontales et verticales de droites parallèles au plan bissecteur B, s'appuyant à la fois sur la perpendiculaire (p) au plan horizontal et sur la perpendiculaire (p') au plan vertical. Pour cela, il suffit que la droite prise pour ligne de terre ne soit pas perpendiculaire à la ligne des pôles. Les deux systèmes de polaires représentent donc dans l'espace un paraboloïde hyperbolique qui a pour plan directeur le plan bissecteur B et pour directrices les deux droites (p), (p') définies plus haut.

Le second plan directeur de ce paraboloïde est évidemment perpendiculaire à la ligne de terre, puisqu'il est parallèle aux deux directrices (p), (p').

68. — Un système de polaires et un système de parallèles dont les transversales t, t' sont reliées par un second système de parallèles, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique, c'est-à-dire de droites parallèles à un même plan (leurs projections verticales étant parallèles) et

s'appuyant, en outre, sur la verticale projetée au pôle et sur la droite de l'espace (t, t'). Il suffit pour cela de choisir pour ligne de terre une droite perpendiculaire au second système de parallèles.

69. — Un système de polaires p et un système de parallèles qui se coupent sur une droite D, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique, c'est-à-dire de droites parallèles à un même plan, lesquelles s'appuient à la fois sur la perpendiculaire (p) au plan horizontal et sur la droite (D, D) située dans le plan bissecteur B. Pour cela, il suffit que la droite prise pour ligne de terre ne soit pas perpendiculaire aux parallèles.

70. — Un système de polaires p dont la transversale t est reliée, par un système de parallèles, à la transversale t' d'un système de droites respectivement parallèles aux polaires p, représenteront respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices d'un paraboloïde hyperbolique, ayant pour plan directeur le plan bissecteur B et pour directrices la verticale (p), et la droite de l'espace (t, t'), si l'on prend pour ligne de terre une droite perpendiculaire au système de parallèles qui relient les deux transversales.

71. — De quatre systèmes de polaires dont les deux premiers p, p', se coupent sur une droite D, et dont les deux autres π, π' sont respectivement parallèles aux premiers, ceux-ci représenteront dans l'espace un plan que nous désignerons par M et les deux derniers un paraboloïde hyperbolique, ayant pour plan directeur le plan M, si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la ligne des pôles des deux premiers systèmes.

En effet, les deux premiers systèmes de polaires sont alors respectivement les projections horizontales et verticales de droites situées dans un même plan M, et les deux autres les projections horizontales et verticales de droites parallèles à ce même plan et s'appuyant à la fois sur la perpendiculaire (π) au plan horizontal et sur la perpendiculaire (π') au plan vertical. Le second plan directeur de ce paraboloïde devant être parallèle aux deux directrices (π), (π'), sera perpendiculaire à la ligne de terre.

Maintenant, on peut prouver d'une manière aussi facile qu'élégante qu'un plan perpendiculaire à la ligne de terre coupe la surface suivant

Digitized by Google

une ligne droite et donner ainsi une démonstration nouvelle de la double génération du paraboloïde hyperbolique. En effet, (a, a'), (b, b'), (c, c'), etc., étant les points de rencontre des droites du plan M avec un plan perpendiculaire à la ligne de terre, on a, ces points étant situés sur une même droite, la proportion :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

et pour que les points d'intersection (α, α'), (β, β'), (γ, γ'), (δ, δ'), etc., des génératrices du paraboloïde avec un plan quelconque perpendiculaire à la ligne de terre soient sur une ligne droite, il faudrait également démontrer l'égalité des rapports :

$$\alpha\beta : \alpha'\beta' = \beta\gamma : \beta'\gamma' = \gamma\delta : \gamma'\delta' = \text{etc.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Or, une épure fera voir que les antécédents et les conséquents des rapports (b) sont respectivement en proportion avec les antécédents et les conséquents de (a). Donc, les rapports (b) sont égaux, ce qu'il s'agissait de prouver.

72. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une conique c passant par les pôles, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe, si l'on prend pour ligne de terre une droite non perpendiculaire à la ligne des pôles. Les trois directrices de cet hyperboloïde sont : 1° la perpendiculaire (p) au plan horizontal; 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la conique de l'espace (c, c) située dans le plan bissecteur B. On remarquera, dans le cas actuel, qu'à chaque polaire du premier système ne correspond qu'une seule polaire dans le second système.

Démonstration. — Démontrons d'abord la propriété pour le cas où la courbe c est une circonférence de cercle. Projetons les deux pôles p, p' (*fig.* 2) sur la circonférence, par des perpendiculaires à la ligne de terre LT; et représentons par π' la projection du pôle p, et par π la projection du pôle p'. Considérons maintenant la surface réglée qui a pour direc-

Digitized by Google

trices : 1° la perpendiculaire (π) au plan horizontal; 2° la perpendiculaire (π') au plan vertical; 3° la conique de l'espace (c, c) située dans le plan bissecteur B. Si nous faisons voir qu'une génératrice quelconque (pa, $p'a$) de la première surface réglée rencontre toujours une génératrice quelconque (πb, $\pi' b$) de la deuxième surface réglée, nous aurons démontré que les deux surfaces n'en forment qu'une, laquelle étant doublement réglée ne peut être qu'un hyperboloïde à une nappe. Les deux génératrices (pa, $p'a$), (πb, $\pi' b$) se couperont, si le point n, intersection de leurs projections horizontales, se trouve avec le point n', intersection de leurs projections verticales, sur une droite perpendiculaire à la ligne de terre; ou, ce qui revient au même, si $\overline{nn'}$ est parallèle à $\overline{p\pi'}$. Or les angles en a et en b sont égaux comme ayant des mesures égales; les angles opposés au sommet o sont égaux. Donc les deux triangles aon' et bon sont équiangles, et donnent une proportion de laquelle on déduit :

$$\overline{ao} \times \overline{on} = \overline{bo} \times \overline{on'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Les deux cordes qui se coupent en o donnent aussi :

$$\overline{ao} \times \overline{op} = \overline{bo} \times \overline{o\pi'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Divisant (b) par (a), on a la proportion :

$$\overline{on} : \overline{op} = \overline{on'} : \overline{o\pi'},$$

qui prouve le parallélisme entre $\overline{nn'}$ et $\overline{p\pi'}$.

Cette propriété de la droite nn' d'être parallèle aux deux droites $p\pi'$, $p'\pi$ est projective, si le tableau sur lequel on fait la perspective du cercle est parallèle à l'une des deux parallèles $p\pi'$, $p'\pi$. Notre démonstration convient donc à une conique quelconque.

Plan tangent. — S'il s'agit de construire le plan tangent à l'hyperboloïde qui nous occupe, en un point (n, n) de la directrice (c, c) (*fig.* 28), située dans le plan bissecteur B, on construira les deux génératrices de

Digitized by Google

mode différent qui passent par ce point et qui sont $(pn, p'n)$ et $(\pi n, \pi' n)$. Après cela, on voit facilement sur l'épure que, dans l'hypothèse de deux plans de projection rectangulaire, ab est la trace horizontale et mn la trace principale de ce plan tangent. Or, cette trace principale est, d'après (10), tangente à la circonférence c, et a été construite en ne faisant usage que des cinq points p, p', π, π' et n. Donc, connaissant cinq points d'une circonférence, on peut toujours construire la tangente en l'un de ces points quand les quatre autres se trouvent être les sommets d'un trapèze. Mais la dernière condition n'est pas indispensable et cette construction peut être généralisée, tant pour le cercle que pour une section conique quelconque. En effet, sur une perspective du cercle, la construction ne différera de la précédente qu'en ce que la ligne de terre LT deviendra une droite quelconque, que le trapèze deviendra un quadrilatère, et que les perspectives des quatre perpendiculaires à la ligne de terre, pointillées sur la figure, concourront en un même point, intersection de deux côtés opposés du quadrilatère.

Sur la figure 29, que nous supposons être la perspective de la figure 28, nous indiquons, par des chiffres que nous faisons porter aux droites, l'ordre dans lequel ces droites doivent être tracées pour arriver à la tangente au point n. On voit que la règle seule suffit pour résoudre le problème : « *Connaissant seulement cinq points d'une section conique, construire la tangente en l'un de ces points.* »

Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer ici que la construction que nous venons de déduire de l'hyperboloïde à une nappe, contient les mêmes lignes et en même nombre que la construction indiquée dans la théorie des faisceaux homographiques.

§ V.

Représentation de cônes, de cylindres et de surfaces gauches.

73. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une courbe c représentent respectivement, pour une ligne de terre perpendiculaire à la

Digitized by Google

ligne des pôles, les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un cône qui a pour sommet le point (p, p'), et pour directrice la courbe (c, c) située dans le plan bissecteur B.

Si la courbe c est du degré n, le cône sera du même degré.

Si une polaire du premier système rencontre la courbe c en m points, chacune des polaires du second système qui passent respectivement par ces points, sera correspondante de la polaire du premier système.

74.—Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une courbe c passant par les deux pôles, représenteront, pour une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles, un cône défini à l'article 73, et dont deux génératrices se projettent respectivement aux deux pôles et sont ainsi respectivement perpendiculaires aux deux plans de projection.

Réciproquement : pour que les deux systèmes de projections des génératrices d'un cône représentent deux systèmes de polaires qui se coupent sur une courbe passant par les deux pôles, il faut prendre les deux plans de projection respectivement perpendiculaires à deux génératrices quelconques du cône.

75. — A cause que deux systèmes de polaires p, p', dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, se coupent, comme il sera démontré, sur une courbe c du second degré, il en résulte qu'en prenant une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles, et en faisant abstraction des deux transversales, ces deux systèmes représentent un cône du second degré, ayant pour sommet le point de l'espace (p, p'), et pour directrice, la courbe de l'espace (c, c) située dans le plan bissecteur B.

76. — Deux systèmes de parallèles de direction différente qui se coupent deux à deux sur une courbe c, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un cylindre qui a pour directrice dans l'espace la courbe plane (c, c) située dans le plan bissecteur B. Cela a lieu , quelque droite que l'on prenne pour ligne de terre. Le degré de ce cylindre est le même que celui de la courbe c.

Si une parallèle du premier système rencontre la courbe c en n points, chacune des n parallèles du second système qui passent respectivement par ces points sera correspondante de la parallèle du premier système.

Digitized by Google

77. — Deux systèmes de parallèles de direction différente qui passent deux à deux par les extrémités d'une même corde d'un système de cordes principales d'une courbe c, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un cylindre qui a pour directrice la courbe de l'espace (c, ɔ) située dans le plan bissecteur B', si l'on prend pour ligne de terre l'axe conjugué aux cordes principales. Le degré du cylindre est le même que celui de la courbe c.

78. — Deux systèmes de polaires p, p' qui passent deux à deux par les extrémités d'une même corde d'un système de cordes principales d'une courbe c (les cordes étant parallèles à la droite qui unit les pôles), représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices d'un cône qui a pour sommet le point de l'espace (p, p'), et pour directrice la courbe de l'espace (c, ɔ) située dans le plan bissecteur B', si l'on prend, pour ligne de terre, l'axe conjugué au système de cordes principales.

79. — Un système de polaires p et un système de parallèles qui se coupent sur une conique c, représentent un conoïde, c'est-à-dire représentent respectivement les projections horizontales et verticales de droites de l'espace parallèles à un même plan, et qui s'appuient sur la perpendiculaire (p) au plan horizontal, et sur la courbe (c, c) située dans le plan bissecteur B, quelque droite que l'on prenne pour ligne de terre. L'équation de cette surface conoïde est du quatrième degré, comme on sait.

A chaque parallèle correspondent deux polaires, et réciproquement.

Nous donnerons une autre fois des exemples de définitions d'autres surfaces du quatrième degré.

§ VI.

Représentations de surfaces de révolution.

80. — Dans toute courbe c, un système d'ordonnées perpendiculaires à une même droite D et le système de circonférences de cercle ayant leur centre commun en un point quelconque O de la droite D, et pour rayons respectifs ces ordonnées, représenteront respectivement les projections ver-

Digitized by Google

ticales et horizontales de parallèles d'une surface de révolution, si l'on prend pour ligne de terre *L* la perpendiculaire en *O* à la droite *D*. L'axe de la surface sera alors la verticale (*O, D*), et son méridien principal sera la courbe (*c, L*), située dans le plan vertical de projection.

La surface sera du même degré que la courbe *c*, si la droite *D* coïncide avec un diamètre principal de la courbe; dans le cas contraire, le degré de la surface sera double de celui de la courbe; dans ce dernier cas, en effet, le méridien est l'ensemble de deux positions symétriques de la même courbe par rapport à la droite *D*, et cet ensemble constitue une courbe d'un degré double de celui de la courbe proposée.

81. — Si l'on construit pour chaque point d'une courbe *c* : 1° l'ordonnée perpendiculaire à une droite *D;* 2° le rayon vecteur dirigé vers un point *O* pris sur la droite *D;* 3° la circonférence ayant le point *O* pour centre, et le rayon vecteur pour rayon; si l'on prend ensuite pour ligne de terre la perpendiculaire en *O* à la droite *D*, le système de circonférences concentriques ainsi décrites du point *O* comme centre, et le système des ordonnées prolongées représenteront respectivement les projections horizontales et verticales de parallèles d'une surface de révolution ayant pour génératrice dans l'espace la courbe (*c, c*), située dans le plan bissecteur *B*, et pour axe, la verticale projetée horizontalement au point *O*, et verticalement dans la droite *D*.

Le degré de la surface sera égal à celui de la courbe, si la droite *D* est un axe ou diamètre principal de la courbe. Dans tout autre cas, le degré de la surface sera double de celui de la courbe.

Digitized by Google

SECONDE SECTION.

DÉFINITIONS DE LIEUX GÉOMÉTRIQUES DU PREMIER DEGRÉ, DÉDUITES DU PLAN ET DES SURFACES GAUCHES DU SECOND DEGRÉ.

—

§ I.

Propriétés des transversales de deux systèmes de polaires ou de deux systèmes de parallèles qui se coupent sur une droite.

Parmi les théorèmes que nous démontrons concernant le point et la droite, les uns se déduisent du plan, les autres des surfaces gauches du second degré. Nous donnerons séparément les uns et les autres.

82. — Théorème. — *Deux systèmes de parallèles qui se rencontrent sur une droite, étant coupés respectivement par deux transversales quelconques partant d'un point de cette droite, les droites qui relient les deux transversales forment toujours un système de parallèles.* (Fig. 3.)

Démonstration. — Soient D la droite sur laquelle se coupent les deux systèmes de parallèles et t, t' les deux transversales partant d'un point m de la droite D; ces deux systèmes de parallèles représentent, pour une ligne de terre quelconque, un plan passant par la droite de l'espace (D, D) située dans le plan bissecteur B (59). Or, en prenant la ligne de terre perpendiculaire à une droite quelconque aa' qui relie deux points correspondants des deux transversales t, t', le point de l'espace (a, a') appartiendra à ce plan, ainsi que la droite (t, t'), car cette dernière passe par le point (a, a') et elle rencontre la droite (D, D) au point (m, m). Maintenant il est facile de voir que (b, b'), (c, c'), etc., sont autant de points de ce plan, comme étant chacun l'intersection de deux droites de ce plan; donc les droites qui relient les projections b et b', c et c', etc., sont perpendiculaires à la ligne de terre, c'est-à-dire parallèles à la droite aa'. Donc, etc.

83. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite étant coupés respectivement par deux transversales partant d'un même point de cette droite et respectivement parallèles à deux polaires correspondantes quel-*

Digitized by Google

conques, les droites qui relient ces deux transversales forment toujours un système de parallèles à la ligne des pôles. (Fig. 4.)

Démonstration. — Soient p, p' deux systèmes de polaires se rencontrant sur la droite D; soient t, t' leurs transversales respectives, parallèles aux deux polaires correspondantes pm, $p'm$. En prenant une ligne de terre, perpendiculaire à la ligne des pôles, les deux systèmes de polaires représentent des droites de l'espace situées dans un même plan Π, lequel passe par le point (p, p') et par la droite (D, D) située dans le plan bissecteur B (58). Il est facile de voir que la droite de l'espace (t, t') est située dans le même plan Π, et par suite que (a, a'), (b, b'), (c, c'), etc., sont autant de points de ce plan. Donc $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$, etc., sont perpendiculaires à la ligne de terre, ou, ce qui revient au même, elles sont parallèles à la ligne des pôles. Donc, etc.

84. — Le théorème précédent a lieu également pour deux systèmes de polaires situés dans deux plans différents, et peut être énoncé comme il suit :

Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires situés dans deux plans différents et qui se rencontrent sur la droite d'intersection de ces deux plans, si on coupe respectivement ces deux systèmes par deux transversales respectivement parallèles à deux polaires correspondantes et partant d'un point de la droite d'intersection, les droites qui relieront dans l'espace ces deux transversales formeront un système de parallèles à la droite qui unit les deux pôles.*

Démonstration. — Soient p, p' les pôles des deux systèmes de polaires proposés. On peut considérer les polaires d'un système comme les traces horizontales, et les polaires de l'autre système comme les traces verticales d'un système de plans passant tous par la droite pp', et considérer les deux transversales comme les traces d'un plan parallèle à celui représenté par les deux polaires correspondantes mentionnées à l'énoncé. Maintenant il suffit de savoir que tous les plans passant par une même droite pp' sont coupés par un plan parallèle à l'un d'eux suivant toutes droites parallèles à la droite pp'.

85. — Une perspective, sur un tableau plan, des lignes énoncées au théorème (83) conduit à cet autre théorème :

Théorème. — *Deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite étant coupés respectivement par deux transversales quelconques, partant d'un point de cette*

Digitized by Google

droite (par deux transversales qui ne sont pas respectivement parallèles à deux polaires correspondantes), les droites qui relient ces deux transversales forment un troisième système de polaires, dont le pôle est en ligne droite avec les pôles des deux systèmes proposés. (Fig. 5.)

Corollaire I. — *Dans deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite et qui sont coupés respectivement par deux transversales quelconques partant d'un point de cette droite, deux polaires correspondantes quelconques interceptent, avec les deux transversales, un quadrilatère complet dont une diagonale coïncide avec la droite mentionnée, et dont les deux autres diagonales passent respectivement par deux points fixes de la ligne des pôles.*

Pour se rendre compte de ce corollaire il suffit d'appliquer deux fois de suite le théorème précédent, en prenant, la seconde fois, la transversale du premier système pour transversale du second système et la transversale du second pour transversale du premier.

Corollaire II. — *Dans deux systèmes de polaires parallèles, coupés respectivement par deux transversales parallèles, chaque paire de polaires correspondantes forme avec les deux transversales un parallélogramme, et les deux systèmes de diagonales de tous ces parallélogrammes concourent respectivement en deux points fixes de la ligne des pôles.* (Fig. 35.)

Il suffit de remarquer que deux systèmes de polaires respectivement parallèles se coupent sur une droite située à l'infini, et que deux transversales partant d'un point d'une droite située à l'infini sont parallèles. Moyennant ces remarques, le corollaire proposé devient une conséquence du corollaire précédent.

86. — Remarque. — Les côtés de deux angles constituent deux systèmes de deux polaires qui interceptent un quadrilatère; et ces deux systèmes se coupent sur l'une ou sur l'autre diagonale de ce quadrilatère, selon l'ordre dans lequel on considère les deux premières polaires comme respectivement correspondantes des deux autres polaires.

87. — Moyennant cette remarque, on déduira facilement, comme corollaire du théorème (85), les propriétés suivantes, dont la première est énoncée en d'autres termes par M. Cousinery :

Proposition I. — « Si trois angles ont leurs sommets en ligne droite,

Digitized by Google

» les trois quadrilatères, dont chacun est formé par les côtés de deux de » ces trois angles, sont tels que deux diagonales, appartenant à deux de » ces quadrilatères, se coupent toujours en un point d'une diagonale du » troisième quadrilatère. » (*Fig.* 38.)

D étant la droite qui renferme les sommets des trois angles, il suffit de prendre deux sommets opposés dans l'un des trois quadrilatères, pour pôles de deux systèmes de deux polaires qui se coupent sur la droite *D;* de considérer les côtés du troisième angle comme transversales respectives de ces deux mêmes systèmes, et d'appliquer deux fois de suite le théorème (85), en prenant la seconde fois la transversale du premier système pour transversale du second système, et réciproquement.

Puisque dans l'hexagone inscrit à une section conique, les sommets des trois angles formés par les côtés opposés sont sur une même droite, on peut donc appliquer à ces trois angles la propriété que nous venons de démontrer.

Proposition II. — « Si un premier quadrilatère est inscrit à un second » quadrilatère, et que deux côtés opposés du premier se coupent sur une » diagonale du second, les deux autres côtés opposés du premier se » couperont sur l'autre diagonale du second. »

D étant la diagonale du second quadrilatère sur laquelle se coupent les deux côtés opposés du premier quadrilatère, il suffit de prendre, dans le second quadrilatère, les deux sommets opposés à la diagonale *D,* pour pôles de deux systèmes de deux polaires qui se coupent sur la même diagonale *D,* et de prendre, pour transversales de ces deux systèmes, les deux côtés opposés du premier quadrilatère, qui se coupent sur la diagonale *D;* et, enfin, d'appliquer le théorème (85).

Proposition III. — « Si les trois côtés d'un triangle rencontrent respectivement les trois côtés d'un autre triangle en trois points qui sont » en ligne droite, les trois droites, dont chacune relie deux sommets qui se » correspondent dans les deux triangles, concourent en un même point. »

Soit *D* la droite sur laquelle les trois côtés du premier triangle rencontrent respectivement les trois côtés du second; soient p, p' les sommets de deux angles, opposés respectivement à deux côtés qui se rencontrent

Digitized by Google

sur la droite *D*. En considérant les deux systèmes de deux polaires p, p', si l'on prend, pour transversales de ces deux systèmes, les côtés opposés aux deux pôles p, p', il suffira d'appliquer le théorème (85).

88. — Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, si l'on prend deux polaires correspondantes quelconques pour transversales respectives des deux systèmes, les droites qui relieront les deux transversales constitueront un système de polaires, dont le pôle sera en ligne droite avec les pôles des deux systèmes proposés; et ce pôle ne variera pas de position, quelles que soient les deux polaires correspondantes qu'on ait choisies pour transversales.* (Fig. 6.)

Démonstration. — D'après le théorème (85), les droites qui relient les deux transversales de l'énoncé forment d'abord un système de polaires, dont le pôle est sur la ligne des pôles des deux systèmes de polaires proposés; il reste seulement à prouver que ce pôle ne change pas de position avec les deux polaires correspondantes choisies pour transversales. Or, on s'assurera de ce fait, sur une figure, en considérant deux paires de polaires correspondantes quelconques, et en prenant tour à tour chaque paire pour transversales.

Corollaire. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, deux paires de polaires correspondantes forment un quadrilatère dont une diagonale (celle qui ne coïncide pas avec la droite proposée) rencontre la ligne des pôles en un point qui ne varie pas, quelles que soient les deux paires de polaires correspondantes que l'on considère.*

89. — Le théorème (88) se modifie comme il suit lorsque la droite sur laquelle se coupent les deux systèmes de polaires passe par le milieu de la ligne des pôles:

Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite passant par le milieu de la ligne des pôles, si l'on prend deux polaires correspondantes quelconques pour transversales respectives des deux systèmes, les droites qui relieront ces deux transversales formeront un système de parallèles à la ligne des pôles.* (Fig. 7.)

Démonstration. — En menant par chaque pôle une polaire parallèle à la transversale de l'autre système, on aura un parallélogramme formé par les deux polaires transversales et par les deux polaires parallèles à

Digitized by Google

celles-ci. La droite *D*, passant par un sommet *n* de ce parallélogramme et par le milieu d'une diagonale (milieu de la ligne des pôles), doit passer par le sommet opposé *m* au premier sommet. Donc les deux polaires, parallèles aux deux transversales, se coupent sur la droite *D*, en *m*; et partant, les deux transversales sont respectivement parallèles à deux polaires correspondantes. Donc, d'après (83), le théorème est démontré.

Le théorème précédent fournit sans difficulté les deux corollaires suivants :

Corollaire I. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite passant par le milieu de la ligne des pôles, l'une des deux diagonales du quadrilatère, formé par deux paires de polaires correspondantes quelconques, est toujours parallèle à la ligne des pôles.*

Corollaire II. — « *La base d'un triangle étant coupée en deux parties égales*
» *par une droite tirée du sommet, si, d'un point quelconque de cette droite, on*
» *abaisse sur chaque côté une transversale passant par l'angle opposé, les pieds de*
» *ces deux transversales détermineront une ligne parallèle à la base.* (Brianchon,
» *Application de la théorie des transversales, p.* 12). »

Application. — Si, sur le plan d'une figure, on donne une droite quelconque et le point milieu de cette droite, on peut, au moyen du théorème précédent, mener, par un point donné, une parallèle à cette droite, en ne faisant usage que de la règle.

90. — Nous nous contenterons d'énoncer le réciproque du théorème précédent (89).

Réciproquement. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite* D, *si deux polaires correspondantes, prises pour transversales, se trouvent reliées par un système de parallèles à la ligne des pôles, la droite* D *passera toujours par le milieu de la ligne des pôles.*

D'où l'on déduira aisément la proposition suivante :

Proposition. — Les trois médianes de tout triangle se coupent en un même point.

91. — Le théorème (85) donne lieu au théorème plus général qui suit :

Théorème. — *Des systèmes de polaires, en nombre quelconque, et dont les*

Digitized by Google

pôles sont distribués d'une manière quelconque, étant donnés, si chaque système, depuis le premier jusqu'au dernier, coupe celui qui le suit immédiatement sur une droite, et que toutes ces droites concourent en un même point, alors le système des droites qui relient deux droites quelconques des précédentes, forme un système de polaires.

Démonstration. — Soient p_1, p_2, p_3, p_4, etc., les pôles des systèmes de polaires. D'après l'énoncé, le système p_1 coupe ou rencontre le système p_2 sur une droite que nous représenterons par t_1 ; le système p_2 coupe le système p_3 sur une droite t_2 ; le système p_3 coupe le système p_4 sur une droite t_3, et ainsi de suite.

D'après l'énoncé, toutes les droites t_1, t_2, t_3, t_4, etc., que nous nommerons indifféremment droites ou transversales, passent par un même point que nous désignerons par m. En remarquant que chacun de ces systèmes se trouve coupé par deux droites ou transversales, à l'exception du premier et du dernier système, qui ne sont coupés chacun que par une seule transversale, nous pouvons écrire ces divers systèmes comme il suit, en mettant en évidence les transversales de chacun :

$$p_1\, t_1, \quad p_2\, t_1\, t_2, \quad p_3\, t_2\, t_3, \quad p_4\, t_3\, t_4, \quad \text{etc.}$$

Dans cette notation la lettre commune à deux systèmes signifie la droite sur laquelle se coupent ces systèmes. Cela posé, prouvons, par exemple, que les droites qui relient la transversale t_1 à chacune des autres transversales, forment autant de systèmes de polaires :

En comparant les deux systèmes $p_2\, t_1\, t_2$, $p_3\, t_2\, t_3$, on voit, d'après la notation, qu'ils se rencontrent sur la droite t_2, et qu'ils sont coupés respectivement par les deux transversales t_1, t_3 partant du point m de la droite t_2. Donc, d'après (85), les droites qui relient t_1 et t_3 forment un nouveau système de polaires π, que nous représenterons, d'après la notation convenue, par $\pi\, t_1\, t_3$. En comparant ce nouveau système $\pi\, t_1\, t_3$ au système $p_4\, t_3\, t_4$, on voit qu'ils se rencontrent sur la droite t_3, et qu'ils sont coupés par les deux transversales t_1, t_4 partant d'un point m de t_3 ; donc, d'après (85), les droites qui relient t_1 et t_4 forment un nouveau système de polaires π', que nous représenterons par $\pi'\, t_1\, t_4$. De la même manière, on

Digitized by Google

continuerait à prouver que les droites qui relient la transversale t_1 à chacune des transversales restantes forment autant de systèmes de polaires.

Proposition. — « Si tous les sommets d'un polygone mobile sur son » plan sont assujettis à parcourir autant de droites fixes concourant » en un seul et même point; que de plus, tous ses côtés, à l'exception » d'un seul, se meuvent constamment autour de points fixes, le côté li- » bre et les diverses diagonales du polygone pivoteront également sur » d'autres points fixes. » (Poncelet. *Propriétés projectives*, p. 301.)

Tous les côtés du polygone, à l'exception du côté libre, décrivent chacun un système de polaires; le premier de ces systèmes coupe le second sur la première droite fixe, le second système coupe le troisième système sur la seconde droite fixe, et ainsi de suite. Le côté libre du polygone relie sans cesse deux de toutes ces droites. Donc, d'après (85), le côté libre décrit un système de polaires (pivote autour d'un point fixe); et il en est de même de chaque diagonale.

92. — Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une droite D, il y a toujours dans l'un deux polaires, se coupant à angle droit, dont les correspondantes dans l'autre se coupent également à angle droit; autrement dit, il y a dans un système deux polaires rectangulaires dont les correspondantes dans l'autre système sont aussi rectangulaires.*

Pour construire les polaires rectangulaires, il faut décrire une circonférence de cercle qui passe par les deux pôles p, p' et dont le centre soit sur la droite proposée D. Les points de rencontre m et n de la circonférence avec la droite D, sont les extrémités d'un même diamètre, et partant les deux polaires pm, pn sont rectangulaires, ainsi que leurs deux correspondantes $p'm$, $p'n$.

Corollaire I. — Si la droite D, sur laquelle se coupent les deux systèmes de polaires, est perpendiculaire à la ligne des pôles et passe par le milieu de cette ligne, alors on peut décrire une infinité de circonférences ayant leurs centres sur la droite D et passant par les deux pôles. D'où l'on déduit sans difficulté :

Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, perpendiculaire à la ligne des pôles et passant par le milieu de cette ligne, il arrive qu'à deux po-

Digitized by Google

laires quelconques se coupant à angle droit dans un système, correspondent, dans l'autre, deux polaires se coupant également à angle droit.

Corollaire II. — Si dans chacun de deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite D on construit : 1° la polaire parallèle à la droite D; 2° la polaire qui passe par le centre de la circonférence mentionnée à la démonstration du théorème ci-dessus, alors les deux angles supplémentaires formés par ces deux polaires auront, pour bissectrices, les polaires rectangulaires de ce système, comme il est facile de s'en assurer sur une figure. Donc :

Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, on peut construire deux angles correspondants, dont les bissectrices forment avec les bissectrices de leurs suppléments les polaires rectangulaires définies à l'article 92.

§ II.

Propriétés des transversales de deux systèmes de polaires, ou de deux systèmes de parallèles, pour qu'ils se coupent sur une même droite.

93. — Théorème. — *Deux systèmes de parallèles, dont les deux transversales sont reliées par un troisième système de parallèles, se coupent sur une droite qui passe par le sommet des deux transversales.* (Fig. 3.)

Démonstration. — En prenant pour ligne de terre une perpendiculaire au troisième système de parallèles, les deux premiers systèmes représentent un plan π, dont l'intersection avec le plan bissecteur B est la droite mentionnée à l'énoncé; après cela, les deux transversales se coupent sur la droite mentionnée à l'énoncé, parce qu'elles sont les deux projections d'une droite du plan π.

Corollaire. — *Dans deux systèmes de parallèles qui se coupent sur une droite, si un troisième système de parallèles coupe le premier système sur une transversale, il coupera aussi le second système sur une transversale, et le sommet des deux transversales se trouvera sur la droite proposée.*

En nommant transversale la droite sur laquelle se coupent les deux

Digitized by Google

premiers systèmes, on peut dire que le second et le troisième système ont leurs transversales reliées par le premier. Donc le second et le troisième système se coupent, d'après le théorème, sur une droite, ce que l'on peut aussi démontrer directement de la même manière qu'à l'article (95).

Du théorème précédent, on déduit sans peine cette proposition :

Proposition. — « Si les trois côtés d'un triangle variable se meuvent » parallèlement à eux-mêmes, tandis que deux sommets du triangle se » meuvent respectivement sur deux droites fixes, le troisième sommet » décrira une ligne droite qui passera par le point d'intersection des deux » droites fixes. »

94. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires, dont les transversales sont reliées par un système de parallèles à la ligne des pôles, se coupent sur une droite qui passe toujours par le sommet des deux transversales.* (Fig. 4.)

Démonstration. — Soient p, p' les deux pôles, et t, t' les deux transversales. En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles, les deux systèmes de polaires représentent un plan π, passant par le point de l'espace (p, p') et par la droite de l'espace (t, t'). L'intersection de ce plan avec le plan bissecteur B donnera la droite mentionnée à l'énoncé.

Corollaire. — Si les deux transversales mentionnées au théorème précédent sont parallèles, la droite de l'espace (t, t') est dans ce cas parallèle au plan bissecteur B (8); et, par suite, le plan π doit couper le plan bissecteur B, suivant une parallèle à la droite de l'espace (t, t'); d'où le corollaire suivant :

Deux systèmes de polaires, dont les transversales sont parallèles et reliées par un système de parallèles à la ligne des pôles, se coupent sur une droite parallèle aux deux transversales.

95. — Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, si un système de parallèles à la ligne des pôles coupe l'un des deux systèmes de polaires sur une transversale, il coupera aussi l'autre système sur une transversale; et le sommet des deux transversales se trouvera sur la droite proposée.*

Démonstration. — Il suffit de faire représenter aux deux systèmes de

Digitized by Google

polaires un plan (58), de considérer la transversale nommée en premier lieu à l'énoncé comme une des deux projections d'une droite de ce plan, et de construire l'autre projection de cette droite.

Corollaire. — *Dans deux systèmes de polaires respectivement parallèles, si un système de parallèles à la ligne des pôles coupe l'un des deux systèmes de polaires sur une transversale, il coupera l'autre système sur une transversale parallèle à la première.*

Les deux systèmes de polaires étant parallèles se coupent sur une droite située à l'infini. Les deux transversales de l'énoncé devant avoir, d'après le théorème, leur sommet sur cette droite située à l'infini, seront parallèles. Voici de la même propriété une démonstration directe :

En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles, les deux systèmes de polaires représentent un plan π, parallèle au plan bissecteur B (60), et les deux transversales de l'énoncé sont les deux projections d'une droite de ce plan π; donc, d'après (8), ces deux projections sont parallèles.

96. — Théorème. — *Si deux systèmes de polaires, dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, se coupent sur une droite qui passe par le sommet des deux transversales, la ligne des pôles aura même direction que les parallèles.*

Autrement. — *Dans deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite, si un système de parallèles coupe respectivement ces deux systèmes de polaires suivant deux transversales dont le sommet est sur la droite mentionnée, la ligne des pôles aura même direction que les parallèles.*

Démonstration. — Soient les deux systèmes de polaires p, p' (*fig.* 4) se rencontrant sur une droite D, coupés respectivement par un système de parallèles, suivant les deux transversales t, t' ayant leur sommet sur la droite D. En prenant une ligne de terre perpendiculaire aux parallèles, les deux systèmes de polaires représenteront un plan, passant par les droites de l'espace (t, t') et (D, D). Il est facile de reconnaître que les deux pôles sont les projections d'un point de ce plan; donc la droite qui unit les deux pôles doit être perpendiculaire à la ligne de terre, c'est-à-dire avoir même direction que les parallèles. Donc, etc.

Digitized by Google

97. — Une perspective, sur un tableau plan, des lignes énoncées aux théorèmes (93 et 94) conduit à cet autre théorème analogue à celui démontré par M. Chasles, *Géométrie supérieure*, page 242, art. 334.

Théorème. — *Deux systèmes de polaires, dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires ayant son pôle en ligne droite avec les pôles des deux premiers systèmes, se coupent sur une droite qui passe par le sommet des deux transversales.* (Fig. 5.)

Ce qui revient à dire :

De trois systèmes de polaires, ayant leurs pôles en ligne droite, si l'un de ces systèmes rencontre chacun des deux autres sur une droite différente, les deux autres se couperont également sur une droite; et les trois droites ainsi déterminées passeront par un même point.

Application. — Ce théorème donne le moyen de prolonger une droite au delà d'un obstacle, sans mesurer ni droites ni angles.

Corollaire. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, si un troisième système de polaires, ayant son pôle en ligne droite avec les pôles des deux premiers systèmes, coupe l'un de ceux-ci sur une transversale, il coupera aussi l'autre sur une transversale, et le sommet des deux transversales se trouvera sur la droite proposée.*

En nommant transversale la droite sur laquelle se coupent les deux premiers systèmes, on vera sur une figure que, des trois systèmes, deux ont leurs transversales reliées par le système restant; et en appliquant à ces deux systèmes le théorème ci-dessus, la propriété se trouvera démontrée.

Le théorème précédent conduit aux propositions connues, qui suivent :

Proposition I. — « Si les trois côtés d'un triangle tournent respective-
» ment autour de trois points fixes, situés en ligne droite, et que deux
» sommets soient assujettis à se mouvoir sur deux droites fixes, le
» troisième sommet décrira une ligne droite, passant par le point d'inter-
» section des deux droites fixes. »

En nommant transversales les deux droites fixes, si l'on construit un certain nombre de positions du triangle, on reconnaîtra que cette proposition n'est qu'une forme différente du théorème ci-dessus.

Si l'on applique le théorème ci-dessus à deux systèmes de deux po-

Digitized by Google

laires, après avoir remarqué que les deux polaires de chaque système forment, avec la transversale de ce système, un triangle, on aura la proposition réciproque de celle qui est énoncée à l'art. (87).

PROPOSITION II. — « Si les trois droites dont chacune relie un sommet » d'un premier triangle à un sommet d'un second triangle concourent » en un même point, les trois côtés du premier triangle rencontrent » respectivement les trois côtés du second triangle en trois points qui » sont en ligne droite.

98. — Du théorème (97) résulte cet autre :

THÉORÈME. — *Un système de polaires étant coupé par deux transversales quelconques, si l'on construit deux autres systèmes de polaires ayant leurs pôles en deux points arbitraires d'une polaire quelconque du premier système, et respectivement pour transversales celles du premier système, ces deux autres systèmes se coupent sur une droite passant par le sommet des deux transversales.*

DÉMONSTRATION. — Les pôles des trois systèmes de polaires mentionnés à l'énoncé sont en ligne droite, et les deux derniers systèmes ont leurs transversales reliées par le premier système. Donc, d'après (97), les deux derniers systèmes se coupent sur une droite passant par le sommet des deux transversales.

COROLLAIRE I. — Quand un système de polaires est coupé par deux transversales, nous appellerons points correspondants des deux transversales les deux points où elles sont rencontrées par une même polaire. Cela posé, on peut énoncer comme corollaire du théorème précédent :

Un système de polaires étant coupé par deux transversales, si l'on construit deux autres systèmes de polaires ayant leurs pôles en deux points correspondants des deux transversales données et respectivement pour transversales celles du premier système, ces deux autres systèmes se coupent sur une droite passant par le sommet des deux transversales primitives, et cette droite reste la même, quels que soient les deux points correspondants que l'on ait choisis pour pôles.

La droite d'intersection D des deux systèmes de polaires π, π' (*fig.* 8) ne change pas avec les deux points correspondants π, π', choisis pour pôles; car, en mettant les pôles en ω, ω', on aura une seconde droite d'intersection, passant comme la première droite par le sommet des deux

transversales ainsi que par un second point (le point O); donc ces deux droites coïncident. La figure met ce fait en évidence, et rend en même temps compte du corollaire suivant :

COROLLAIRE II. — *Un système de polaires étant coupé par deux transversales, les droites qui relient inversement deux paires de points correspondants de ces deux transversales se coupent en un point dont le lieu géométrique est une droite passant par le sommet des deux transversales.*

a, b étant deux points de la première transversale t, (*fig.* 9) et a', b' leurs correspondants sur la seconde transversale t', — les droites ab', $a'b$ sont celles que nous nommons droites qui relient inversement deux paires de points correspondants.

APPLICATION. — Cette propriété donne le moyen de résoudre le problème suivant, en ne faisant usage que de la règle : « Par un point donné, » mener une droite qui passe par le point de concours de deux droites » données, dans le cas où ce point de concours est invisible. »

99. — Le théorème (97) conduit à cet autre plus général qui suit :

THÉORÈME. — *Tant de systèmes de polaires que l'on voudra ayant leurs pôles sur une même droite étant donnés, si chaque système, depuis le premier jusqu'au dernier, rencontre celui qui le suit immédiatement sur une droite, deux quelconques de ces systèmes se couperont sur une droite.*

DÉMONSTRATION. — Prouvons, par exemple, que le premier système rencontre chacun de tous les autres systèmes sur une droite différente.

D'après l'énoncé, le second système coupe le premier et coupe aussi le troisième, chacun sur une droite; donc, d'après le second énoncé du théorème (97), le premier et le troisième système devront se couper également sur une droite. Le troisième coupant actuellement le premier sur une droite, et coupant, d'après l'énoncé, le quatrième sur une droite, le premier et le quatrième se couperont sur une droite, et ainsi de suite. Donc, etc.

Du théorème précédent résulte cette proposition connue :

PROPOSITION. — « Si un polygone se déforme, de manière que tous ses » côtés tournent autour de points fixes, situés en ligne droite, tandis que » tous ses sommets, un seul excepté, glissent sur des droites fixes, le

Digitized by Google

» sommet libre et le point de rencontre de deux côtés quelconques non » contigus, décriront chacun une ligne droite. »

En prenant les deux côtés du sommet libre pour premier et pour dernier côté du polygone, on peut dire que tous les côtés du polygone décrivent des systèmes de polaires qui ont leurs pôles en ligne droite, et dont deux consécutifs, depuis le premier jusqu'au dernier, se coupent sur une droite. Donc, d'après le théorème, deux quelconques de tous ces systèmes se coupent sur une droite.

100. — Théorème. — *Si deux systèmes de polaires se coupent sur une droite D, deux autres systèmes de polaires, respectivement parallèles aux deux premiers systèmes, se couperont sur une droite parallèle à D, pourvu que la ligne des pôles des deux derniers systèmes soit parallèle à la ligne des pôles des deux premiers.*

Démonstration. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à une ligne des pôles, les deux premiers systèmes représenteront un plan, et les deux autres systèmes un plan parallèle à celui-là. La droite *D* et sa parallèle mentionnées à l'énoncé sont les intersections de ces deux plans parallèles, par le plan bissecteur *B*.

101. — Théorème. — *De deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite D, si, l'un restant fixe, l'autre se meut parallèlement à lui-même de manière que son pôle ne quitte pas la ligne des pôles, le système mobile coupera dans chacune de ses positions le système fixe sur une droite parallèle à D.*

Démonstration. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles, le système fixe et le système mobile représentent à chaque instant un plan ; tous ces plans sont parallèles entre eux, et coupent le plan bissecteur *B* suivant des droites parallèles entre elles.

102. — Théorème. — *Si deux systèmes de polaires, se coupant sur une droite D, se meuvent chacun parallèlement à lui-même, de manière que la ligne des pôles reste parallèle à elle-même et que les deux pôles suivent deux polaires correspondantes de la position primitive des deux systèmes, les deux systèmes mobiles se couperont à chaque instant sur la même droite D.*

Démonstration. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles, on verra facilement que les deux systèmes, dans toutes

Digitized by Google

leurs positions, représentent un même plan de l'espace, qui doit nécessairement couper le plan bissecteur B, toujours suivant la même droite.

§ II.

Propriétés de deux systèmes de polaires se coupant sur une droite, déduites de la considération de l'hyperboloïde à une nappe.

103. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite étant coupés respectivement par deux transversales menées par un point de la ligne des pôles, parallèlement à deux polaires correspondantes, les droites qui relient ces deux transversales forment un système de parallèles, dont la direction n'est pas celle de la ligne des pôles.* (Fig. 10.)

Démonstration. — Soient p, p' (fig. 10) les deux systèmes de polaires qui se coupent sur la droite D; soient t, t' les deux transversales menées par le point n de la ligne des pôles, parallèlement aux deux polaires correspondantes pm, $p'm$; il s'agit de prouver que les droites aa', bb', cc', etc., sont parallèles.

Nous excluons le cas où les deux transversales partent du point d'intersection de la droite D avec la ligne des pôles; car ce cas a été examiné à l'article (83).

En prenant une ligne de terre perpendiculaire à aa', les deux systèmes de polaires représentent un hyperboloïde à une nappe, ayant pour directrices : 1° la perpendiculaire (p) au plan horizontal; 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite de l'espace (D, D) située dans le plan bissecteur B. Il suffit de prouver que la droite de l'espace (t, t') rencontre toutes les génératrices de cet hyperboloïde. Or, cette droite de l'espace est parallèle à la génératrice $(p\ m, p'\ m)$; elle rencontre la génératrice $(p\ a, p'\ a')$; elle rencontre aussi au point (n, n) la génératrice dont la projection double coïncide avec la ligne des pôles. De ce que la droite de l'espace (t, t') rencontre trois génératrices, elle doit rencontrer toutes les autres, et, partant, (b, b'), (c, c'), etc., sont autant de points de

Digitized by Google

la droite (t, t'). Donc bb', cc', etc., sont perpendiculaires à la ligne de terre, c'est-à-dire parallèles à aa'.

Maintenant, si les droites aa', bb', etc., pouvaient être parallèles à la ligne des pôles, les deux systèmes de polaires représenteraient un plan dont la droite de l'espace (t, t') ferait partie, et, par suite, le sommet des deux transversales t, t' devrait se trouver sur la droite D; or, ce cas nous l'avons exclu. Donc, etc.

104. — Une perspective des lignes mentionnées à l'énoncé du théorème précédent donne le théorème analogue qui suit, énoncé en d'autres termes par M. Chasles, *Géométrie supérieure*, pag. 244, art. 336.

Théorème. — *Deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite, étant coupés respectivement par deux transversales quelconques partant d'un point de la ligne des pôles, les droites qui relient ces deux transversales forment un système de polaires, dont le pôle n'est pas sur la ligne des pôles des deux premiers systèmes.* (Fig. 11.)

Comme application de ce théorème, nous citerons la proposition suivante qui complète celle qui est énoncée à l'art. (87).

Proposition. — « Un quadrilatère étant circonscrit à un autre, si les » points de concours des côtés opposés du premier se trouvent respecti- » vement sur les deux diagonales du second, alors les deux points de » concours des côtés opposés du second se trouveront respectivement sur » les deux diagonales du premier. »

Soit D une diagonale du quadrilatère inscrit, et soient p, p' les extrémités de l'autre diagonale du même quadrilatère. Une figure montrera trois polaires partant du pôle p, qui rencontrent respectivement sur la diagonale D, trois polaires partant du pôle p'. En prenant pour transversales de ces deux systèmes de trois polaires, les deux côtés du quadrilatère circonscrit qui partent de la ligne des pôles pp', il suffira, pour que la proposition se trouve démontrée, d'appliquer deux fois de suite le théorème précédent, en prenant la seconde fois la transversale du premier système pour transversale du second système, et réciproquement.

105. — Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur*

Digitized by Google

une droite, si un système de parallèles à une direction autre que celle de la ligne des pôles coupe chacun des deux systèmes de polaires sur une transversale, le sommet de ces deux transversales se trouvera sur la ligne des pôles.

Démonstration. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction des parallèles, les deux systèmes de polaires représentent un hyperboloïde, ayant les mêmes directrices que dans la démonstration du théorème (103), (*fig.* 10). Ici la droite de l'espace, qui a pour projections les deux transversales, rencontrant toutes les génératrices de l'hyperboloïde, rencontre nécessairement celle dont la projection double coïncide avec la ligne des pôles; de là, il est facile de conclure que le sommet des deux transversales doit se trouver sur la ligne des pôles.

106. — Une perspective des systèmes de lignes énoncées au théorème précédent, conduit au théorème analogue qui suit :

Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite, si un troisième système de polaires, dont le pôle n'est pas sur la ligne des pôles des deux premiers systèmes, coupe chacun de ceux-ci suivant une transversale, le sommet des deux transversales se trouvera sur la ligne des pôles des deux premiers systèmes.* (Fig. 11.)

107. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite, si, après avoir projeté les deux pôles sur cette droite parallèlement à une direction quelconque, on construit un système de parallèles à la même direction, rencontrant le premier système de polaires sur une transversale passant par la projection du pôle du second système, ce système de parallèles rencontrera aussi le second système sur une transversale qui passera par la projection du pôle du premicr système; de plus, le sommet des deux transversales se trouvera sur la ligne des pôles.* (Fig. 12.)

Démonstration. — Supposons que les deux systèmes de polaires p, p' se rencontrent sur la droite D (*fig.* 12); projetons les deux pôles p, p' sur la droite D, parallèlement à une direction quelconque donnée; soit π' la projection du pôle p, et π la projection du pôle p'. Supposons qu'un système de parallèles à la direction donnée (parallèles qui sont pointillées sur la figure), rencontre le système de polaires p sur la transversale $abcd$, etc., passant par π; — il s'agit de prouver que les points a',b',c',d', etc.,

Digitized by Google

dans lesquels le même système de parallèles rencontre le système de polaires p', sont sur une même droite ou transversale passant par π'. En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction des parallèles, les deux systèmes de polaires représentent un hyperboloïde à une nappe ayant pour ses trois directrices : 1° la verticale (p); 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite de l'espace (D, D) située dans le plan bissecteur B. Les trois génératrices principales de cet hyperboloïde sont : 1° la verticale (π); 2° la perpendiculaire (π') au plan vertical; 3° la droite de l'espace dont la projection double coïncide avec la ligne des pôles. Cela posé, la droite de l'espace (ab, $a'b'$) qui passe par les deux points de l'espace (a, a'), (b, b') rencontre : 1° la génératrice (pa, $p'a'$); 2° la génératrice (pb, $p'b'$); 3° la génératrice verticale projetée au point π; cette droite rencontre donc toutes les autres génératrices et conséquemment les points (c, c'), (d, d'), etc., sont tous points de la même droite; donc $abcd$, etc., $a'b'c'd'$, etc., sont les deux projections d'une même droite et les points a', b', c', d', etc., sont en ligne droite. La droite a' b' c' etc., doit passer par π', à cause que le point π' est la projection d'une génératrice perpendiculaire au plan vertical de projection. Maintenant que le système de parallèles rencontre les deux systèmes de polaires suivant les deux transversales abc, etc., $a'b'c'$ etc., respectivement, il résulte de (105) que le sommet de ces deux transversales doit se trouver sur la ligne des pôles.

108. — Une perspective des systèmes de lignes énoncées au théorème qui précède, fournit le théorème analogue qui suit :

Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, si, après avoir projeté les pôles sur cette droite, à partir d'un centre de projection quelconque, l'on construit un troisième système de polaires, ayant son pôle au même centre, et coupant le premier système de polaires sur une transversale passant par la projection du pôle du second système, ce troisième système coupera aussi le second sur une transversale qui passera par la projection du pôle du premier; de plus, le sommet des deux transversales se trouvera sur la ligne des pôles des deux premiers systèmes.* (Fig. 13.)

(*Voir* la figure 13, où les deux systèmes de polaires p, p' se coupent

sur la droite D, et où les pôles p, p' sont projetés sur D, respectivement en π' et π, à partir du centre de projection o. Le système de polaires o coupe le système p sur la transversale donnée t, passant par π; et il coupe le système p' sur une transversale t' passant par π').

109. — Nous nous contentons d'énoncer le théorème suivant dont la démonstration repose sur des considérations tout à fait semblables à celles de l'art. (107.)

Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, et ayant projeté dans la direction de ces parallèles le pôle de chaque système sur la transversale de l'autre système, si l'on construit un nouveau système de parallèles de même direction coupant le premier système de polaires sur une transversale passant par la projection du pôle du second système, ce nouveau système coupera aussi le second sur une transversale qui passera par la projection du pôle du premier.*

110. — Une perspective des lignes énoncées au théorème précédent donne le théorème analogue qui suit :

Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires π, si, après avoir choisi le pôle π pour centre de projection, l'on projette le pôle de chacun des deux premiers systèmes sur la transversale de l'autre système, et que l'on construise un nouveau système de polaires, ayant son pôle en π, et coupant le premier système de polaires sur une transversale passant par la projection du pôle du second système, ce nouveau système coupera le second sur une transversale qui passera par la projection du pôle du premier système.*

§ IV.

Conditions pour que deux systèmes de polaires se coupent sur une droite, déduites de la considération de l'hyperboloïde à une nappe.

111. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires se coupent sur une droite lorsque leurs transversales, partant d'un point de la ligne des pôles, sont reliées par un système de parallèles dont la direction n'est pas celle de la ligne des pôles.*

Digitized by Google

De plus, si l'on projette, dans la direction des parallèles, le pôle de chaque système sur la transversale de l'autre système, la droite mentionnée passera par ces deux projections. (Fig. 12.)

DÉMONSTRATION. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction des parallèles, les deux systèmes de polaires *pt, p't'* (*fig.* 12), représentent un hyperboloïde à une nappe (62), ayant pour directrices : 1° la verticale (*p*); 2° la perpendiculaire (*p'*) au plan vertical de projection; 3° la droite de l'espace (*t, t'*). Le sommet *n* des deux transversales *t, t'* étant sur la ligne des pôles, la droite de l'espace, dont les deux projections coïncident avec la ligne des pôles, sera une génératrice de cet hyperboloïde; et comme cette génératrice est située dans le plan bissecteur *B*, il s'ensuit que ce dernier plan coupe toutes les autres génératrices en des points situés sur une même droite. C'est en construisant les points de rencontre de ces autres génératrices avec le plan bissecteur *B*, qu'on aura la droite mentionnée à l'énoncé.

Voici maintenant l'explication du dernier point de l'énoncé : Ayant projeté, dans la direction des parallèles, le pôle *p* en π' et le pôle *p'* en π, comme il est dit à l'énoncé, on sait (62) que la verticale (π) et la perpendiculaire (π') au plan vertical de projection sont deux génératrices de l'hyperboloïde. Ces deux génératrices rencontrent respectivement le plan bissecteur *B* en deux points, dont la projection double de l'un coïncide avec π, et la projection double de l'autre avec π' (5). Ces deux points π, π' appartiennent donc à la droite mentionnée à l'énoncé.

112. — Une perspective des lignes énoncées au théorème précédent conduit au théorème analogue ci-dessous, qui exprime, en d'autres termes, celui de M. Chasles, *Géométrie supérieure*, page 241, art. 333.

THÉORÈME. — *Deux systèmes de polaires se coupent sur une droite lorsque leurs transversales, partant d'un point de la ligne des pôles, sont reliées par un troisième système de polaires dont le pôle n'est pas sur la ligne des pôles des deux premiers systèmes. De plus, cette droite rencontre la transversale de chaque système en un point de la ligne des pôles des deux autres systèmes; c'est-à-dire le triangle formé par cette droite et les deux transversales, est inscrit au triangle qui a pour sommets les trois pôles.* (Fig. 13.)

Digitized by Google

Dans les deux premiers systèmes, il y a deux polaires, une dans chaque système, qui passent par le pôle du troisième système : c'est en construisant le point d'intersection de chacune de ces deux polaires avec sa correspondante, que l'on se rendra compte du dernier point de l'énoncé.

Du théorème précédent résulte immédiatement cette proposition :

PROPOSITION. — « Si les trois côtés d'un triangle variable de forme » tournent respectivement autour de trois pôles fixes, non situés en ligne » droite, tandis que deux sommets pris sur l'un des côtés, se meuvent » respectivement sur deux droites fixes partant d'un point en ligne droite » avec les pôles des deux autres côtés, le troisième sommet décrit une » droite, qui forme, avec les deux droites fixes précédentes, un triangle » inscrit à celui qui a pour sommets les trois pôles. »

Cette proposition fait voir (*fig.* 13) que,

« Si un premier triangle *opp'* est circonscrit à un second $\pi\pi'n$, il existe » une infinité d'autres triangles $bb'\lambda$, dont chacun est à la fois circonscrit » au premier et inscrit au second. »

113. — Si l'on fait une perspective telle que les deux premiers systèmes de polaires du théorème (**112**) deviennent deux systèmes de parallèles, alors les deux transversales deviennent parallèles aussi ; et l'on a ce théorème :

THÉORÈME. — *Deux systèmes de parallèles de direction différente dont les transversales sont parallèles et reliées par un système de polaires, se coupent sur une droite, qui n'est pas parallèle aux deux transversales.*

114. — Lorsque deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, sont coupés par deux transversales qui ne partent ni d'un point de cette droite (83 et 85), ni d'un point de la ligne des pôles (103 et 104), on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite étant coupées respectivement par deux transversales qui ne partent, ni d'un point de cette droite, ni d'un point de la ligne des pôles, les droites qui relient les deux transversales seront tangentes à une même section conique, qui a aussi pour tangentes les deux transversales. La section conique sera une parabole, si les deux transversales sont respectivement parallèles à deux polaires correspondantes.*

Digitized by Google

Démonstration. — Dans le cas où les deux transversales sont respectivement parallèles à deux polaires correspondantes, la courbe mentionnée à l'énoncé sera, d'après le théorème (16), une parabole, si nous prouvons que les deux transversales sont divisées en parties respectivement proportionnelles. Or, si par un point de la droite, sur laquelle se coupent les deux systèmes de polaires, on mène deux nouvelles transversales respectivement parallèles aux deux premières transversales, ces nouvelles transversales seront évidemment, d'après le théorème (83), divisées en parties proportionnelles. Donc, les deux premières transversales sont aussi divisées en parties proportionnelles (en vertu du principe que deux transversales parallèles d'un même système de polaires sont divisées en parties proportionnelles). — Donc, etc. Dans le cas où les deux transversales ne sont pas respectivement parallèles à deux polaires correspondantes, on peut toujours faire une perspective des deux systèmes de polaires proposées et de leurs transversales, telle que les perspectives des deux transversales soient respectivement parallèles aux perspectives de deux polaires correspondantes. Dès lors, les droites qui relient les perspectives des deux transversales seront tangentes à une même parabole; donc les droites qui relient les deux transversales sur la figure primitive seront tangentes à une même section conique, autre qu'une parabole.

Il reste encore à prouver que les droites qui relient les deux transversales ne sauraient être parallèles, ni passer par un même point. Or, il ressort de (94, 95, 105, 106), que deux des droites qui relient les deux transversales, ne sauraient être parallèles, et que trois de ces droites ne sauraient passer par un même point; car, dans les deux cas, le sommet des deux transversales devrait se trouver soit sur la ligne des pôles, soit sur la droite d'intersection des deux systèmes de polaires, ce qui est contre l'hypothèse. Donc, etc.

Du théorème qui précède, on déduit sans difficulté la proposition suivante :

Proposition. — « Si les sommets d'un triangle sont assujettis à parcourir respectivement trois droites fixes, tandis que les deux premiers

Digitized by Google

» côtés ou leurs prolongements pivotent autour de deux points invariables, » comme pôles, le troisième côté roulera dans toutes ses positions au- » tour d'une même section conique. » (Poncelet, *Propriétés projectives*, pag. 113.)

En suivant le mouvement du triangle mobile, on voit que les côtés qui tournent autour des deux points fixes décrivent deux systèmes de polaires qui se coupent sur l'une des trois droites fixes. Ces deux systèmes de polaires ont respectivement pour transversales les deux autres droites fixes. Le troisième côté relie à chaque instant les deux transversales; donc, ce troisième côté est à chaque instant tangent à une même conique.

TROISIÈME SECTION.

DÉFINITIONS DE LIEUX GÉOMÉTRIQUES DU SECOND DEGRÉ ET DE DEGRÉS SUPÉRIEURS, DÉDUITES, SOIT DES SURFACES RÉGLÉES DU SECOND DEGRÉ ET DE DEGRÉS SUPÉRIEURS, SOIT DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

§ I.

Définitions de lieux géométriques du second degré.

115. — Toute section faite par un plan dans un hyperboloïde à une nappe ou dans un paraboloïde hyperbolique, est une courbe du second degré; car une droite ne peut rencontrer aucune de ces surfaces, ni conséquemment la section dont il s'agit, en plus de deux points.

116. — La section faite par un plan dans un hyperboloïde à une nappe est une hyperbole, si le plan sécant est parallèle à une directrice et à une génératrice de l'hyperboloïde, pourvu que cette directrice et cette génératrice ne soient pas parallèles entre elles. Cela revient à dire que la section est une hyperbole, si le plan sécant est parallèle à deux génératrices d'un même mode de génération. Dans ce cas, la section a, en effet, deux points à l'infini.

Digitized by Google

La section sera une parabole, si le plan sécant est parallèle à une seule génératrice d'un même mode de génération; car ici la section n'a qu'un point à l'infini.

117. — La section faite par un plan dans un paraboloïde hyperbolique, est une hyperbole, si le plan sécant est parallèle à deux génératrices de modes différents.

La section est une parabole, si le plan sécant n'est parallèle à aucune génératrice des deux modes de génération; à cet égard, faisons remarquer que si un plan sécant n'est pas parallèle à une génératrice d'un mode, il n'est pas non plus parallèle à une génératrice de l'autre mode.

118. — Problème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, si l'on fait tourner l'un des deux, considéré comme système invariable, autour de son pôle d'une quantité angulaire ω, on demande si le système ainsi déplacé et le système demeuré fixe ont ou n'ont pas de polaires correspondantes parallèles.*

Solution. — Soient p, p' les deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite D. Il est facile de voir, à l'aide d'une figure, que les deux polaires qui primitivement se coupent sur la droite D et font entre elles un angle égal à ω, ou supplémentaire de ω, sont précisément celles qui deviennent parallèles après le déplacement, par rotation, de l'un des deux systèmes.

Donc, en décrivant sur la droite $p\,p'$ un segment de cercle capable de l'angle ω, si la circonférence de ce cercle coupe la droite proposée D en deux points, il y aura deux paires de polaires correspondantes qui deviendront parallèles; ce qui a toujours lieu lorsque la droite D passe entre les deux pôles p, p'. Si la circonférence est tangente à la droite D, une seule paire de polaires correspondantes deviendront parallèles. Enfin, si la circonférence ne coupe pas la droite D, aucune paire de polaires correspondantes ne deviendront parallèles.

Remarque. — Cette solution prouve, en même temps, que le système qui s'est déplacé et le système qui est demeuré fixe ne peuvent avoir plus de deux paires de polaires correspondantes parallèles.

119. — Problème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, on demande si ces deux systèmes de polaires ont ou n'ont pas de polaires correspondantes parallèles.*

Digitized by Google

Solution. — Soient pt, $p't'$ deux systèmes de polaires dont les transversales t, t' sont reliées par un système de parallèles.

Je remplace la transversale t' par une autre t'' parallèle à t' et égale à t (c'est-à-dire que les polaires p' devront intercepter sur t'' des parties respectivement égales à celles que les polaires p interceptent sur t). Je transporte maintenant le système p' considéré comme système invariable, de manière que les divisions de t'' coïncident respectivement avec les divisions de t. Le pôle p' prendra une nouvelle position facile à construire et que nous désignerons par π, le système π ne différant du système primitif p' que par sa position. On a ainsi les deux systèmes de polaires p et π se coupant sur la droite t. Je détermine actuellement la quantité angulaire ω dont il faut faire tourner le système π autour de son pôle, pour que ses polaires deviennent respectivement parallèles aux polaires du système p', et la question se trouve alors ramenée à celle de l'article précédent.

Remarque. — On déduit facilement de cette solution, que deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, ne sauraient avoir plus de deux paires de polaires correspondantes parallèles. Ce point résulte aussi de la remarque faite à l'article (62).

120. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires, dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, se coupent sur une conique qui passe par les deux pôles et par le sommet des deux transversales. La conique sera :*

Une parabole, *si une polaire du premier système (construite ou à construire) est parallèle à sa correspondante du second système;*

Une hyperbole, *si deux polaires du premier système sont respectivement parallèles à leurs correspondantes du second système;*

Une ellipse, *si aucune polaire du premier système n'est parallèle à sa correspondante du second système;*

Une droite, *dans les cas mentionnés aux articles* (94) *et* (111).

Tangente. — *La polaire du premier système qui a pour correspondante dans le second système la ligne des pôles, est tangente à la conique, au pôle du premier système.*

Digitized by Google

Démonstration. — Soient pt, $p't'$ les deux systèmes de polaires définis à l'énoncé.

En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction des parallèles qui relient les deux transversales t, t', les deux systèmes de polaires représentent un hyperboloïde à une nappe (62), et la courbe sur laquelle se coupent les deux systèmes de polaires est la projection double de la section faite dans cet hyperboloïde par le plan bissecteur B; donc cette courbe est du second degré.

La courbe du second degré passe par les deux pôles, parce que le plan bissecteur B rencontre les deux directrices de l'hyperboloïde qui ont respectivement pour projections les deux pôles.

La courbe du second degré passe par le sommet des deux transversales, parce que celles-ci étant les projections d'une directrice de l'hyperboloïde, le sommet de ces deux transversales est la projection double du point de rencontre de cette directrice avec le plan bissecteur B.

Tangente. — Si l'on suit le mouvement de deux polaires correspondantes, on voit à l'évidence que lorsque l'une des deux polaires vient coïncider avec la ligne des pôles, l'autre polaire devient tangente en son pôle à la courbe en question.

Pour construire la tangente en un point n *qui ne coïncide avec aucun des deux pôles*, projetons, parallèlement à la direction des parallèles, le pôle p sur la transversale t', le pôle p' sur la transversale t, et représentons par π, la projection du pôle p, et par π la projection du pôle p'.

Par le point n passent deux polaires pn, $p'n$ qui sont les projections d'une génératrice de l'hyperboloïde. Par le même point n passent deux autres polaires πn, $\pi' n$ qui sont les projections d'une génératrice de l'autre mode de génération du même hyperboloïde. On construira les traces horizontales de ces deux génératrices $(pn, p'n)$, $(\pi n, \pi' n)$. La droite qui unit ces deux traces sera la trace horizontale du plan tangent à l'hyperboloïde au point (n, n). La droite, qui va du point n au point où cette trace du plan tangent rencontre la ligne de terre, sera la tangente demandée (29).

121. — En faisant la perspective des systèmes de lignes mentionnés dans le théorème précédent, on en déduira le théorème analogue qui suit:

Digitized by Google

Théorème. — *Deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires, se coupent sur une conique qui passe par les pôles des deux premiers systèmes et par le sommet des deux transversales. La conique devient une droite dans les cas mentionnés aux articles* (97) *et* (112).

Tangente. — La règle pour construire la tangente à la courbe, en l'un des pôles des deux premiers systèmes, est la même que dans le théorème précédent. Quant à la construction de la tangente en un point quelconque de la courbe, on trouvera facilement à modifier la construction indiquée au théorème précédent, et à l'adapter au cas actuel.

On déduit du théorème précédent la proposition suivante due à Maclaurin.

Proposition. — « Si les trois côtés d'un triangle mobile sur son plan » sont assujettis à pivoter autour de trois points fixes comme pôles, et » qu'en même temps les deux premiers sommets soient assujettis à par- » courir respectivement deux droites fixes comme directrices, le troisième » sommet parcourra, par suite du même mouvement, une section coni- » que. » (Poncelet, *Propriétés projectives*, pag. 110.)

En construisant un certain nombre de positions du triangle mobile, on verra, en effet, que toutes les circonstances du théorème précédent subsistent.

122. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, si un second système de parallèles de même direction rencontre le premier système de polaires sur une droite, il rencontrera le second système de polaires sur une hyperbole passant par le pôle du second système. L'hyperbole devient une ligne droite dans les cas mentionnés aux articles* (95) *et* (109).

Démonstration. — Soient D la droite et c la courbe sur lesquelles le second système de parallèles rencontre respectivement les deux systèmes de polaires. En prenant une ligne de terre perpendiculaire au système de parallèles, les deux systèmes de polaires représentent une hyperboloïde à une nappe (62), dont D et c sont les deux projections d'une section plane, faite par le plan projeté suivant la droite D. La projection c de cette section est donc une courbe du second degré. Cette courbe passe par le pôle

Digitized by Google

mentionné à l'énoncé, parce que le plan projeté suivant *D* rencontre la directrice de l'hyperboloïde qui a pour projection ce pôle. Enfin, cette courbe est une hyperbole, parce que le plan sécant, projeté suivant *D*, est parallèle : 1° à l'une des deux directrices qui se projettent respectivement aux deux pôles; 2° à une certaine génératrice dont une des deux projections est parallèle à *D* (116).

TANGENTE. — Pour mener une tangente à la courbe *c*, on construira le plan tangent à l'hyperboloïde en un point de la section (*D*, *c*) et l'on déterminera l'intersection de ce plan tangent avec le plan projeté suivant *D*.

123. — En faisant la perspective des divers systèmes de lignes énoncés au théorème précédent, on aura le théorème analogue qui suit :

THÉORÈME. — *Étant donnés deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires, si un quatrième système, ayant même pôle que le troisième, coupe l'un des deux premiers sur une droite, il coupera l'autre sur une courbe du second degré, passant par le pôle de cet autre et par le pôle du troisième.*

Cette courbe du second degré devient une droite quand les trois pôles sont en ligne droite et aussi dans le cas de l'art. (110).

Pour faire voir que la courbe dont il s'agit doit passer par le pôle commun au troisième et au quatrième système, il suffit de construire dans le système coupé suivant la courbe, la polaire qui passe par le pôle commun, et de construire, dans le système coupé suivant la droite, la polaire correspondante de la polaire précédente. Le point de la courbe fourni par ces deux polaires correspondantes coïncidera précisément avec le pôle commun au troisième et au quatrième système.

TANGENTE. — La construction de la tangente en un point de la courbe qui nous occupe, se déduit facilement de la construction indiquée au théorème précédent.

124. — THÉORÈME. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite, si un système de parallèles coupe l'un des deux systèmes de polaires sur une transversale, il coupera l'autre système sur une hyperbole passant par le pôle de cet autre système. L'hyperbole devient une droite quand le sys-*

Digitized by Google

tème de parallèles a même direction que la ligne des pôles (95), *comme aussi dans le cas de l'art.* (107).

Démonstration. — On fera représenter aux deux systèmes de polaires de l'énoncé un hyperboloïde à une nappe en prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction du système de parallèles (64). Le reste de la démonstration comme à l'art. (122).

Tangente. — Même observation qu'à l'art. (122) pour ce qui concerne la construction de la tangente.

125. — Si l'on fait une perspective des systèmes de lignes énoncés au théorème précédent, on aura le théorème analogue :

Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite, si un troisième système de polaires coupe l'un des deux premiers sur une transversale, il coupera l'autre sur une courbe du second degré passant par le pôle de cet autre système et par le pôle du troisième.*

La courbe devient une droite si les trois pôles sont en ligne droite (97 coroll.), *et aussi dans le cas de l'art.* (108).

126. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires respectivement parallèles, si un système de parallèles coupe l'un de ces deux systèmes sur une droite, il coupera l'autre sur une hyperbole passant par le pôle de cet autre système. L'hyperbole sera une droite parallèle à la droite proposée, si le système de parallèles a même direction que la ligne des pôles* (95 coroll.)

Démonstration directe. — Soient *D* la droite et *c* la courbe suivant lesquelles le système de parallèles rencontre respectivement les deux systèmes de polaires. En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction des parallèles, les deux systèmes de polaires représentent un paraboloïde hyperbolique (67). Le plan projeté suivant *D* coupe ce paraboloïde suivant une courbe du second degré, dont *D* et *c* sont les deux projections; donc la courbe *c* est aussi du second degré. De plus, elle a deux points à l'infini, c'est-à-dire que c'est une hyperbole, parce que le plan projeté suivant *D*, est parallèle : 1° à l'une des deux directrices du paraboloïde qui se projettent respectivement aux deux pôles; 2° à la génératrice dont les deux projections sont parallèles à *D* (117).

Enfin, la courbe *c* passe par le pôle mentionné à l'énoncé, parce que

Digitized by Google

le plan projeté suivant D rencontre la directrice du paraboloïde projetée en ce pôle.

127. — En faisant une perspective telle que les deux systèmes de polaires dont il est question au théorème (120), deviennent deux systèmes de parallèles, la courbe mentionnée au même théorème aura deux points à l'infini, les deux pôles, et l'on aura ce nouveau théorème :

THÉORÈME. — *Deux systèmes de parallèles dont les transversales sont reliées par un système de polaires, se coupent sur une hyperbole qui passe par le sommet des deux transversales. Cette hyperbole devient une droite quand les deux transversales sont parallèles* (113).

Autrement : Étant donnés un système de parallèles et un système de polaires qui se rencontrent sur une droite, si un second système de parallèles coupe le système de polaires sur une transversale, il coupera le premier système de parallèles sur une hyperbole passant par le point d'intersection de la droite avec la transversale.

DÉMONSTRATION directe pour le second énoncé. — Soit D la droite sur laquelle le système de polaires p rencontre le premier système de parallèles; et soit t la transversale sur laquelle ce même système de polaires est rencontré par le second système de parallèles. En prenant une ligne de terre perpendiculaire au second système de parallèles, le premier système de parallèles et le système de polaires représenteront, d'après (69), une paraboloïde hyperbolique ayant pour directrices : 1° la verticale (p); 2° la droite (D, D) située dans le plan bissecteur B. L'hyperbole mentionnée à l'énoncé est une projection de la section faite dans ce paraboloïde par le plan projeté suivant t. La section est, d'ailleurs, une hyperbole, parce que ce plan est parallèle à la directrice projetée au pôle p.

128. — THÉORÈME. — *Un système de parallèles et un système de polaires, dont les transversales sont reliées par un second système de parallèles, se coupent sur une parabole ou sur une hyperbole passant par le sommet des deux transversales. La courbe sera une parabole, si le premier système de parallèles a même direction que la transversale des polaires; elle sera une hyperbole dans tous les autres cas.*

En d'autres termes :

Étant donnés deux systèmes de parallèles qui se rencontrent sur une droite, si un

Digitized by Google

système de polaires rencontre le premier système sur une transversale, il rencontrera le second sur une parabole ou sur une hyperbole, selon que la transversale sera ou non parallèle à la direction des parallèles du second système.

Démonstration pour le premier énoncé. — Soient p le pôle et t la transversale du système de polaires, et soit t' la transversale du premier système de parallèles. En prenant une ligne de terre perpendiculaire au second système de parallèles, le système de polaires et le premier système de parallèles représentent un paraboloïde hyperbolique (68), ayant pour directrices : 1° la verticale (p) projetée au pôle p; 2° la droite de l'espace (t, t'). La courbe mentionnée à l'énoncé est la projection double de la section faite dans ce paraboloïde par le plan bissecteur B; donc cette courbe est du second degré. On vérifie facilement que dans le cas de la parabole où le premier système de parallèles a même direction que la transversale des polaires, aucune génératrice du paraboloïde n'est parallèle au plan bissecteur B, tandis que dans le cas contraire il y aura toujours une génératrice du paraboloïde parallèle à ce plan bissecteur. — Dans le cas où les deux transversales seraient parallèles, la directrice (t, t') du paraboloïde serait parallèle au plan bissecteur B, et la courbe serait une hyperbole.

Tangente en un point quelconque n de la courbe. — Par le point de l'espace (n, n) passe un plan tangent au paraboloïde; la trace principale de ce plan tangent est la tangente demandée.

Pour construire cette trace principale, on cherchera d'abord la trace horizontale de ce plan tangent; pour cela, il faut remarquer que la génératrice qui passe par le point (n, n), est une première droite de ce plan, et que, pour se procurer une seconde droite, il suffit de couper le paraboloïde par un plan auxiliaire parallèle aux deux directrices (p) et (t, t'); ce plan auxiliaire est vertical et se projette suivant une droite menée par n parallèlement à t. Après avoir construit de cette façon la trace horizontale du plan tangent, on aura la tangente demandée, en joignant par une droite le point n avec le point où la trace horizontale du plan tangent rencontre la ligne de terre.

129. — Théorème. — *L'intersection de deux systèmes de polaires, respective-*

Digitized by Google

ment parallèles à deux autres systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, est une hyperbole qui passe par les pôles des deux premiers systèmes. L'hyperbole devient une droite parallèle à la droite proposée, si la ligne des pôles des deux premiers systèmes est parallèle à la ligne des pôles des deux autres (100).

Démonstration. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles des deux derniers systèmes de polaires, ceux-ci représenteront un plan et les deux premiers systèmes un paraboloïde hyperbolique, ayant ce plan pour plan directeur (71). La courbe mentionnée à l'énoncée est la projection double de la section faite dans ce paraboloïde par le plan bissecteur *B*. Cette courbe est une hyperbole, parce qu'une génératrice du paraboloïde (celle dont les deux projections sont parallèles à la droite mentionnée dans l'énoncé) est parallèle au plan bissecteur *B*. Nous laissons au lecteur à chercher le mode de construction de la tangente à cette hyperbole en rappelant seulement que le second plan directeur du paraboloïde mentionné est perpendiculaire à la ligne de terre.

§ II.

Définitions de lieux géométriques de tous les degrés.

130. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de parallèles, de direction différente, qui se coupent sur une courbe d'un degré quelconque, si un troisième système de parallèles coupe l'un des deux premiers systèmes sur une droite, il coupera l'autre sur une courbe de même degré et de même genre que la première courbe.*

Réciproquement. Étant donnés trois systèmes de parallèles, de directions différentes, si l'un de ces systèmes rencontre respectivement les deux autres sur une droite et sur une courbe d'un degré quelconque, ces deux autres systèmes se couperont sur une autre courbe de même degré et de même genre que la première.

Tangente. — *A chaque point de la nouvelle courbe correspond un point sur la première courbe (ces deux points sont reliés par une parallèle du second système); deux tangentes menées par ces deux points aux deux courbes respectivement, rencontrent la droite mentionnée à l'énoncé en un même point.*

Démonstration. — Soit *s* la courbe sur laquelle se coupent les deux

Digitized by Google

premiers systèmes de parallèles; et soient D et c la droite et la courbe sur lesquelles le troisième système de parallèles rencontre respectivement les deux premiers systèmes.

En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction du troisième système de parallèles, les deux premiers systèmes représentent un cylindre dont la courbe de l'espace (s, s), située dans le plan bissecteur B, est la directrice, et dont D et c sont les deux projections d'une section plane, faite dans ce cylindre par le plan projeté suivant D. Cette section étant une courbe de même degré et de même genre que la courbe directrice, la projection c de cette section sera une courbe de même genre et de même degré que la projection s de la directrice.

Pour construire la tangente à la courbe c, on imaginera, par un point pris sur la section (D, c), un plan tangent au cylindre mentionné, et l'on construira la trace principale de ce plan tangent, laquelle est tangente à la courbe s. La tangente au point pris sur la section (D, c) étant située dans ce plan tangent, le point d'intersection des deux projections de cette tangente devra se trouver sur la trace principale du plan tangent. Or, des deux projections de la tangente à la section (D, c), l'une coïncide avec D, et l'autre est tangente à c; donc la tangente à c doit rencontrer la droite D en un point de la trace principale du plan tangent; ce qui est, en d'autres termes, la règle énoncée plus haut.

La réciproque, corollaire évident du théorème, se démontre directement en considérant le cylindre mentionné à la démonstration précédente, comme ayant pour directrice la courbe de l'espace (D, c), et en construisant l'intersection de ce cylindre avec le plan bissecteur B.

131. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se coupent sur une courbe du degré* n, *si un système de parallèles à la ligne des pôles coupe le premier système de polaires sur une droite, il coupera le second système sur une courbe de même degré que la courbe proposée.*

Réciproquement. Si un système de parallèles à la ligne des pôles de deux systèmes de polaires définis rencontre l'un des systèmes de polaires sur une droite et l'autre sur une courbe du degré n, *les deux systèmes de polaires se couperont sur une courbe de même degré que la première courbe.*

TANGENTE. — *A chaque point de la dernière courbe correspond un point sur la première courbe, situés tous les deux sur une polaire du second système; les tangentes aux deux courbes en ces deux points rencontrent la droite mentionnée à l'énoncé en un même point.*

DÉMONSTRATION. — On fera représenter aux deux systèmes de polaires un cône (73 et 74); le reste de la démonstration comme il est indiqué à l'article précédent.

REMARQUE. — Si les deux systèmes de polaires de l'énoncé se coupent sur une courbe passant par le pôle du second système, le système de parallèles, eu égard à l'art. (74), coupera le second système de polaires sur une courbe passant aussi par le pôle de ce second système; cette courbe aura au moins un point à l'infini, si les deux systèmes de polaires se coupent sur une courbe qui passe par les deux pôles.

132. — Si l'on fait une perspective des lignes énoncées à l'un des deux théorèmes précédents, on en déduira le suivant :

THÉORÈME. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se coupent sur une courbe d'un degré quelconque, si un troisième système de polaires, ayant son pôle sur la ligne des pôles des deux premiers, coupe l'un de ceux-ci sur une droite, il coupera l'autre sur une courbe de même degré que la courbe proposée.*

Réciproquement. Étant donnés trois systèmes de polaires ayant leurs pôles en ligne droite, si l'un de ces systèmes rencontre respectivement les deux autres sur une droite et sur une courbe du degré n, *les deux autres systèmes se couperont sur une autre courbe du même degré.*

133. — En appliquant le théorème (130) aux coordonnées rectilignes employées en géométrie analytique, lesquelles constituent pour chaque courbe deux systèmes de parallèles, l'un à l'axe des abscisses, l'autre à l'axe des ordonnées, et se coupant deux à deux sur cette courbe, on est conduit au mode de déformation connu dont voici l'énoncé :

MODE DE DÉFORMATION. — *Si l'on fait tourner, dans le même sens et d'une même quantité angulaire, toutes les ordonnées d'une courbe donnée autour de leurs points de rencontre avec l'axe des abscisses (et plus généralement autour de leurs points de rencontre avec une droite arbitraire* D)*; ces ordonnées dans leurs nouvelles positions, prolongées si cela est nécessaire, rencontreront le système des*

Digitized by Google

abscisses demeurées fixes sur une courbe de même degré et de même genre que la courbe proposée.

Tangente. — *A chaque point de la courbe proposée correspond un point sur la courbe déformée; les tangentes à ces courbes en ces deux points rencontrent l'axe des abscisses en un même point.*

Remarque. — Dans le mode de déformation ci-dessus, il est facile de reconnaître que les ordonnées de la courbe déformée sont respectivement proportionnelles aux ordonnées de la courbe primitive.

134. — On peut encore déduire comme corollaire du théorème (130) le mode de déformation connu dont voici l'énoncé :

Mode de déformation. — *Si, sans faire varier leurs grandeurs, on fait tourner, dans le même sens et d'une même quantité angulaire, toutes les ordonnées d'une courbe autour de leurs points de rencontre avec l'axe des abscisses, les extrémités de ces ordonnées dans leurs nouvelles positions se trouvent sur une nouvelle courbe de même degré et de même genre que la courbe proposée.*

La tangente *à la courbe déformée se construit comme à l'art.* (133).

Démonstration. — Il suffit de remarquer que les arcs décrits par les extrémités des ordonnées sont semblables et que leurs cordes sont parallèles. Cela étant, il résulte du théorème (130) que ces cordes sont coupées par les ordonnées dans leurs nouvelles positions sur une courbe de même degré et de même genre que la courbe proposée.

135. — Si, après avoir déformé une courbe au moyen du mode (133), on ramène les ordonnées dans leurs positions primitives sans les faire varier de grandeur, comme il est dit au mode (134), on sera conduit à ce troisième mode de déformation connu :

Mode de déformation. *Si l'on réduit dans un même rapport toutes les ordonnées d'une courbe, les extrémités des ordonnées réduites formeront une courbe de même degré et de même genre que la courbe proposée.*

La tangente *à la courbe déformée se construit comme à l'art.* (133).

Remarque. — Les théorèmes (131 et 132) donneraient lieu à des modes de déformation analogues aux précédents; nous en abandonnons les énoncés au lecteur.

136. — Théorème. — *Étant donnée une courbe qui jouit de la propriété d'avoir*

Digitized by Google

un diamètre, si, par les deux extrémités de chaque corde conjuguée à ce diamètre, on mène deux droites respectivement parallèles à deux directions données, on aura deux systèmes de droites parallèles qui se couperont sur une nouvelle courbe de même degré et de même genre que la courbe proposée. De plus, la nouvelle courbe passera par les extrémités du diamètre de la courbe proposée.

Tangente. — *A chaque point* n *de la nouvelle courbe correspond une corde dans la courbe donnée. Les deux tangentes menées par les extrémités de cette corde à la courbe donnée et la tangente en* n *à la nouvelle courbe, concourent en un même point.*

Démonstration. — Si la propriété énoncée est vraie pour une projection orthogonale quelconque des données de l'énoncé, elle le sera pour ces données elles-mêmes. Cela étant, nous démontrerons la propriété énoncée pour le cas où le diamètre conjugué au système de cordes est perpendiculaire à ces dernières, parce que l'on peut toujours trouver un plan sur lequel les projections des cordes sont perpendiculaires à la projection de leur diamètre conjugué.

Désignons par c la courbe proposée. En prenant le diamètre conjugué au système de cordes, pour ligne de terre, les deux systèmes de parallèles représentent un cylindre qui a pour directrice la courbe de l'espace (c, ɔ) située dans le plan bissecteur B' (77); la nouvelle courbe, fournie par l'intersection des deux systèmes de parallèles, est la projection double de l'intersection du cylindre avec le plan bissecteur B. Cette projection double est donc une courbe de même degré et de même genre que la courbe proposée c, projection de la directrice du cylindre.

Pour construire la tangente à la nouvelle courbe, il suffit de remarquer que cette tangente doit être la trace principale d'un plan tangent au cylindre et que les deux tangentes à la courbe donnée sont les projections d'une droite du même plan (10).

137. — Puisqu'il existe un diamètre conjugué à tout système de cordes parallèles inscrites à une courbe quelconque du second degré, on peut déduire du théorème précédent les propositions suivantes :

Proposition I. — « La courbe que parcourt le troisième sommet d'un » triangle dont les deux premiers sommets sont assujettis à se mouvoir

» sur une courbe du second degré, tandis que ses trois côtés demeurent
» constamment parallèles à eux-mêmes, est une autre courbe du second
» degré, du même genre que la courbe proposée et qui rencontre
» celle-ci aux extrémités du diamètre conjugué au côté qui renferme les
» deux premiers sommets. » (Poncelet, *Propriétés projectives*, page 314).

Une perspective des lignes énoncées dans cette proposition conduit à la proposition analogue qui suit :

Proposition II. — « Si les trois côtés d'un triangle tournent respective-
» ment autour de trois points fixes situés en ligne droite, tandis que deux
» sommets du triangle sont assujettis à se mouvoir sur une courbe du
» second degré, le troisième sommet se mouvra également sur une courbe
» du second degré. »

138. — Il sera facile au lecteur de démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnée une courbe qui jouit de la propriété d'avoir un diamètre, si l'on construit deux systèmes de polaires, dont chaque paire de polaires correspondantes passe respectivement par les deux extrémités d'une même corde conjuguée à ce diamètre, ces deux systèmes se couperont sur une nouvelle courbe de même degré que la courbe proposée, si la ligne des pôles est parallèle aux cordes conjuguées à ce diamètre. De plus, la nouvelle courbe rencontre la courbe proposée aux extrémités du diamètre mentionné.*

La nouvelle courbe devient une droite si le diamètre passe par le milieu de la ligne des pôles.

Tangente. — La règle pour construire la tangente à la nouvelle courbe est la même que dans le théorème précédent.

139. — Théorème. — *Étant donné un point fixe* o *sur une droite* D, *si, pour chaque point d'une courbe donnée, l'on construit l'ordonnée perpendiculaire à la droite* D *ainsi que la circonférence qui a pour rayon cette ordonnée et pour centre le point* o, *le système de circonférences concentriques ainsi construites rencontrera le système des ordonnées sur une nouvelle courbe dont le degré sera le double de celui de la courbe donnée; de plus, la droite* D *sera toujours un diamètre principal ou axe de la nouvelle courbe. Le degré de la nouvelle courbe sera le même que celui de la courbe donnée, si la droite* D *est un diamètre principal ou axe de la courbe donnée.*

Digitized by Google

Nous nommerons la nouvelle courbe, la transformée ou la déformée de la courbe proposée.

Tangente. — *Soit* m *un point de la courbe primitive, et* m' *le point correspondant sur la courbe transformée. — Pour construire la tangente à la courbe transformée au point* m', *on mènera par le point* m *à la courbe primitive une tangente prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre, en un point* n, *la perpendiculaire* L *élevée en* o *à la droite* D. *Sur* om', *ou sur le prolongement de* om', *du côté de* o, *on prendra à partir du point* o *une longueur* on' = on. *Au point* n' *on mènera à* on' *une perpendiculaire prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite* L. *En unissant ce point de rencontre avec le point* m', *par une droite, celle-ci sera la tangente demandée —* on' *sera pris sur le prolongement de* om' *si la tangente à la courbe primitive ne peut rencontrer* L *sans rencontrer préalablement* D.

Démonstration. — Représentons par c la courbe proposée et menons, par le point o, une perpendiculaire L à la droite D. En prenant la perpendiculaire L pour ligne de terre, le système de circonférences et le système d'ordonnées mentionnés à l'énoncé représentent une surface de révolution dont l'axe se projette horizontalement au point o et verticalement en D. Cette surface de révolution a pour méridien principal la courbe de l'espace (L, c), située dans le plan vertical de projection, et la courbe, intersection du système de circonférences avec le système d'ordonnées, est la projection double de la section faite dans cette surface de révolution par le plan bissecteur B. Le degré de cette projection double est le même que celui de la surface de révolution; donc ce degré est double de celui de la courbe (L, c), qui a servi à engendrer la surface (81).

Pour déduire de la tangente en un point m de la courbe donnée, la tangente au point correspondant m' de la courbe transformée, nous dirons que cette première tangente est la trace verticale du plan qui touche la surface de révolution au point m considéré comme situé dans le plan vertical de projection. Cette trace verticale servira à construire la trace horizontale du plan qui touche la surface de révolution au point (m', m'); et la trace principale de ce dernier plan tangent est la tangente au point m' de la courbe transformée.

Digitized by Google

140. — Théorème réciproque. — *Étant donné un point fixe* o *sur une droite* D, *si pour chaque point d'une courbe donnée l'on construit le rayon vecteur dirigé vers* o *ainsi que l'ordonnée perpendiculaire à la droite* D, *et que l'on prolonge de part et d'autre de la droite* D *l'ordonnée de chaque point de manière qu'elle devienne égale au rayon vecteur du même point, les extrémités des ordonnées ainsi prolongées constituent une nouvelle courbe d'un degré double de celui de la courbe proposée. De plus, la droite* D *est toujours un diamètre principal ou axe de la nouvelle courbe. Le degré de la nouvelle courbe sera le même que celui de la courbe proposée, si la droite* D *est un diamètre principal ou axe de la courbe proposée.*

Tangente. — *Soit* L *la perpendiculaire en* o *à la droite* D. *Soit* m *un point de la courbe proposée et* m' *le point correspondant sur la courbe transformée. La tangente en* m *à la courbe proposée rencontre la droite* L *en un point* n; *la perpendiculaire abaissée du point* n *sur la droite* om *rencontre celle-ci en un point* r; *on prendra sur* L, *à partir de* o, *une longueur* or' = or, *et cette longueur sera portée à droite ou à gauche de* D *selon que la tangente à la courbe primitive rencontrera* L *à droite ou à gauche de* D. *Cela fait* r'm' *sera la tangente en* m' *à la courbe transformée.*

Démonstration. — Par le point o menons une perpendiculaire *L* à la droite *D*. En prenant cette perpendiculaire *L* pour ligne de terre, nous pouvons considérer la surface de révolution qui a pour génératrice la courbe de l'espace (*c*, *c*), située dans le plan bissecteur *B*, et pour axe la droite de l'espace, projetée horizontalement en o et verticalement en *D*. En construisant la projection verticale du méridien principal de cette surface nous aurons la nouvelle courbe mentionnée. Or, le degré de la projection verticale de ce méridien est le même que celui de la surface de révolution; donc, d'après (81), ce degré est double de celui de la courbe proposée *c*.

Pour déduire de la tangente en un point *m* de la courbe donnée, la tangente au point correspondant *m'* de la courbe transformée, il suffit de remarquer que la première tangente est la trace principale du plan qui touche la surface de révolution au point (*m*, *m*). Cette trace principale servira à construire la trace horizontale de ce même plan et celle-ci, à

Digitized by Google

construire la trace verticale du plan qui touche la surface au point m', considéré comme situé dans le plan vertical de projection. Cette trace verticale sera la tangente au point m' de la courbe transformée.

141. — Pour appliquer les deux théorèmes qui précèdent, nous conviendrons de nommer la droite D axe de transformation ou de déformation, et le point o, origine des rayons vecteurs. Cela posé, voici quelques applications du dernier de ces deux théorèmes :

1° L'ensemble de deux circonférences égales situées de part et d'autre d'une droite et tangentes en un même point de cette droite, constitue une courbe du quatrième degré ayant pour axe la tangente commune. — Si, pour déformer ces deux circonférences, on place l'origine o des rayons vecteurs au point de contact (*fig.* 36) et qu'on prenne la tangente pour axe de déformation, on convertira les deux circonférences en une lemniscate, courbe du quatrième degré, laquelle aura pour axes la tangente et la perpendiculaire en o à cette tangente.

En remplaçant les deux circonférences par deux coniques quelconques, égales et symétriques par rapport à une droite et tangentes en un même point de cette droite, on sera conduit à des lemniscates elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Si les deux coniques, égales et symétriques par rapport à une même droite, ne sont plus tangentes à cette droite (*fig.* 37), les courbes du quatrième degré que l'on déduira de ces deux coniques seront des variétés des lemniscates précédentes. La *fig.* 39 montre la déformation de deux cercles égaux tangents, lorsque l'origine o des rayons vecteurs n'est pas au point de contact, comme dans la *fig.* 36.

2° Si pour déformer une parabole on place l'origine des rayons vecteurs à son sommet et qu'on prenne pour axe de déformation l'axe transverse de la parabole, on obtiendra une autre parabole de même sommet et de même axe transverse.

3° L'origine des rayons vecteurs étant au centre d'une hyperbole, la déformée de celle-ci sera une autre hyperbole, si l'on prend l'axe transverse pour axe de déformation.

4° Si l'on déforme une circonférence de cercle en plaçant l'origine des rayons vecteurs à l'extrémité d'un diamètre pris pour axe de défor-

Digitized by Google

mation, on obtiendra une portion de parabole (*fig.* 34). L'ellipse conduit au même résultat, en plaçant l'origine des rayons vecteurs à l'extrémité d'un axe pris pour axe de déformation.

5° On convertira une ellipse en une portion d'hyperbole en plaçant l'origine des rayons vecteurs au centre de l'ellipse et en prenant l'un des axes de celle-ci pour axe de déformation. Si l'ellipse se change en circonférence de cercle, l'hyperbole se convertira en deux droites parallèles et tangentes à la circonférence.

6° L'ensemble de deux droites qui se coupent constitue une courbe du second degré, dont la bissectrice est un axe. Si, pour déformer ces droites, on place l'origine des rayons vecteurs en un point de la bissectrice et qu'on prenne celle-ci pour axe de déformation, on convertira les deux droites en deux branches d'hyperbole tangentes aux deux droites proposées (*fig.* 33). Si les deux droites sont parallèles, on sera conduit à une hyperbole équilatère (*fig.* 31) qui touchera par ses sommets les deux parallèles; il suffit pour cela de placer l'origine des rayons vecteurs en un point quelconque de la droite menée à égale distance des deux parallèles et prise pour axe de déformation.

Remarque. — La règle générale énoncée au théorème (140) pour mener la tangente aux courbes déformées, citées ci-dessus, ne demande que des constructions fort simples qui pourraient facilement être vérifiées par l'analyse; mais on ne voit pas aussi facilement comment l'analyse aurait pu servir à les découvrir.

Digitized by Google

TROISIÈME CHAPITRE.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES RÉSULTANT DE L'INTERSECTION DE DEUX SYSTÈMES DE POLAIRES DÉFINIS PAR UNE CONSIDÉRATION MÉTRIQUE : LA PROPORTION.

142. — Dans ce chapitre, qui traitera uniquement des courbes et des surfaces du second degré, nous croyons qu'il sera intéressant de voir qu'une théorie complète de deux droites divisées en parties proportionnelles ou en parties perspectivement proportionnelles, et de deux systèmes de polaires ayant respectivement ces deux droites pour transversales, constitue toute une géométrie supérieure de ces courbes et de ces surfaces, en tant qu'il ne s'agisse que de propriétés descriptives.

Il ne sera pas moins intéressant de voir cette théorie découler d'une seule source, la considération de l'hyperboloïde à une nappe, lequel renferme comme cas particulier le paraboloïde hyperbolique, le cône et le plan.

Aussi, après avoir reconnu que deux systèmes de polaires dont les transversales sont divisées en parties respectivement proportionnelles, peuvent toujours représenter l'une de ces trois surfaces et ne sont autre chose que deux faisceaux projectifs de M. Steiner, ou deux faisceaux homographiques de M. Chasles, nous avons acquis la conviction que la théorie de ces faisceaux, basée jusqu'ici sur la notion du rapport anharmonique, pouvait être traitée par les seuls principes de la géométrie descriptive, lorsqu'on y introduit les propriétés des deux plans bissecteurs.

Il y a plus, si l'on ne connaissait d'autres applications de la géométrie descriptive, on pourrait croire que la méthode des projections, combinée avec les propriétés des plans bissecteurs, a été imaginée exprès pour

Digitized by Google

établir par voie descriptive la théorie des faisceaux projectifs ou homographiques [1].

Ce chapitre est divisé en trois sections : la première traitera de droites proportionnelles et de droites perspectivement proportionnelles ; la seconde de deux systèmes de polaires proportionnels, et la troisième de deux systèmes de plans polaires proportionnels.

PREMIÈRE SECTION.

DROITES PROPORTIONNELLES ET DROITES PERSPECTIVEMENT PROPORTIONNELLES.

§ I.

Droites proportionnelles situées dans un même plan.

143. — Définitions. — *Nous dirons que deux droites sont proportionnelles, lorsque les parties consécutives de l'une sont respectivement proportionnelles aux parties consécutives de l'autre ; dans ce cas, les points de division consécutifs sur l'une, sont respectivement correspondants des points de division consécutifs sur l'autre.*

Lorsque les parties consécutives de l'une des deux droites sont respectivement égales aux parties consécutives de l'autre, nous dirons que les deux droites proportionnelles sont égales.

Si un point de division de l'une des deux droites coïncide avec le point cor-

[1] C'est ainsi que, par la géométrie descriptive, on trouve de suite dans l'espace, la raison des rayons doubles de deux faisceaux projectifs ou homographiques qui ont même centre ; car, si par le sommet d'un cône du second degré, on mène deux plans de projection respectivement perpendiculaires à deux génératrices de ce cône, le sommet sera dans le plan bissecteur B et selon que ce cône est touché ou coupé par le plan bissecteur B, les deux systèmes de projections orthogonales des génératrices du cône constitueront deux faisceaux homographiques de même centre, ayant un ou deux rayons doubles. Chaque rayon double n'est autre, en effet, que la projection double d'une génératrice située dans le plan bissecteur B. Si le plan bissecteur B ne coupe ni ne touche le cône, les deux mêmes faisceaux n'auront pas de rayon double.

Digitized by Google

respondant de l'autre, nous dirons que les deux droites ont un point correspondant commun qui est leur point d'intersection.

144. — Il est évident que :

Deux droites proportionnelles sont déterminées lorsque l'on connaît deux points sur l'une de ces droites et les deux points correspondants sur l'autre.

Car un troisième point quelconque étant donné sur l'une, on pourra toujours construire son correspondant sur l'autre.

145. — 1° *Deux droites sont proportionnelles et ont un point correspondant commun, quand les droites, reliant chacune deux points correspondants, constituent un système de parallèles.*

2° *Deux droites parallèles sont proportionnelles quand les droites, reliant chacune deux points correspondants, constituent un système de polaires, ou un système de parallèles. Dans le dernier cas, les deux droites données ont un point correspondant commun situé à l'infini, comme aussi dans le cas où le pôle du système de polaires est en dehors de ces droites.*

146. — *Réciproquement.* — 1° *Si deux droites proportionnelles ont un point correspondant commun, le système de droites reliant chacune deux points correspondants est un système de parallèles.*

2° *Si deux droites proportionnelles sont parallèles, les droites, reliant chacune deux points correspondants, constituent un système de polaires, ou un système de parallèles. Dans le dernier cas, les deux droites données ont un point correspondant commun situé à l'infini, comme aussi dans le cas où le pôle du système de polaires est en dehors de ces droites.*

147. — *Parmi toutes les droites reliant chacune deux points correspondants de deux droites proportionnelles non parallèles et n'ayant pas de point correspondant commun, deux quelconques ne sont jamais parallèles entre elles et aucune ne peut être parallèle à l'une des deux droites proportionnelles proposées.* Dans ce cas et d'après (35) on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Les droites reliant chacune deux points correspondants de deux droites proportionnelles, non parallèles et n'ayant pas de point correspondant commun, sont, ainsi que les deux droites proposées, tangentes à une même section conique, laquelle, ne pouvant avoir deux tangentes parallèles, sera nécessairement une parabole.*

Digitized by Google

148. — Remarque. — Lorsque deux droites proportionnelles qui se coupent n'ont pas de point correspondant commun, leur point d'intersection, considéré comme appartenant à la première, a son correspondant sur la seconde et, considéré comme appartenant à la seconde, il a également un point correspondant sur la première. Ces deux points ne sont pas correspondants l'un de l'autre et nous les nommerons points correspondants de l'intersection des deux droites données.

§ II.

Droites proportionnelles non situées dans un même plan.

149. — 1° *Si deux droites, situées ou non dans un même plan, sont proportionnelles, leurs projections, orthogonales, ou obliques sur un plan quelconque, sont également proportionnelles, et réciproquement.*

2° *Si le plan sur lequel on projette orthogonalement deux droites proportionnelles est perpendiculaire à une droite reliant deux points correspondants, les projections des deux droites proposées, ont un point correspondant commun et, par suite, les droites qui relient ces projections sont parallèles* (146).

150. — De cette dernière propriété, il est facile de conclure que :

Les droites qui relient deux droites proportionnelles non situées dans un même plan, sont des génératrices d'un paraboloïde hyperbolique.

151. — Les perspectives de deux droites proportionnelles, sur un tableau parallèle à ces deux droites, sont évidemment proportionnelles. Et si l'œil est placé sur une droite reliant deux points correspondants, les deux perspectives proportionnelles auront un point correspondant commun.

152. — *Deux droites proportionnelles, appliquées arbitrairement sur une droite* D, *représentent une droite dans l'espace si l'on prend une ligne de terre perpendiculaire à* D.

Soient a, b, c, etc., les points de division de la première droite, et a', b', c', etc.,

Digitized by Google

les points de division correspondants de la seconde droite. Puisque l'on a la proportion :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = \text{etc.},$$

il s'ensuit que les points de l'espace (a, a'), (b, b'), (c, c'), etc., sont tous sur une même droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Donc, etc.

153. — Problème fondamental. — *Construire la paire de points correspondants qui coïncident, lorsque l'on applique deux droites proportionnelles* abc, *etc.,* $a'b'c'$, *etc., sur une droite* D.

Solution. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à D, nous pouvons, d'après (152), considérer la droite de l'espace (abc, etc., $a'b'c'$, etc.) Cela posé, le point où cette droite rencontre le plan bissecteur B (27), est un point dont les deux projections coïncident. Or, ces deux projections coïncidantes sont évidemment deux points correspondants des deux droites proportionnelles.

Comme la droite de l'espace (abc, etc., $a'b'c'$, etc.), ne peut rencontrer le plan bissecteur B qu'en un point, il en résulte que :

1° *Deux droites proportionnelles appliquées arbitrairement l'une sur l'autre, ne peuvent avoir, au plus, qu'une paire de points correspondants qui coïncident;*

2° *Si les deux droites proportionnelles sont égales* (143) *et que, de plus, les points* a, b, c, *etc., et leurs correspondants* a', b', c', *etc., se suivent dans le même sens, ces droites n'ont pas de points correspondants qui coïncident; autrement dit, les points correspondants qui coïncident sont à l'infini.*

C'est que dans ce cas, la droite de l'espace (abc etc., a' b' c' etc.) est parallèle au plan bissecteur B (22).

Nous verrons plus loin une autre solution du même problème, laquelle s'applique également à deux droites perspectivement proportionnelles placées l'une sur l'autre, et qui a l'avantage de n'exiger que l'emploi de la règle et le tracé d'une circonférence d'un rayon arbitraire.

Digitized by Google

§ III.

Définitions et propriétés de droites perspectivement proportionnelles.

154. — *Deux droites, situées ou non dans un même plan, sont dites perspectivement proportionnelles ou divisées en parties perspectivement proportionnelles, lorsqu'on peut trouver un tableau et une position de l'œil pour lesquels les perspectives de ces droites se trouvent divisées en parties consécutives proportionnelles.*

Les démonstrations des propriétés énoncées dans ce paragraphe peuvent être suivies dans l'espace, sans qu'il soit nécessaire de tracer aucune figure, ni d'effectuer aucune construction.

155. — *Il résulte de* (154) *que les perspectives de deux droites proportionnelles, situées ou non dans un même plan, sont toujours perspectivement proportionnelles, pour des positions quelconques de l'œil et du tableau.*

Si ces deux droites proportionnelles ont un point correspondant commun, leurs perspectives auront également un point correspondant commun.

Quand les deux droites proportionnelles ne sont pas situées dans un même plan, leurs perspectives ont encore un point correspondant commun, si l'œil est placé sur une droite reliant deux points correspondants proposés.

156. — *Les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe divisent deux quelconques des trois directrices en parties perspectivement proportionnelles :*

Car les perspectives des génératrices seront parallèles si l'on prend un tableau parallèle à l'une des trois directrices, et qu'on place l'œil sur cette même directrice; donc, les perspectives des génératrices divisent celles des deux autres directrices en parties proportionnelles. Donc, d'après 154) etc.

157. — *Deux droites sont perspectivement proportionnelles et ont un point correspondant commun, si les droites reliant chacune deux points correspondants concourent en un même point* p *:*

Car les perspectives des droites qui concourent au point p seront parallèles, sur un tableau parallèle à la droite qui unit l'œil au point p; donc ces perspectives divisent celles des deux droites proposées en parties proportionnelles (145). Donc (154), etc.

Digitized by Google

158. — *Réciproquement, si deux droites perspectivement proportionnelles ont un point correspondant commun, les droites reliant chacune deux points correspondants concourent en un même point et constituent un système de polaires.*

Puisque les deux droites perspectivement proportionnelles ont un point correspondant commun, leurs perspectives, qui sont proportionnelles sur un certain tableau, auront aussi un point correspondant commun; donc les droites qui relient ces perspectives seront parallèles (146 1°). Donc les droites qui relient les deux droites proposées concourent en un même point et constituent un système de polaires.

159. — De la propriété (157), il résulte à l'évidence que :

1° *Deux transversales quelconques d'un même système de polaires sont perspectivement proportionnelles et ont un point correspondant commun;*

2° *Une droite qui tourne autour d'un point fixe p, divise deux droites fixes quelconques* D, D′ *en parties perspectivement proportionnelles et les deux droites fixes ont un point correspondant commun.* (Fig. 26.)

Les deux points où la droite mobile, tournant autour du point fixe p, rencontre, dans chacune de ses positions, les deux droites fixes D, D' étant points correspondants, on voit que, quand la droite mobile devient parallèle à la première droite D, elle rencontre la seconde droite D' en un point M' dont le correspondant sur la première est à l'infini. De même, quand la droite mobile devient parallèle à la seconde droite D', elle rencontre la première droite D en un point M dont le correspondant sur la seconde est à l'infini. Donc on peut dire que :

3° *Quand deux droites perspectivement proportionnelles ont un point correspondant commun, il existe sur chacune d'elles un point dont le correspondant sur l'autre est à l'infini.*

Autrement. — Parmi toutes les droites, reliant chacune deux points correspondants de deux droites perspectivement proportionnelles ayant un point correspondant commun, il y en a deux qui sont respectivement parallèles aux deux droites proposées.

Entre toutes les positions que peut prendre la droite mobile (*fig.* 27), en tournant autour du point fixe p, il y en a deux pour chacune desquelles cette droite retranche de l'angle compris entre les deux droites

Digitized by Google

fixes D, D' ou de son supplément un triangle isocèle dont le sommet est au point d'intersection o des deux droites fixes. Ces deux triangles sont oaa', obb'. Les deux positions dont il s'agit se coupent à angle droit, comme étant respectivement perpendiculaires aux bissectrices des angles des deux droites fixes. De là on peut conclure que :

4° *Si deux droites perspectivement proportionnelles* D, D′ (fig. 27), *ont un point correspondant commun, il existe, sur l'une d'elles, deux segments* oa, ob *situés de part et d'autre du point commun et qui sont respectivement égaux aux deux segments correspondants* oa′, ob′ *de l'autre droite, situés d'un même côté du point commun. Les quatre segments ont d'ailleurs le point commun* o *pour origine.*

Remarque. — La propriété 2° énoncée plus haut, montre que l'on peut prendre sur l'une de deux droites perspectivement proportionnelles, des segments consécutifs dont les correspondants sur l'autre droite ne sont pas consécutifs.

C'est par cette raison que l'on ne peut pas conclure de la propriété 4° que deux droites perspectivement proportionnelles sont réellement proportionnelles; car sur la droite D (*fig.* 27) les deux segments ao, ob sont consécutifs, tandis que sur la droite D', les deux segments correspondants $a'o$, ob', respectivement égaux à ceux-là, ne sont pas consécutifs.

160. — Les deux dernières propriétés de (159) s'étendront à deux droites quelconques perspectivement proportionnelles, si l'on fait coïncider un point quelconque de l'une avec son point correspondant de l'autre; car il sera démontré plus tard que :

Deux droites perspectivement proportionnelles restent perspectivement proportionnelles, de quelque manière qu'on les déplace dans l'espace.

161. — De cette dernière propriété il résulte que :

1° *Deux droites perspectivement proportionnelles sont déterminées lorsqu'on connaît trois points de l'une et les trois points correspondants de l'autre.*

Car en faisant coïncider un des trois points de la première droite avec son correspondant de la seconde, la propriété (158) permet de construire à un quatrième point quelconque pris sur l'une, le point correspondant sur l'autre droite.

Digitized by Google

2° Étant données deux droites situées ou non dans un même plan, si l'on prend trois points arbitraires sur l'une et trois points arbitraires sur l'autre, je dis que les trois segments déterminés par les trois points de la première droite sont toujours perspectivement proportionnels aux trois segments déterminés par les trois points de la seconde droite, et cela, n'importe l'ordre dans lequel on considère les trois points de la première droite comme respectivement correspondants des trois points de la seconde droite.

Et si les deux droites sont dans un même plan, cela revient à dire :

De cinq droites arbitrairement tracées sur un plan, trois quelconques divisent toujours les deux autres, soit en parties proportionnelles, soit en parties perspectivement proportionnelles.

Ce que l'on peut démontrer directement comme suit :

En effet, si les deux droites proposées du premier énoncé ne sont pas dans un même plan, les trois droites reliant chacune deux points correspondants des deux droites proposées, peuvent être considérées comme trois génératrices d'un hyperboloïde à une nappe; donc, d'après (156), la propriété existe.

La même chose se démontre pour le cas où les deux droites sont dans un même plan, en les considérant comme étant les perspectives de deux droites de l'espace non situées dans un même plan.

162. — Il sera démontré que :

Si deux droites sont perspectivement proportionnelles, leurs perspectives sur un tableau plan quelconque sont deux nouvelles droites perspectivement proportionnelles.

Et comme une projection orthogonale, ou une projection oblique sur un plan quelconque, n'est qu'une perspective pour un œil placé à une distance infinie de ce plan, on peut énoncer que :

Si deux droites sont perspectivement proportionnelles, leurs projections, orthogonales ou obliques sur un plan quelconque, sont perspectivement proportionnelles.

163. — Théorème. — *Toutes les droites reliant chacune deux points correspondants de deux droites perspectivement proportionnelles, non situées dans un*

Digitized by Google

même plan, sont des génératrices d'un même hyperboloïde à une nappe, dont les deux droites proposées font également partie.

Démonstration. — Si nous projetons les deux droites perspectivement proportionnelles sur un plan perpendiculaire à une droite reliant deux points correspondants des deux droites proposées, les deux projections seront toujours perspectivement proportionnelles et auront, de plus, un point correspondant commun. Donc les droites qui relient ces deux projections concourent en un même point que nous désignerons par p. Or, les droites qui relient ces deux projections sont elles-mêmes les projections des droites qui relient dans l'espace les deux droites proposées. Donc, les droites qui relient dans l'espace les deux droites proposées, rencontrent toutes la perpendiculaire élevée au point p au plan de projection. Donc, etc.

164. — Deux droites perspectivement proportionnelles situées dans un même plan, pouvant être considérées comme les perspectives de deux droites proportionnelles, on peut conclure du théorème (147) que :

Théorème. — *Les droites qui relient deux droites perspectivement proportionnelles, situées dans un même plan et n'ayant pas de point correspondant commun, sont toutes tangentes à une même section conique, ayant aussi pour tangentes les deux droites proposées.*

165. — Théorème fondamental. — *Deux tangentes quelconques à un cercle ou à une section conique quelconque, sont divisées par toutes les autres tangentes au même cercle, en parties perspectivement proportionnelles.*

Démonstration. — Considérons le cercle proposé comme cercle de gorge d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, et prenons, pour plan horizontal de projection, le plan de ce même cercle. On peut démontrer bien facilement que les projections horizontales des deux systèmes de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde sont toutes tangentes au cercle de gorge. Cela posé :

Soient t, t' deux tangentes au cercle de gorge. On peut considérer ces deux tangentes comme les projections horizontales de deux génératrices d'un mode, et toutes les autres tangentes au même cercle comme les projections horizontales de génératrices de l'autre mode de génération

Digitized by Google

de l'hyperboloïde; et comme dans l'espace les deux génératrices (t), (t') sont divisées par toutes les autres génératrices en parties perspectivement proportionnelles, leurs projections orthogonales t, t', sont également divisées en parties perspectivement proportionnelles. Toute section conique étant une perspective du cercle, il résulte de l'article (162) que la propriété que nous venons de démontrer pour le cas du cercle appartient à une section conique quelconque.

Corollaire. — Deux tangentes t, t' à un cercle étant considérées comme fixes, si une troisième tangente, rencontrant respectivement les deux premières en deux points correspondants a, a', se meut de manière que a s'approche indéfiniment du point de contact de t, a' s'approchera indéfiniment du point d'intersection de t avec t'; par la raison que lorsque a vient coïncider avec le point de contact de t, a' doit venir coïncider avec le point d'intersection de t et de t'; car deux tangentes doivent coïncider du moment que leurs points de contact coïncident. De là, il suit que :

Deux tangentes fixes à une section conique étant divisées en parties perspectivement proportionnelles par une troisième tangente mobile, le point d'intersection des deux tangentes fixes, considéré comme appartenant à l'une d'elles, a pour point correspondant sur l'autre, le point de contact de cette autre.

166. — *Des points correspondants qui peuvent coïncider lorsqu'on place deux droites perspectivement proportionnelles, l'une sur l'autre.*

Deux droites perspectivement proportionnelles, placées arbitrairement l'une sur l'autre, peuvent être considérées comme étant les perspectives de deux droites proportionnelles situées dans un même plan, l'œil étant également placé dans ce plan.

Cela posé, si l'œil est placé sur une droite reliant deux points correspondants des deux droites proposées, les perspectives de celles-ci auront un point correspondant commun.

Si l'œil se trouve placé au point d'intersection de deux droites reliant chacune deux points correspondants des deux droites proposées, les perspectives de celles-ci auront deux paires de points correspondants qui coïncideront. Enfin si l'œil ne se trouve placé sur aucune droite reliant deux points correspondants des deux droites proposées, les perspectives de

Digitized by Google

celles-ci n'auront pas de points correspondants qui se confondent. Et puisque les droites qui relient les deux droites proportionnelles sont toutes tangentes à une même parabole, ce qui précède revient à dire que :

Les perspectives des deux droites proportionnelles auront une paire ou deux paires de points correspondants qui coïncident, selon que l'œil est placé sur ou hors la parabole mentionnée; enfin, les mêmes perspectives n'ont pas de points correspondants qui coïncident, si l'œil est placé dans l'intérieur de la parabole.

SECONDE SECTION.

PROPRIÉTÉS DE DEUX SYSTÈMES DE POLAIRES PROPORTIONNELS, ET APPLICATIONS DIVERSES.

§ I.

167. — Définitions. — *Étant donnés deux systèmes de polaires, coupés chacun par une transversale, nous dirons que ces deux systèmes ont leurs transversales proportionnelles ou qu'ils sont coupés respectivement par deux transversales proportionnelles, lorsque les segments interceptés par les polaires consécutives du premier système sur leur transversale, sont respectivement proportionnels aux segments interceptés par les polaires consécutives du second système sur la transversale de ce second système.*

Ceci posé nous dirons que : *deux systèmes de polaires sont proportionnels lorqu'ils sont ou peuvent être coupés respectivement par deux transversales proportionnelles.*

168. — Dans deux systèmes de polaires proportionnels dont les transversales sont tracées, il faut entendre par polaires correspondantes celles qui passent par deux points correspondants des deux transversales proportionnelles.

169. — Dans deux systèmes de polaires proportionnels, l'angle formé

Digitized by Google

par deux polaires quelconques du premier système est dit correspondant de l'angle formé par les deux polaires correspondantes du second système.

170. — Voici différents cas où l'on reconnaît presque immédiatement que deux systèmes de polaires sont proportionnels.

1° *Deux positions quelconques d'un même système de polaires constituent deux systèmes de polaires proportionnels ;*

2° *Deux systèmes de polaires sont proportionnels, lorsque les angles formés par les polaires consécutives du premier système sont respectivement égaux aux angles formés par les polaires consécutives du second système ;*

3° *Deux systèmes de polaires sont proportionnels, lorsque les polaires du premier système sont respectivement parallèles aux polaires du second système ;*

4° *Deux systèmes de polaires sont proportionnels, lorsque les polaires du premier système sont respectivement perpendiculaires aux polaires du second système.*

Car les angles consécutifs du premier système seront respectivement égaux aux angles consécutifs du second système.

Remarque. — En disant que deux droites qui tournent respectivement autour de deux points fixes comme pôles, décrivent deux systèmes de polaires proportionnels, nous entendons par là qu'un nombre quelconque de positions de la première droite, et le même nombre de positions correspondantes de la seconde droite, constituent deux systèmes de polaires proportionnels. D'après cela on peut dire que :

5° *En faisant tourner, autour de son sommet, un angle de grandeur invariable, les deux côtés de cet angle décriront deux systèmes de polaires proportionnels ayant même pôle.*

Car, si le premier côté décrit un angle quelconque, le second côté décrira un angle égal.

6° *Si un angle de grandeur variable tourne autour de son sommet, de manière que ses deux côtés interceptent constamment un segment de même grandeur, sur une droite fixe, les deux côtés de cet angle décriront deux systèmes de polaires proportionnels.*

Digitized by Google

Il résulte de cette condition de mouvement, que les polaires consécutives du premier système interceptent sur la droite fixe des segments respectivement égaux à ceux que les polaires consécutives du second système interceptent sur la même droite.

7° *Deux systèmes de polaires sont proportionnels, lorsque leurs transversales sont reliées par un système de parallèles.* Donc :

8° *Les projections des génératrices d'un hyperboloïde à une nappe sur deux plans de projection respectivement perpendiculaires à deux des trois directrices de cette surface, constituent deux systèmes de polaires proportionnels.*

9° *Deux systèmes de polaires sont proportionnels lorsqu'ils sont respectivement parallèles à deux autres systèmes de polaires proportionnels.*

10° *Deux systèmes de polaires situés ou non dans un même plan, sont proportionnels lorsqu'ils se coupent sur une même droite;* car cette droite est une transversale commune aux deux systèmes;

11° *Un système de polaires et la projection orthogonale ou oblique de ce système sur un plan quelconque, constituent deux systèmes de polaires proportionnels, non situés dans un même plan. D'une manière plus générale :*

12° *Un système de polaires et la perspective de ce système sur un tableau plan quelconque constituent deux systèmes de polaires proportionnels non situés dans un même plan.*

Car ils se coupent toujours sur une droite du tableau.

13° *Deux systèmes de trois polaires tracées d'une manière quelconque sont toujours proportionnels, quel que soit l'ordre dans lequel on considère les polaires du premier système, comme respectivement correspondantes des polaires du second système.*

En considérant, en effet, les trois polaires consécutives du premier système, si les polaires correspondantes du second système ne sont pas consécutives, on pourra d'abord les rendre telles, en prolongeant une ou deux d'entre elles. Cela fait, on peut toujours couper chaque système par une transversale tellement disposée, que les deux segments consécutifs, interceptés sur cette transversale par les trois polaires consécutives de ce système, soient égaux. Donc, etc.;

14° *Les quatre côtés de deux angles égaux ayant même sommet constituent*

Digitized by Google

deux systèmes de quatre polaires proportionnels, si l'on considère ces quatre côtés comptés dans un sens comme respectivement correspondants des mêmes côtés comptés en sens contraire.

On s'assurera facilement sur une figure, que les quatre côtés forment trois angles consécutifs dont les extrêmes sont égaux; et qu'ainsi les trois angles consécutifs comptés dans un sens sont respectivement égaux aux trois mêmes angles comptés en sens contraire. Donc d'après (170 2°.) la propriété énoncée existe.

15° *Si quatre polaires interceptent sur une transversale trois segments consécutifs dont les extrêmes sont égaux, alors en considérant les quatre polaires comptées dans un sens comme respectivement correspondantes des mêmes polaires comptées en sens contraire, on aura deux systèmes proportionnels de quatre polaires.*

Il est facile de voir, en effet, que les quatre polaires du premier système interceptent sur la transversale commune trois segments consécutifs qui sont respectivement égaux à ceux que les quatre polaires du second système interceptent sur la même transversale.

16° *Deux systèmes de polaires à transversales proportionnelles sont déterminés lorsque l'on connaît les deux pôles, ainsi que deux points de la transversale du premier système et les deux points correspondants de la transversale du second système.*

Car, en prenant un troisième point quelconque sur l'une des transversales, il sera facile de construire le point correspondant sur l'autre.

171. — 1° *Deux systèmes de parallèles de direction différente, situés dans un même plan ou dans deux plans différents, sont dits proportionnels lorsqu'on peut les couper respectivement par deux transversales proportionnelles;*

2° *Un système de parallèles et un système de polaires, situés dans un même plan ou dans deux plans différents, sont dits proportionnels lorsqu'on peut les couper respectivement par deux transversales proportionnelles;*

3° *Un système de parallèles et un système de polaires qui se coupent sur une même droite sont proportionnels.*

Digitized by Google

Car, si l'on coupe le système de parallèles par une transversale quelconque, et le système de polaires par une transversale parallèle à la droite mentionnée, les deux transversales seront proportionnelles.

4° *Un système de parallèles et sa perspective, qui est un système de polaires, sont proportionnels*, car ils se coupent sur une droite;

5° *Toutes les transversales d'un système de parallèles sont proportionnelles entre elles;*

6° *Toutes les transversales d'un système de polaires ne sont proportionnelles que pour autant qu'elles sont parallèles entre elles;*

7° *Si, dans deux systèmes de polaires à transversales proportionnelles, on remplace chaque transversale par une autre qui lui soit parallèle, les deux nouvelles transversales seront proportionnelles entre elles.*

Remarque. — Ces nouvelles transversales peuvent toujours être menées de manière qne les divisions de l'une soient respectivement égales aux divisions correspondantes de l'autre; nous les nommerons alors transversales égales.

172. — Quand nous déplacerons un système de polaires, ce sera toujours sans faire varier la grandeur d'aucun de ses éléments de sorte que le système primitif et le système déplacé seront toujours superposables. Cela posé :

Théorème. — 1° *Deux systèmes de polaires qui ont leurs angles consécutifs respectivement égaux, peuvent toujours être placés l'un sur l'autre, de manière que toutes les polaires du premier système coïncident respectivement avec leurs correspondantes du second système ;*

2° *Deux systèmes de polaires qui ont leurs angles consécutifs respectivement égaux, étant coupés respectivement par deux transversales proportionnelles, si l'on fait coïncider l'un des systèmes avec l'autre, les deux tranversales proportionnelles deviendront parallèles.* (171 6°).

Corollaire I. — *Si, dans deux systèmes de polaires proportionnels, deux angles consécutifs du premier système sont respectivement égaux à leurs correspondants du second système, tous les autres angles du premier système seront respectivement égaux à leurs correspondants du second système ;*

Corollaire II. — *Deux systèmes de polaires proportionnels ne sauraient avoir*

Digitized by Google

plus de deux paires de polaires correspondantes parallèles, sans que toutes les polaires de l'un soient parallèles respectivement aux polaires de l'autre;

Corollaire III. — *Deux systèmes de polaires proportionnels, ayant même pôle, ne sauraient avoir plus de deux paires de polaires correspondantes qui coïncident, sans que toutes les polaires de l'un coïncident respectivement avec les polaires de l'autre;*

Corollaire IV. — *Dans deux systèmes de polaires proportionnels, si trois polaires du premier système sont respectivement perpendiculaires à leurs correspondantes du second système, toutes les autres polaires du premier système sont respectivement perpendiculaires à leurs correspondantes du second système.*

173. — Théorème fondamental. — *Deux systèmes de polaires, situés dans un même plan ou dans deux plans différents et qui se rencontrent sur une droite, étant coupés par deux transversales respectivement parallèles à deux polaires correspondantes quelconques (chaque transversale et la polaire qui lui est parallèle appartenant à un même système), ces deux transversales seront toujours proportionnelles.*

Cela est évident, d'après les articles (83 et 84), pour le cas où les deux transversales partent d'un point de la droite sur laquelle se rencontrent les deux systèmes de polaires proposés; donc la propriété existe pour deux autres transversales quelconques respectivement parallèles aux deux transversales précédentes (171 7°.)

Le théorème analogue concernant un système de parallèles et un système de polaires qui se coupent sur une droite, se trouve à l'art. (171 3°.)

Du théorème précédent découlent les corollaires suivants :

Corollaire I. — *Si deux systèmes de polaires se rencontrent sur une droite, en coupant l'un des deux systèmes par une transversale arbitraire, on pourra toujours couper l'autre système par une transversale proportionnelle;*

Corollaire II. — *Les côtés de deux angles quelconques, les bissectrices de ces angles et de leurs suppléments, constituent deux systèmes de quatre polaires qui sont proportionnels.*

Il suffira de prouver que l'on peut disposer l'un de ces systèmes de

Digitized by Google

manière qu'il rencontre l'autre sur une droite. Or, en faisant coïncider la bissectrice de l'un des deux angles avec celle de l'autre angle, les bissectrices des suppléments de ces angles seront parallèles et les deux côtés du premier angle couperont les deux côtés du second en deux points, appartenant à une droite ayant même direction que les deux bissectrices parallèles.

COROLLAIRE III. — *Tant de systèmes de polaires que l'on voudra, dont chaque système, depuis le premier jusqu'au dernier, coupe celui qui le suit immédiatement sur une droite différente, sont tous proportionnels entre eux.*

Car ayant coupé le premier par une transversale quelconque, on pourra couper successivement les suivants par des transversales proportionnelles à celle du premier système.

COROLLAIRE IV. — *Deux systèmes de polaires, dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires, sont proportionnels, c'est-à-dire qu'ils peuvent être coupés respectivement par deux transversales proportionnelles.*

Chacun des deux premiers systèmes coupant le troisième sur une droite, il suffit d'appliquer le coroll. I.

COROLLAIRE V. — *La perspective, sur un plan quelconque, de deux systèmes de polaires proportionnels constitue deux autres systèmes de polaires également proportionnels et réciproquement.*

Ayant coupé les deux systèmes proposés respectivement par deux transversales proportionnelles, on pourra couper, d'après (173), la perspective de chaque système par une transversale proportionnelle à celle de ce système, puisque chaque système proposé et sa perspective se coupent sur une droite.

COROLLAIRE VI. — *La perspective, sur un plan quelconque, d'un système de parallèles et d'un système de polaires proportionnels, constitue deux systèmes de polaires proportionnels.*

COROLLAIRE VII. — *Deux systèmes de polaires dont les transversales sont perspectivement proportionnelles, sont proportionnels; c'est-à-dire qu'ils jouissent de la propriété de pouvoir être coupés par des transversales proportionnelles.*

Car on peut faire une perspective des deux systèmes de polaires pro-

Digitized by Google

posés, telle que les perspectives des deux transversales soient proportionnelles. Dès lors, les deux nouveaux systèmes, perspectives des deux systèmes proposés, étant proportionnels, les deux systèmes proposés le sont aussi d'après la réciproque du corol. V.

COROLLAIRE VIII. — *La perspective, sur un plan quelconque, de deux systèmes de parallèles à transversales proportionnelles, constitue deux systèmes de polaires proportionnels.*

Car la perspective se compose de deux systèmes de polaires à transversales perspectivement proportionnelles; donc ces deux systèmes de polaires sont proportionnels en vertu du corollaire précédent. La démonstration de ce corollaire se fait plus facilement par l'art. (171 7°.)

174. — PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE. — *On peut toujours donner à l'un des deux systèmes de polaires proportionnels une position telle, qu'il coupe l'autre sur une droite.*

DÉMONSTRATION. — Puisque les deux systèmes de polaires sont proportionnels, ils peuvent être coupés respectivement par deux transversales proportionnelles. Remplaçant ces deux premières transversales par deux autres, respectivement parallèles aux deux premières et égales entre elles (171 7°), et transportant l'un des deux systèmes, considéré comme système invariable, de manière à faire coïncider les divisions égales de ces deux nouvelles transversales, on amènera ainsi les deux systèmes de polaires à se couper sur une même droite. Donc, etc.

Si, dans cette position, on fait tourner l'un des deux systèmes autour de cette droite, et qu'on place l'œil sur la droite qui unit le pôle du système mobile avec celui du système fixe, les deux systèmes seront l'un la perspective de l'autre. On peut donc énoncer que :

COROLLAIRE I. — *Deux systèmes de polaires proportionnels peuvent toujours être placés dans l'espace, de manière que l'un soit la perspective de l'autre.*

COROLLAIRE II. — *Dans deux systèmes de polaires proportionnels, il y a toujours, dans l'un, deux polaires rectangulaires dont les correspondantes dans l'autre sont aussi rectangulaires.*

Cette propriété existe quand l'un des systèmes de polaires est déplacé de manière à couper l'autre sur une droite (92). Donc la même propriété

Digitized by Google

existait avant le déplacement, puisque dans ce déplacement la grandeur de l'angle formé par deux polaires quelconques du système déplacé ne subit aucune variation.

175. — Théorème fondamental. — *Si l'on coupe respectivement deux systèmes de polaires proportionnels, situés ou non dans un même plan, par deux transversales respectivement parallèles à deux polaires correspondantes quelconques, chaque transversale et la polaire qui lui est parallèle appartenant à un même système, ces deux transversales sont toujours proportionnelles.*

Démonstration. — La propriété existe si l'on déplace l'un des systèmes de manière à ce qu'il coupe l'autre sur une droite (174). Donc elle existe pour la position primitive des deux systèmes, car en ramenant le système déplacé dans sa position primitive, on n'altère pas le parallélisme entre la polaire et la transversale qui lui est parallèle, ni la grandeur des divisions de la transversale.

Corollaire I. — *Réciproquement, dans deux systèmes de polaires dont les transversales sont proportionnelles, celles-ci sont toujours respectivement parallèles à deux polaires correspondantes.*

Ce que l'on démontre facilement par l'absurde, en se référant au théorème ci-dessus et à l'article (171 6°.)

Corollaire II. — *Étant donnés tant de systèmes de polaires proportionnels que l'on voudra, si l'on coupe le premier par une transversale arbitraire, on pourra toujours couper chacun des autres par une transversale proportionnelle à la transversale du premier système.*

Corollaire III. — *Deux systèmes de polaires sont proportionnels, s'ils sont respectivement proportionnels à deux autres systèmes de polaires proportionnels.*

Corollaire IV. — *Deux systèmes de polaires, respectivement proportionnels à un troisième système de polaires, sont proportionnels entre eux.*

Corollaire V. — *Deux systèmes de polaires proportionnels, dont les transversales proportionnelles ne sont pas tracées, sont entièrement déterminés, lorsqu'on connaît trois polaires du premier système et leurs correspondantes dans le second système.*

Car en coupant respectivement ces deux systèmes de trois polaires par deux transversales respectivement parallèles à deux polaires correspon-

Digitized by Google

dantes, on connaîtra deux points de l'une des deux transversales proportionnelles et les deux points correspondants de l'autre. Donc (170 16°), etc.

176. — Théorème fondamental. — *Si l'on coupe deux systèmes de polaires proportionnels, situés ou non dans un même plan, par deux transversales quelconques qui ne sont pas respectivement parallèles à deux polaires correspondantes, ces transversales sont alors perspectivement proportionnelles.*

Démonstration. — En effet, on peut toujours faire une perspective des deux systèmes de polaires et de leurs transversales, telle que les perspectives de celles-ci deviennent respectivement parallèles aux perspectives de deux polaires correspondantes quelconques données; dès lors, les perspectives de ces transversales seront proportionnelles, en vertu de (175), si l'on remarque que les deux nouveaux systèmes de polaires, perspectives des deux systèmes proposés, sont proportionnels (173, corol. 5.) Donc, etc.

Remarque. — Le tableau sur lequel les perspectives des deux transversales deviennent respectivement parallèles aux perspectives de deux polaires correspondantes, doit être parallèle au plan qui passe par l'œil et par deux points correspondants quelconques des deux transversales (points de rencontre de deux polaires correspondantes avec leurs transversales respectives). Ce qui revient à dire :

Pour que les perspectives de deux transversales ou de deux droites perspectivement proportionnelles deviennent proportionnelles, il faut que deux points correspondants des transversales passent ensemble à l'infini sur la perspective. (M. Chasles, *Géométrie supérieure*, page 84).

177. — Théorème. — *Deux droites perspectivement proportionnelles restent perspectivement proportionnelles de quelque manière qu'on déplace l'une ou l'autre, ou toutes les deux dans l'espace.*

Démonstration. — Car en prenant ces deux droites perspectivement proportionnelles dans leur position primitive, pour transversales de deux systèmes de polaires, ces deux systèmes seront proportionnels (173 corol. 7), et resteront proportionnels de quelque manière qu'on les déplace dans l'espace. Donc, les deux transversales qui sont transportées avec les deux systèmes restent aussi perspectivement proportionnelles (176.)

Digitized by Google

178. — Nous pouvons démontrer ici le théorème énoncé à l'art. (162.)

Théorème. — *La perspective sur un plan quelconque, de deux droites perspectivement proportionnelles, donne deux nouvelles droites perspectivement proportionnelles.*

Démonstration. — En prenant les droites proposées pour transversales respectives de deux systèmes de polaires, ceux-ci seront proportionnels (173, corol. 7). La perspective de ces deux systèmes de polaires et de leurs transversales, donne deux nouveaux systèmes de polaires proportionnels dont les transversales (perpectives des droites proposées), sont toujours (176), perpectivement proportionnelles. Donc, etc.

179. — Théorème. — *Deux droites perspectivement proportionnelles à une troisième, sont perspectivement proportionnelles entre elles.*

Démonstration. — En prenant trois points arbitraires pour pôles de trois systèmes de polaires ayant respectivement pour transversales les trois droites données, les deux systèmes qui ont pour transversales les deux premières droites seront proportionnels chacun au système qui a pour transversale la troisième droite; donc les deux premiers systèmes sont proportionnels entre eux, et, partant, leurs transversales, c'est-à-dire les deux premières droites, sont perspectivement proportionnelles entre elles (176.)

180. — On démontrerait de la même manière qu'à l'article précédent le théorème suivant :

Théorème. — *Deux droites sont perspectivement proportionnelles, lorsqu'elles sont respectivement proportionnelles ou perspectivement proportionnelles à deux autres droites perspectivement proportionnelles.*

181. — Théorème. — *Un système de parallèles* p' *et un système de polaires* p *ayant des transversales perspectivement proportionnelles, sont proportionnels; c'est-à-dire que l'on peut toujours remplacer les transversales données par d'autres transversales, proportionnelles entre elles.* (Fig. 40.)

Démonstration. — Par le point d'intersection o d'une parallèle avec la polaire qui lui correspond, menons deux nouvelles transversales t, t', respectivement parallèles aux anciennes qui ne sont pas tracées sur la figure; les droites qui relieront t et t' concourront en un même point ω,

à cause que t et t' sont perspectivement proportionnelles (180) et ont un point correspondant o commun (158). Si l'on mène par le point o la transversale T dans le système de polaires, de manière que le rapport des deux segments oa : ab soit égal au rapport des deux segments oa' : $a'b'$, je dis que T sera proportionnelle à t', car T et t' sont perspectivement proportionnelles et ont un point correspondant o commun; donc les droites qui relient T et t' concourent en un même point; mais deux de ces droites, savoir : aa', bb' sont parallèles à cause de l'égalité oa : ab = oa' : $a'b'$; donc toutes les droites qui relient T et t' sont parallèles et, partant, T et t' sont proportionnelles. Donc, etc.

182. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires qui se coupent sur une conique quelconque passant par leurs pôles, sont proportionnels.*

Démonstration. — Si les deux systèmes de polaires se coupent sur une circonférence passant par les deux pôles, l'angle formé par deux polaires quelconques du premier système est évidemment égal à celui formé par les deux polaires correspondantes du second système. Donc (170 2°), ces deux systèmes sont proportionnels.

Maintenant deux systèmes de polaires qui se coupent sur une conique quelconque passant par leurs pôles sont proportionnels, comme étant les perspectives de deux systèmes de polaires proportionnels (174, corol. V), qui se coupent sur une circonférence.

D'où l'on déduit sans difficulté les corollaires :

Corollaire I. — *Tant de systèmes de polaires que l'on voudra étant donnés, si chaque système, depuis le premier jusqu'au dernier, coupe celui qui le suit immédiatement sur une section conique passant par leurs pôles, tous ces systèmes seront proportionnels entre eux.*

Corollaire II. — *Dans toute section conique, un système de diamètres et le système de diamètres respectivement conjugués aux premiers, constituent deux systèmes de polaires proportionnels de même pôle.*

En effet, les deux systèmes de diamètres sont respectivement parallèles à deux systèmes de cordes supplémentaires, lesquelles constituent deux systèmes de polaires proportionnels; donc, d'après (170 9°), la même propriété existe pour les deux systèmes de diamètres.

Digitized by Google

§ II.

183. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires proportionnels* p, p', *dont deux polaires correspondantes coïncident avec la ligne des pôles, représentent dans l'espace un plan, si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la ligne des pôles.*

Démonstration. — Coupons les deux systèmes par une même transversale parallèle à la droite qui unit les deux pôles, et représentons par a, b, c, etc., les points de rencontre des polaires du premier système avec la transversale, et par a', b', c', etc., les points de rencontre des polaires du second système avec la même transversale; d'après (175) on a :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = \text{etc.};$$

à cause de cette proportion, les points de l'espace (a, a'), (b, c'), (c, c') etc., sont sur une même droite, et les deux systèmes de polaires représentent dans l'espace un plan passant par cette droite et par le point (p, p'). Donc, etc.

L'intersection de ce plan avec le plan bissecteur B, étant une droite, on a :

Corollaire. — *Deux systèmes de polaires proportionnels, dont une paire de polaires correspondantes coïncident avec la ligne des pôles, se coupent sur une droite.*

184. — On démontrera facilement que :

Théorème. — *Deux systèmes de parallèles de direction différente et à transversales proportionnelles, représentent, pour une ligne de terre quelconque, un plan dans l'espace, si l'on fait abstraction des transversales.*

L'intersection de ce plan avec le plan bissecteur B, étant une droite, on a :

Corollaire I. — *Deux systèmes de parallèles de direction différente et à transversales proportionnelles, se coupent sur une droite.*

Corollaire II. — *Deux systèmes de parallèles, dont les transversales sont parallèles et reliées par un système de polaires, se coupent sur une même droite.*

Digitized by Google

Car les deux transversales de ces deux systèmes de parallèles sont proportionnelles. Donc, etc.

185. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires proportionnels représentent un hyperboloïde à une nappe, pour toute ligne de terre non perpendiculaire à la ligne des pôles.*

Démonstration. — Soient t et t' les transversales proportionnelles des deux systèmes de polaires proposés p, p'; par le point d'intersection n de deux polaires correspondantes quelconques, menons deux nouvelles transversales T T', respectivement parallèles aux premières transversales t, t'.

Puisque les nouvelles transversales sont proportionnelles et qu'elles ont un point n correspondant commun, le système de droites reliant ces nouvelles transversales est un système de parallèles (146). Donc, en prenant une ligne de terre quelconque perpendiculaire à ces parallèles, les deux systèmes de polaires p, p' représentent un hyperboloïde à une nappe, dont les trois directrices sont : 1°. la perpendiculaire (p) au plan horizontal de projection; 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite de l'espace (T, T').

S'il arrivait que la ligne de terre fût aussi perpendiculaire à la ligne des pôles, alors les deux systèmes de polaires représenteraient un plan (55).

Puisque deux systèmes de polaires proportionnels représentent un hyperboloïde à une nappe, on peut dire (120) que le lieu géométrique, intersection de deux systèmes de polaires proportionnels, passe par les deux pôles, et qu'il est la projection double d'une section faite dans un hyperboloïde à une nappe, par le plan bissecteur B; et comme l'hyperboloïde à une nappe ne peut être rencontré par une droite en plus de deux points, il en doit être de même d'une de ses sections planes et d'une projection de ces sections. Donc on peut énoncer que :

1° *Le lieu géométrique, intersection de deux systèmes de polaires proportionnels, ne peut être rencontré par une droite en plus de deux points.*

D'un autre côté, comme l'hyperboloïde à une nappe ne saurait avoir plus de deux génératrices d'un même mode de génération parallèles au plan bissecteur B, il en résulte aussi que :

Digitized by Google

2° *Deux systèmes de polaires proportionnels ne sauraient avoir plus de deux paires de polaires correspondantes parallèles;*

3° *Deux systèmes de polaires proportionnels, ayant même pôle, ne sauraient avoir plus de deux paires de polaires correspondantes qui coïncident.*

186. — Comme il sera démontré que deux systèmes de polaires proportionnels se coupent toujours sur une section conique passant par les deux pôles, on peut, eu égard à (74) énoncer que :

Théorème. — *Deux systèmes de polaires proportionnels, dont aucune paire de polaires correspondantes ne coïncident avec la ligne des pôles, représentent un cône du second degré pour toute ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles.*

187. — Deux systèmes de polaires proportionnels ayant même pôle, pouvant être considérés comme respectivement parallèles à deux autres systèmes de polaires proportionnels dont les pôles ne coïncident pas, et ces deux derniers systèmes représentant un cône pour toute ligne de terre perpendiculaire à leur ligne des pôles, on en conclut facilement que :

Théorème. — *Deux systèmes de polaires proportionnels, qui ont même pôle, représentent un cône du second degré dont le sommet est dans le plan bissecteur* B, *si la droite prise pour ligne de terre n'est pas perpendiculaire à une paire de polaires correspondantes qui peuvent coïncider dans les deux systèmes.*

188. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires proportionnels* p, p', *dont une paire de polaires correspondantes sont parallèles, représentent un paraboloïde hyperbolique, pour toute ligne de terre perpendiculaire à ces deux polaires.*

Démonstration. — En effet, en coupant les deux systèmes par une transversale parallèle aux deux polaires correspondantes dont il s'agit, cette transversale rencontrera en a, b, c, etc., les polaires du système p, et en a', b', c', etc., les polaires correspondantes du système p'; et l'on a (175) :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc.}$$

Cela posé, les trois directrices du paraboloïde sont : 1° la perpendiculaire (p) au plan horizontal; 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite ($a\ b\ c$, etc., $a'\ b'\ c'$, etc.) située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. La surface est un paraboloïde, parce que ses trois

Digitized by Google

directrices sont toutes parallèles à un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

189. — *Si un système de parallèles et un système de polaires sont proportionnels, on peut faire représenter à ces deux systèmes un paraboloïde hyperbolique.*

Démonstration. — Puisque les deux systèmes sont proportionnels, on peut les couper respectivement par deux transversales qui soient proportionnelles et qui aient de plus un point correspondant commun; dès lors, les droites qui relient les deux transversales sont parallèles. Cela posé, si l'on prend une ligne de terre perpendiculaire à ces dernières parallèles, les deux systèmes de l'énoncé représenteront, d'après (68), un paraboloïde hyperbolique.

§ III.

190. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels, si, par le point d'intersection* n *de deux polaires correspondantes, on mène deux transversales respectivement parallèles à deux autres polaires correspondantes :*

1° *Les droites qui relient ces deux transversales constituent un système de parallèles* (fig. 17). *La direction de ces parallèles, pour un même point* n, *varie avec les deux polaires correspondantes, auxquelles les transversales sont parallèles, et, les deux polaires correspondantes restant les mêmes, cette direction varie aussi avec le point* n;

2° *Si les deux transversales partant du point d'intersection* n *de deux polaires correspondantes ne sont pas respectivement parallèles à deux polaires correspondantes, les droites qui relient ces deux transversales constituent un système de polaires* (fig. 19). [V. Géom. de M. Steiner, p. 88, de M. Chasles, p. 72];

3° *Si, dans les deux cas précédents, les deux transversales ne partent pas du point d'intersection de deux polaires correspondantes, les droites qui relient ces deux transversales sont, dans le* 1er *cas, tangentes à une même parabole, et, dans le* 2d *cas, tangentes à une même section conique, autre qu'une parabole.*

Démonstration. — Dans le 1er cas, les deux transversales sont proportionnelles (175), et il est facile de voir qu'elles ont un point correspon-

14

Digitized by Google

dant n commun; donc (146) les droites qui relient ces deux transversales constituent un système de parallèles.

Maintenant si la direction de ces parallèles était la même que celle des parallèles qui relient deux nouvelles transversales partant du même point n, et respectivement parallèles à deux nouvelles polaires correspondantes, en prenant une ligne de terre perpendiculaire à cette direction, on verrait facilement que les deux systèmes de polaires proposés représenteraient un plan et devraient ainsi se couper sur une ligne droite. Donc, hormis le cas particulier où les systèmes de polaires se coupent sur une droite, la direction dont il s'agit ne peut pas rester la même. De la même manière on ferait voir que cette direction change avec le point d'intersection des deux polaires correspondantes par lequel les transversales auront été menées.

Dans le 2^d cas, les deux transversales sont perspectivement proportionnelles (176), et elles ont un point correspondant n commun. Donc (158), etc.

Dans le 3^e cas, les deux transversales sont toujours perspectivement proportionnelles, mais elles n'ont pas de point correspondant commun. Donc (164), etc.

Remarque. — Étant données, dans deux systèmes de polaires proportionnels, trois polaires du premier système et les trois polaires correspondantes du second, si l'on trace une quatrième polaire quelconque dans le premier système, on pourra, au moyen de la propriété 2°, construire, à l'aide de la règle seulement, sa polaire correspondante dans le second système.

191. — Remarque. — Deux systèmes de polaires proportionnels, dont aucune paire de polaires correspondantes ne coïncide avec la ligne des pôles, renferment chacun une polaire qui est correspondante de la ligne des pôles; ces deux polaires, qui ne sont pas correspondantes, seront nommées indifféremment polaires correspondantes de la ligne des pôles, ou *polaires principales*.

192. — Problème. — *Deux systèmes de polaires proportionnels étant placés d'une manière quelconque dans un même plan, on demande de quelle quantité angulaire il faut faire tourner l'un d'eux autour de son pôle pour qu'il coupe l'autre sur une droite.*

Digitized by Google

Solution. — Ayant construit la polaire principale d'un des deux systèmes (190, remarque), il suffira de faire tourner ce système autour de son pôle jusqu'à ce que sa polaire principale vienne coïncider avec la ligne des pôles. Dès lors les deux systèmes se trouvent dans le cas du corollaire de l'art. (183) et se coupent sur une droite.

193. — Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires proportionnels, deux polaires correspondantes quelconques étant prises pour transversales réciproques des deux systèmes, les droites qui relient ces deux transversales concourent toujours au point d'intersection des deux polaires principales* (fig. 18). [V. Géom. de M. Steiner, p. 89 [1].]

Démonstration. — Il résulte d'abord du théorème (190, 2°) que les droites qui relient les transversales mentionnées à l'énoncé, forment un système de polaires, c'est-à-dire concourent en un même point. Ce point de concours doit se trouver à l'intersection des deux polaires principales, parce que chacune de celles-ci relie deux points correspondants des deux transversales, ce dont il est facile de s'assurer, en remarquant que la ligne des pôles, considérée comme polaire d'un système, est rencontrée, par sa transversale, au pôle de l'autre système, donc en un point de la polaire principale de cet autre système.

Remarque. — Les droites qui relient les deux transversales mentionnées au théorème seront parallèles, si les deux polaires principales sont parallèles.

Corollaire I. — *Si, dans deux systèmes de polaires proportionnels, on considère deux paires de polaires correspondantes quelconques, les deux points d'intersection des polaires non correspondantes se trouvent sur une droite passant par le point d'intersection des deux polaires principales* (V. Géom. de M. Chasles, p. 75.);

Autrement : dans deux systèmes de polaires proportionnels, si l'on considère le quadrilatère intercepté par deux polaires quelconques du premier système et par les deux polaires correspondantes du second, celle des deux diagonales de ce quadrilatère qui ne passe pas par les points d'intersection des polaires correspondantes,

[1] La géométrie de M. Steiner a pour titre : *Systematische Entwickelung der abhaengigkeit geometrischer Gestalten von einander*. Berlin, 1832.

Digitized by Google

passe toujours par le point d'intersection des deux polaires principales (fig. 20).

Corollaire II. — *Dans deux systèmes de polaires proportionnels, si, après avoir mené une droite quelconque par le point d'intersection des deux polaires principales, l'on construit deux polaires qui se coupent sur cette droite, les deux polaires respectivement correspondantes de celles-là se couperont également sur la même droite.*

194. — Comme application de l'art. précédent, nous citerons la proposition suivante :

Proposition. — *Quand trois angles soustendent une même corde, pris deux à deux, ils en soustendent une seconde, et les trois cordes ainsi déterminées concourent en un même point.* (M. Chasles, *Géométrie supérieure*, p. 76.)

Démonstration. — Désignons par p, p' les extrémités de la corde qui soustend les trois angles, et considérons les deux systèmes de trois polaires p, p', qui se coupent aux sommets des trois angles proposés. Ces deux systèmes de polaires étant proportionnels (170, 13°), si on leur applique l'énoncé du premier corollaire (193), après avoir remarqué que les deux côtés d'un même angle constituent une paire de polaires correspondantes, on en déduira la proposition qu'il s'agit de démontrer.

§ IV.

195. — En remarquant que deux systèmes de polaires qui se coupent sur une section conique passant par les pôles sont proportionnels, et que chaque point de la conique est un point d'intersection de deux polaires correspondantes, on peut donner à l'énoncé du théorème (190) la forme suivante, sous laquelle il est utile de les connaître :

Théorème. — 1° *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une conique passant par les pôles, les droites qui relient deux transversales menées par un point* n *de la conique, parallèlement à deux polaires correspondantes quelconques, constituent un système de parallèles, dont la direction n'est pas celle de la ligne des pôles* (fig. 17);

2° *Si les transversales menées par un point* n *de la conique ne sont pas res-*

Digitized by Google

pectivement parallèles à deux polaires correspondantes, les droites qui relient ces transversales constituent un système de polaires dont le pôle ne se trouve pas sur la ligne des pôles des deux systèmes proposés (fig. 19);

3° *Si dans les deux cas précédents, les deux transversales ne partent pas d'un point de la conique, les droites qui les relient sont tangentes à une autre section conique à laquelle sont aussi tangentes les deux transversales.*

196. — Remarque. — Lorsque deux systèmes de polaires se coupent sur une section conique passant par les deux pôles, il est facile de voir que si l'une de deux polaires correspondantes devient tangente en l'un des pôles, l'autre coïncide avec la ligne des pôles. On peut donc dire, eu égard à la remarque (191), que :

Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une section conique passant par les pôles, les deux polaires principales sont tangentes à la conique aux deux pôles respectivement.

197. — D'après cette remarque, le théorème (193) et ses corollaires peuvent s'énoncer comme il suit :

Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une section conique passant par leurs pôles, deux polaires correspondantes quelconques étant prises pour transversales réciproques des deux systèmes, les droites qui relient ces deux transversales concourent toujours au point d'intersection des deux polaires principales* (fig. 18).

Corollaire I. — *Si, dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une section conique passant par les pôles, on considère deux paires de polaires correspondantes quelconques, les deux points d'intersection des polaires non correspondantes se trouvent sur une droite passant par le sommet des deux polaires principales* (fig. 20).

Remarque. — Cette propriété donne le moyen de construire, par la règle seulement, le point d'intersection des deux polaires principales. Il suffit, en effet, pour cela de connaître trois paires de polaires correspondantes des deux systèmes.

Corollaire II. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une section conique passant par leurs pôles, si, après avoir mené une droite quelconque par le sommet des deux polaires principales, l'on construit deux polaires qui se coupent*

sur cette droite, les deux polaires respectivement correspondantes de celles-là se couperont également sur la même droite.

Corollaire III. — *Dans deux systèmes de polaires ayant leurs pôles aux extrémités d'un diamètre d'une section conique et se coupant sur cette courbe, deux polaires correspondantes étant prises pour transversales réciproques des deux systèmes, les droites qui relient ces transversales forment un système de parallèles dont la direction ne change pas, quelles que soient les deux polaires correspondantes prises pour transversales.*

Dans ce cas, les deux polaires principales sont parallèles comme tangentes aux extrémités du diamètre. Donc (197), etc.

§ V.

198. — Application. — *Connaissant cinq points d'une section conique, on demande de construire graphiquement d'autres points de la même courbe, en ne faisant usage que de la règle.*

Solution. — Il suffit de prendre deux des cinq points pour pôles de deux systèmes de polaires proportionnels se coupant aux trois autres points, et de construire, au moyen de la remarque (190), tant de paires de polaires correspondantes que l'on voudra avoir de points nouveaux. L'intersection de chaque paire de polaires correspondantes sera un point de la conique.

199. — Le théorème (195) conduit directement à la célèbre propriété de l'hexagone de Pascal, à savoir que :

Proposition. — *Dans tout hexagone inscrit à une section conique, les points de concours des côtés respectivement opposés sont en ligne droite* (fig. 22).

Soient, en effet, 1, 2, 3, 4, 5, 6, les sommets consécutifs de l'hexagone. En prenant les deux sommets de rang impair 1, 3, pour pôles de deux systèmes de polaires qui se coupent aux trois sommets de rang pair, ces deux systèmes de polaires seront proportionnels (182). Coupons le système dont le pôle est au point 1 par la transversale 5 — 4 ou t^1, et le système dont le pôle est au point 3, par la transversale 5 — 6 ou t^3; ces deux transversales partant d'un même point 5 de la conique, les

Digitized by Google

droites qui les relient doivent former un système de polaires, et conséquemment concourir en un même point.

Or, *a, b, c* sont les points où les trois polaires 1—2, 1—4, 1—6 rencontrent leur transversale t^1; et *a', b', c'* sont les points où les trois polaires respectivement correspondantes 3—2, 3—4, 3—6 rencontrent leur transversale t^3; et puisque les trois droites *aa', bb', cc'*, dont chacune relie deux points correspondants de ces deux transversales, doivent concourir en un même point, il faut que le point *o*, intersection de *bb'* avec *cc'*, se trouve sur *aa'*. Or, les trois points *a*, *o*, *a'* sont précisément, comme l'indique la figure, les points de concours des côtés respectivement opposés de l'hexagone. Donc, etc. :

200. — Proposition. — Si, dans la figure précédente, on coupe le système de polaires dont le pôle est au point 1, par la transversale 5—6 et le système de polaires dont le pôle est au point 3, par la transversale 5—4, on sera conduit, en appliquant le théorème (195, 2°), à la proposition suivante :

Dans un hexagone inscrit à une section conique, deux paires quelconques de côtés opposés, suffisamment prolongés, forment un quadrilatère dont une diagonale est en même temps diagonale de l'hexagone. Cela posé, l'autre diagonale du quadrilatère et les deux autres diagonales de l'hexagone se coupent toujours en un même point (fig. 30).

D'où il résulte comme corollaire :

Dans les trois quadrilatères, dont chacun est formé par deux paires de côtés opposés prolongés d'un hexagone inscrit à une section conique, celles de leurs diagonales, qui sont en même temps diagonales de l'hexagone, interceptent un triangle qui est inscrit à celui intercepté par les trois autres diagonales des trois quadrilatères.

201. — Si l'hexagone inscrit à une conique se déforme, de façon que les côtés de rang pair deviennent tangents à la courbe, la proposition (199) conduit à la suivante :

Proposition. — *Dans tout triangle inscrit à une section conique, les points d'intersection de chaque côté avec la tangente menée par le sommet opposé à ce côté, sont trois points en ligne droite.*

Digitized by Google

Réciproquement, si l'on coupe les côtés d'un triangle par une transversale quelconque, les droites qui relient respectivement les points d'intersection avec les sommets opposés, sont tangentes à une même section conique, circonscrite au triangle.

La première de ces propriétés donne la solution du problème suivant:

Connaissant trois points d'une section conique et les tangentes en deux de ces points, construire la tangente au troisième point.

202. — Proposition. — *Si les trois points de concours des côtés respectivement opposés d'un hexagone sont en ligne droite, l'hexagone est inscrit à une section conique.*

En faisant abstraction de la conique (fig. 22), si l'on considère les deux mêmes systèmes de polaires et les deux mêmes transversales que dans la proposition (199), on trouvera que les transversales de ces deux systèmes sont reliées par un troisième système de polaires, dont le pôle est en *o*, donc, d'après (216 corol. IV), ces deux systèmes de polaires se coupent sur une conique qui passe par les deux pôles et par le sommet des deux transversales, c'est-à-dire que tous les sommets de l'hexagone se trouvent sur cette conique.

203. — Les côtés d'un quadrilatère inscrit à une section conique forment, avec les deux diagonales, six systèmes de deux polaires, dont deux quelconques ont leurs pôles sur la conique et se coupent sur la même conique.

Si, en ne considérant que les quatre systèmes qui ont, deux à deux, leurs pôles aux extrémités d'un même côté du quadrilatère, on applique à ces systèmes, pris deux à deux, l'énoncé du théorème (197 corol. I), on aura, eu égard à la remarque (196), la proposition suivante :

Proposition. — *Si un quadrilatère inscrit à une section conique a ses sommets aux points de contact des côtés d'un quadrilatère circonscrit :*

1° *Les quatre diagonales des deux quadrilatères se croisent en un même point;*

2° *Les diagonales du quadrilatère circonscrit passent respectivement par les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit.*

Digitized by Google

§ VI.

204. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires dont les transversales sont proportionnelles ou perspectivement proportionnelles et dont les pôles sont sur une droite qui relie deux points correspondants, se coupent sur une droite.*

Démonstration. — Les deux systèmes sont proportionnels (173, corol. VII) et ils ont une paire de polaires correspondantes qui coïncident avec la ligne des pôles; donc, ils se coupent sur une droite (183, corol.).

Corollaire I. — Dans le cas particulier où les deux pôles coïncident respectivement avec deux points correspondants, on a ce corollaire :

Deux systèmes de polaires dont les transversales sont proportionnelles ou perspectivement proportionnelles et dont les pôles coïncident avec deux points correspondants des transversales, se coupent toujours sur la même droite, quels que soient les deux points correspondants pris pour pôles, et cette droite rencontre les transversales en deux points dont les correspondants coïncident avec le sommet des deux transversales. (V. Géom. de M. Steiner, p. 87.)

Il résulte du théorème ci-dessus que ces deux systèmes de polaires se coupent d'abord sur une droite, quels que soient les points correspondants que l'on ait choisis pour pôles. Après cela, si l'on remarque que le point, où cette droite rencontre chaque transversale, est l'intersection de deux polaires correspondantes dont l'une passe par le sommet des deux transversales, on s'assurera que cette droite rencontre, en effet, les transversales en deux points dont les correspondants coïncident avec le sommet des transversales, et comme ces deux points sont uniques sur les deux transversales, la propriété est démontrée.

Corollaire II. — La droite d'intersection des deux systèmes de polaires qui nous occupent ne variant pas avec les deux points correspondants choisis pour pôles, on en déduit ce corollaire :

Si deux droites sont proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, deux droites qui relient inversement deux paires quelconques de points correspondants se coupent toujours sur une même droite, qui rencontre les deux droites proposées en deux points, dont les correspondants coïncident avec le point d'intersection des deux droites proposées. (V. Géom. de M. Chasles, p. 73.)

205. — PROPOSITION. — Si, dans le corollaire précédent, on ne donne que trois points d'une des deux droites perspectivement proportionnelles et les trois points correspondants de l'autre, (ce qui est le cas (161, 2°) de deux droites sur chacune desquelles on prend trois points quelconques, et où l'on considère dans un ordre arbitraire les trois points de la première, comme respectivement correspondants des trois points de la seconde), en construisant chaque couple de droites qui relient inversement deux paires de points correspondants, on aura un hexagone inscrit aux deux droites proposées, dans lequel chaque couple de droites qui relient inversement deux paires de points correspondants, constitue ce que l'on nomme deux côtés opposés de l'hexagone.

On peut donc énoncer que :

Dans un hexagone inscrit à deux droites, les trois points de concours des côtés respectivement opposés sont en ligne droite.

206. — APPLICATION. — *Une section conique étant donnée par cinq tangentes, construire le point de contact de chacune de ces tangentes.*

SOLUTION. — Deux quelconques t, t' de ces tangentes étant divisées par les trois autres en parties perspectivement proportionnelles, il suffit de construire, d'après (204, corol. II), sur chacune des deux tangentes t, t', le point correspondant de leur point d'intersection. Chaque point correspondant de ce point d'intersection est un point de contact (165, corol.).

207. — THÉORÈME. — *Quatre droites, reliant chacune une paire de points correspondants de deux droites proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, forment avec ces deux dernières un hexagone dont les trois diagonales se rencontrent en un même point.* (V. Géom. de M. Steiner, p. 90.)

DÉMONSTRATION. — Soient (*fig.* 14), $abcd$, $a'b'c'd'$ les deux droites perspectivement proportionnelles. Les droites dont chacune relie deux points correspondants sont aa', bb', cc', dd'. L'hexagone formé par ces six droites est $cp'pa'd'd$. Les trois diagonales sont : pd, $p'd'$, ca'. Cela posé, prenons les deux droites proposées $abcd$, $a'b'c'd'$ pour transversales de deux systèmes de polaires p, p'. Comme les pôles ainsi choisis se trouvent sur une droite bb', qui relie deux points correspondants, il résulte du théorème (204) que les deux systèmes de polaires se coupent sur une droite.

Digitized by Google

Donc, les trois points c, m, a', dont chacun est l'intersection de deux polaires correspondantes, sont en ligne droite.

Or, cette droite cma' est une diagonale, et les deux polaires correspondantes pd, $p'd'$, qui se coupent en un point m de cette droite, sont les deux autres diagonales de l'hexagone, et comme elles se coupent toutes trois au point m, le théorème est démontré.

208. — PROPOSITION. — Puisque, dans un hexagone circonscrit à une section conique, deux côtés quelconques sont divisés en parties perspectivement proportionnelles par les quatre autres (165), on peut appliquer à cet hexagone le théorème précédent et l'on en déduit directement l'énoncé suivant du théorème de Brianchon, savoir :

Dans tout hexagone circonscrit à une section conique, les trois diagonales se coupent en un même point (fig. 14).

209. — Si l'hexagone cirsconcrit à une conique se déforme de manière que les côtés de rang pair viennent coïncider respectivement avec les côtés de rang impair, la proposition précédente deviendra :

PROPOSITION. — *Dans tout triangle circonscrit à une section conique, les trois droites dont chacune joint un sommet avec le point de contact du côté opposé se coupent en un même point.*

Réciproquement trois droites menées d'un même point aux sommets d'un triangle, rencontrent les côtés opposés en trois points qui sont les points de contact d'une section conique inscrite au triangle.

La première de ces propriétés donne la solution du problème suivant :

PROBLÈME. — *Connaissant trois tangentes d'une section conique et les points de contact de deux de ces tangentes, construire le point de contact de la troisième.*

210. — PROBLÈME FONDAMENTAL. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels ayant même pôle, on demande de construire, s'il y a lieu, la paire ou les deux paires de polaires correspondantes qui coïncident.*

SOLUTION. — Nous conviendrons d'abord de représenter un système de polaires dont le pôle est p, et dont les polaires passent respectivement par des points donnés a, b, c, etc., par (p — abc, etc.). Cela posé, soit p le pôle commun aux deux systèmes de polaires proportionnels proposés. Décrivons une circonférence de cercle passant par le pôle p, laquelle coupera en

Digitized by Google

des points a, b, c, etc. les polaires du premier système et en des points a', b', c', etc. les polaires respectivement correspondantes du second système. Comme la circonférence fait ici office de transversale, nous conviendrons de nommer points correspondants les points dans lesquels elle coupe deux polaires correspondantes. Ainsi, a et a' sont deux points correspondants de la circonférence, ainsi que b et b', c et c', etc.

D'après la convention faite ci-dessus, nous écrirons les deux systèmes de polaires proposés comme il suit : (p — abc, etc.), (p — $a'b'c'$, etc.), (*fig.* 21).

En considérant maintenant les deux systèmes de polaires auxiliaires (a — $a'b'c'$, etc.), (a' — abc, etc.) dont les pôles sont, comme l'indique la notation, en deux points correspondants de la circonférence, on reconnaît facilement, d'après (182), que le système auxiliaire (a — $a'b'c'$, etc.) et le système primitif (p — $a'b'c'$, etc.) sont proportionnels, de même que le système auxiliaire (a' — abc, etc.) et le système (p — abc, etc.). Donc, les deux systèmes auxiliaires sont proportionnels entre eux (175, corol. III) et comme ils ont deux polaires correspondantes aa' et $a'a$ qui coïncident, ils doivent se couper sur une droite. Maintenant il est facile de s'assurer que si cette droite rencontre la circonférence en un point, les deux systèmes de polaires proposés p ont une paire de polaires correspondantes qui coïncident et qui passent par ce même point.

Donc, selon que la droite mn, intersection des deux systèmes de polaires auxiliaires, rencontre en un ou en deux points la circonférence, les deux systèmes de polaires proposés auront une ou deux paires de polaires correspondantes qui coïncident. Si la droite ne rencontre pas la circonférence, les deux systèmes proposés n'ont pas de polaires correspondantes qui coïncident. (V. Géom. de M. Steiner, p. 174.)

La solution précédente resterait la même si, au lieu d'une circonférence, on faisait usage de toute autre section conique.

Comme les deux paires de polaires correspondantes qui peuvent coïncider dans deux systèmes de polaires proportionnels de même pôle, sont uniques, il s'ensuit que la droite sur laquelle se coupent les deux systèmes de polaires auxiliaires mentionnés plus haut est unique aussi et ne

Digitized by Google

change pas, quels que soient les deux points correspondants que l'on choisisse pour pôles de ces deux systèmes auxiliaires. De cette dernière considération découle ce corollaire :

Corollaire. — *Deux systèmes de polaires proportionnels et de même pôle étant coupés par une circonférence de cercle ou par une section conique quelconque passant par le pôle, deux droites qui relient inversement deux paires quelconques de points correspondants, se coupent toujours sur une même ligne droite.*

La même propriété appartient à deux systèmes de polaires proportionnels que l'on couperait par une section conique quelconque passant par les deux pôles.

211. — Problème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels, construire, s'il y a lieu, la paire ou les deux paires de polaires correspondantes parallèles.*

Solution. — Soient p, p' les deux systèmes de polaires proportionnels; au pôle p je construis un système auxiliaire de polaires respectivement parallèles aux polaires du système p'. Le système auxiliaire et le système p' étant proportionnels (170, 3°), le système auxiliaire et le système p qui ont le même pôle p, sont également proportionnels, et la paire ou les deux paires de polaires correspondantes qui coïncident dans les deux systèmes p, sont précisément la polaire ou les deux polaires du système p qui sont parallèles à leurs correspondantes du système p'. Si les deux systèmes p n'ont pas de polaires correspondantes qui coïncident, les deux systèmes proposés n'ont pas non plus de polaires correspondantes parallèles.

212. — Problème. — *Étant données deux droites proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, on demande de mener, par un point donné, une droite qui rencontre les deux premières en deux points correspondants.*

Solution. — Considérons deux systèmes de polaires ayant pour pôle commun le point donné et pour transversales respectives les deux droites données. Si ces deux systèmes de polaires ont une ou deux paires de polaires correspondantes qui coïncident, chaque paire rencontrera les deux droites proposées en deux points correspondants. Donc, d'après (210), il peut y avoir une, deux ou pas de solution.

213. — Application. — *Connaissant cinq tangentes d'une section conique, on*

Digitized by Google

demande de mener, par un point donné, une sixième tangente à cette courbe.

Solution. — Deux des cinq tangentes étant divisées par les trois autres en parties perspectivement proportionnelles (165), tout se réduit à mener, par le point donné, une droite qui rencontre les deux premières tangentes en deux points correspondants (212).

214. — Problème fondamental. — *Ayant placé arbitrairement l'une sur l'autre deux droites proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, on demande de trouver, s'il y a lieu, la paire ou les deux paires de points correspondants qui coïncident.*

Solution. — Soient t, t', les deux droites proportionnelles ou perspectivement proportionnelles placées sur une même droite D. On prendra un point arbitraire p, en dehors de la droite D, pour pôle de deux systèmes de polaires proportionnels pt, pt'; on construira, d'après (210), la paire ou les deux paires de polaires correspondantes qui coïncident dans ces deux systèmes. Chaque paire de polaires correspondantes qui coïncident, rencontre la droite D en un point qui est la réunion de deux points correspondants des deux droites proposées t, t'. Si les deux systèmes de polaires pt, pt' n'ont pas de polaires correspondantes qui coïncident, les deux droites t, t' n'auront pas non plus de points correspondants qui coïncident.

215. — Application. — *Construire parallèlement à une droite* D, *la tangente à une section conique dont on connaît cinq tangentes.*

Solution. — Deux quelconques des cinq tangentes étant divisées en parties perspectivement proportionnelles par les trois autres, soient a, b, c, les points de division de la première, et a', b', c' les points de division correspondants de la seconde. Par les points de division a, b, c, menons trois droites parallèles à D; ces parallèles rencontrent la tangente $a'b'c'$ en trois points a'', b'', c''. Les deux droites $a'b'c'$ et $a''b''c''$ sont évidemment perspectivement proportionnelles (179) et tout se réduit à construire, s'il y a lieu, la paire ou les deux paires de points correspondants qui peuvent coïncider sur ces deux droites. Par chaque paire de points correspondants qui coïncident menant une parallèle à la droite D, cette parallèle sera la tangente demandée.

Digitized by Google

216. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires proportionnels, dont aucune paire de polaires correspondantes ne coïncide avec la ligne des pôles, se coupent toujours sur une section conique passant par les deux pôles, ou, en d'autres mots, l'intersection de deux systèmes de polaires proportionnels est une perspective du cercle.*

La section conique sera une parabole si les deux systèmes ont une paire de polaires correspondantes parallèles; une hyperbole, si les deux systèmes ont deux paires de polaires correspondantes parallèles; et une ellipse dans tous les autres cas.

Pour démontrer cette réciproque du théorème (182) nous avons besoin de quelques notions préliminaires :

1° Si par une droite δ, perpendiculaire à la ligne de terre et située dans le plan bissecteur B', on mène arbitrairement un plan, les deux traces de ce plan seront également inclinées sur la ligne de terre, et, après le rabattement du plan vertical de projection, elles se trouveront être l'une le prolongement de l'autre (25). D'où l'on conclut que :

2° Si au point de rencontre de la droite δ avec la ligne de terre, on trace dans le plan horizontal un système de polaires, la perspective de ces polaires sur le plan vertical de projection, pris pour tableau, l'œil étant placé sur la droite δ, sera un autre système de polaires, qui coïncideront respectivement avec les polaires du système proposé, quand on aura rabattu le plan vertical de projection sur le plan horizontal;

3° Étant donnés deux systèmes de polaires dont les polaires du premier système sont respectivement parallèles aux polaires du second, si l'on fait tourner l'un de ces systèmes autour de son pôle d'une quantité angulaire quelconque, il coupera l'autre, demeuré fixe, sur une circonférence de cercle passant par les deux pôles.

Cela posé, soient p, p' deux systèmes de polaires proportionnels (*fig.* 23), nous allons prouver qu'il existe toujours un tableau et une position de l'œil pour lesquels les perspectives de ces systèmes se coupent sur une circonférence de cercle, passant par les perspectives des deux pôles p, p'.

Pour cela, faisons d'abord tourner le système p autour de son pôle, jusqu'à ce qu'il coupe le système p' sur une droite (192) que nous désignerons par D. Représentons le système p, dans cette nouvelle position,

Digitized by Google

par *pD*. Par le pôle *p* menons une droite *D'* parallèle à *D*; prenons le plan vertical élevé suivant *D'* pour tableau, et plaçons l'œil dans le plan vertical élevé suivant *D*, en un point *o*, tel que la droite *op* soit perpendiculaire à la ligne de terre *D'* et située dans le plan bissecteur *B'*.

Voyons maintenant ce que seront, pour ces positions de l'œil et du tableau, les perspectives des trois systèmes de polaires *p*, *pD* et *p'*.

D'après (2°) les deux systèmes *p* et *pD*, qui ont même pôle *p*, coïncideront avec leurs perspectives après le rabattement du tableau.

Les perspectives des deux systèmes *pD* et *p'* seront deux systèmes de polaires parallèles, par la raison que la perspective de la droite *D* se trouvera à l'infini.

En désignant par π la perspective du pôle *p'*, nous pouvons dire que la perspective des trois systèmes, le tableau étant rabattu, se compose des deux systèmes *p*, *pD*, qui sont eux-mêmes leurs perspectives, et du système π qui est parallèle au système *pD*. Or, les systèmes *pD* et π étant parallèles et le système *p* étant le résultat d'une rotation du système *pD* autour de son pôle, il résulte de (3°) que les deux systèmes *p* et π se coupent sur une circonférence de cercle passant par *p* et π. Or, le pôle *p* est lui-même sa perspective, et π est la perspective du pôle *p'*; donc, etc.

Corollaire I. — *Deux systèmes de parallèles dont les transversales sont perspectivement proportionnelles se coupent sur une section conique.*

En faisant la perspective des deux systèmes de parallèles, on aura deux systèmes de polaires proportionnels qui se couperont sur une conique et il est facile d'en conclure que les deux systèmes de parallèles doivent se couper également sur une conique. Les deux systèmes de parallèles ne sauraient, d'ailleurs, se couper sur une droite, car, dans ce cas, leurs transversales seraient proportionnelles, contrairement à l'hypothèse.

Corollaire II. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une conique passant par leurs pôles, si un troisième système de polaires est parallèle à l'un des deux premiers* (44), *il coupera l'autre sur une conique passant par le pôle de cet autre et par son propre pôle.*

Digitized by Google

Corollaire III. — *Si deux systèmes de polaires se coupent sur une conique passant par leurs pôles, deux autres systèmes de polaires, respectivement parallèles aux deux premiers, se couperont également sur une conique passant par leurs pôles.*

Corollaire IV. — *Deux systèmes de polaires, dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires ou par un système de parallèles, se coupent sur une section conique qui passe par leurs pôles et par le sommet des deux transversales.*

La conique passe par le sommet des deux transversales, parce que les deux polaires qui se coupent à ce sommet sont évidemment deux polaires correspondantes.

Corollaire V. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se coupent sur une section conique passant par leurs pôles, si un troisième système de polaires coupe l'un des deux premiers sur une droite, il coupera l'autre sur une section conique passant par le pôle de cet autre système et par son propre pôle.*

217. — Application. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels* p, p', *trouver le point de rencontre d'une droite* D *avec la section conique sur laquelle se coupent les deux systèmes de polaires proposés.*

Solution. — Si l'on construit un système auxiliaire de polaires, ayant pour pôle p', et coupant le système p sur la droite D, on aura ainsi deux systèmes de polaires, ayant même pôle p', et qui sont proportionnels, comme étant chacun proportionnel au système p. La paire de polaires correspondantes qui coïncident dans les deux systèmes p', polaires que l'on construira d'après (210), couperont la droite D au point demandé. On voit qu'il y a une ou deux ou pas de solution, selon que les deux systèmes de polaires p' ont une ou deux paires, ou n'ont pas de paire de polaires correspondantes qui coïncident.

Remarque. — Si la droite D passe par le pôle d'un système, elle rencontre la section conique en un second point, qui est l'intersection de la droite D considérée comme polaire de ce système avec sa polaire correspondante de l'autre système.

218. — Les propositions qui suivent jusqu'à l'article (234) concernent diverses déformations que l'on peut faire subir au triangle et au quadri-

Digitized by Google

latère, et leurs énoncés sont, pour la plupart, empruntés à la géométrie de M. Steiner (voir p. 171 et suivantes) et au *Traité des propriétés projectives* de M. Poncelet.

219. — Proposition. — *Si les sommets des trois angles d'un triangle variable se meuvent respectivement sur trois droites fixes, tandis que deux côtés du triangle tournent respectivement autour de deux points fixes, le troisième côté sera, dans toutes ses positions, tangent à une même section conique à laquelle sont aussi tangentes deux des trois droites fixes ainsi que la droite qui unit les deux points fixes.*

Démonstration. — Les deux systèmes de polaires décrits par les deux côtés qui tournent autour des deux points fixes, sont proportionnels puisqu'ils se coupent sur l'une des trois droites fixes. En considérant les deux autres droites fixes comme transversales respectives de ces deux systèmes de polaires, on voit que le troisième côté du triangle relie à chaque instant ces deux transversales : donc, ce troisième côté est d'après (190, 3°), tangent à une même section conique, ayant pour tangentes les deux transversales. Enfin, il est facile de s'assurer qu'il arrivera un instant où les trois côtés du triangle se confondront avec la droite qui unit les deux points fixes, d'où il suit que cette droite est aussi tangente à la même section conique.

220. — Proposition. — *Si les trois côtés d'un triangle variable tournent respectivement autour de trois points fixes, tandis que deux des trois sommets se meuvent respectivement sur deux droites fixes, le troisième sommet décrira une section conique, passant par le point d'intersection des deux droites fixes et par les deux points fixes autour desquels tournent les deux côtés du troisième sommet.*

Démonstration. — En construisant deux ou trois positions du triangle variable, on reconnaîtra toutes les circonstances du corollaire IV (216).

221. — Proposition. — *Si la base d'un triangle variable se meut tangentiellement à une section conique, tandis que les deux autres côtés tournent respectivement autour de deux points fixes situés sur une tangente à cette courbe et, qu'en outre, les sommets des angles à la base se meuvent respectivement sur deux autres tangentes à la conique, le troisième sommet décrira une ligne droite.*

Démonstration. — En construisant quelques positions du triangle

Digitized by Google

variable, on verra que les deux côtés qui tournent décrivent deux systèmes de polaires ayant pour pôles les deux points fixes et pour transversales les deux autres tangentes à la conique. Ces deux transversales étant divisées par la base en parties perspectivement proportionnelles (165), les deux systèmes de polaires sont proportionnels; et comme il est facile de voir, par une figure, que ces deux systèmes ont deux polaires correspondantes qui coïncident avec la ligne des pôles, vu qu'il arrive un instant où les trois côtés du triangle se confondent avec cette ligne, il en résulte que ces deux systèmes se coupent sur une droite (183 corol.).

222. — PROPOSITION. — *Si l'un des sommets d'un triangle variable se meut sur une section conique, tandis que les côtés passant par ce sommet tournent respectivement autour de deux points fixes de la conique, que de plus, les deux autres sommets se meuvent respectivement sur deux droites fixes, partant d'un point de la conique, le troisième côté passera sans cesse par un même point fixe.*

DÉMONSTRATION. — En construisant deux positions seulement du triangle variable, on reconnaîtra toutes les circonstances énoncées au théorème (195 2°).

223. — PROPOSITION. — *Si deux côtés d'un triangle variable tournent respectivement autour de deux points fixes d'une section conique donnée, tandis que le sommet de l'angle compris par ces côtés se meut sur la même courbe; que, de plus, les deux sommets opposés à ces côtés se meuvent respectivement sur deux droites fixes, le troisième côté sera, dans toutes ses positions, tangent à une même autre section conique, à laquelle sont aussi tangentes les deux droites fixes.*

DÉMONSTRATION. — D'après l'énoncé, les deux côtés qui tournent autour de deux points fixes de la conique donnée, se coupent également sur cette même conique; donc ces deux côtés décrivent deux systèmes de polaires proportionnels (182). Les deux droites fixes étant prises pour transversales respectives de ces deux systèmes de polaires, on voit que le troisième côté relie à chaque instant ces deux transversales; donc, ce troisième côté est sans cesse tangent à une même section conique, à laquelle sont aussi tangentes les deux droites fixes (195, 3°). Donc, etc.

224. — PROPOSITION. — *Si deux sommets d'un triangle variable se meuvent*

Digitized by Google

respectivement sur deux tangentes fixes d'une section conique donnée, tandis que les côtés opposés à ces sommets tournent respectivement autour de deux points fixes; que, de plus, le troisième côté touche constamment la section conique donnée, le troisième sommet décrira une autre section conique passant par les deux points fixes.

Démonstration. — Le troisième côté du triangle, touchant constamment la conique donnée, divise les deux tangentes fixes en parties perspectivement proportionnelles (165). Les deux côtés qui tournent autour des deux points fixes décrivent deux systèmes de polaires qui sont proportionnels, comme ayant pour transversales les deux tangentes fixes (173, corol. VII); donc, ces deux systèmes de polaires se coupent sur une section conique qui passe par leurs pôles, c'est-à-dire par les deux points fixes. Or, le point d'intersection des deux côtés qui tournent autour des deux points fixes est précisément le troisième sommet de l'énoncé. Donc, etc.

225. — Proposition. — *Si l'angle opposé à la base d'un triangle variable tourne autour de son sommet sans changer de grandeur, tandis que les deux autres sommets se meuvent respectivement sur deux droites fixes, la base du triangle sera, dans toutes ses positions, tangente à une même section conique ayant pour tangente les deux droites fixes.*

Ou bien, sous une forme plus générale :

« *Si, sur le plan d'un angle donné de position, on fait mouvoir, autour d'un point arbitraire et fixe pris pour sommet, un angle quelconque, de grandeur invariable; qu'on trace ensuite, pour chacune de ses positions, les deux droites qui sous-tendent à la fois l'angle fixe et l'angle mobile, chacune de ces deux séries de droites enveloppera, en particulier, une seule et même section conique, ayant précisément pour foyer le sommet fixe de l'angle mobile, et, pour tangents, les deux côtés de l'angle fixe.* » (M. Poncelet, p. 272.)

Démonstration. — Pour le premier énoncé :

Les deux côtés de l'angle constant de grandeur décrivent deux systèmes de polaires proportionnels (170, 5°), qui se trouvent coupés respectivement par les deux droites fixes, prises pour transversales. La base du triangle, reliant à chaque instant deux points correspondants de ces

Digitized by Google

deux transversales, qui sont perspectivement proportionnelles (176), il résulte, de (164), que cette base, dans toutes ses positions, ainsi que les deux droites fixes sont tangentes à une même section conique.

226. — PROPOSITION. — *Si la base d'un triangle variable se meut sur une droite fixe, sans changer de grandeur, tandis que les deux autres côtés tournent respectivement autour de deux points fixes, le sommet opposé à la base décrira une section conique qui passera par ces deux points.*

DÉMONSTRATION. — Le sommet qui doit décrire la section conique étant l'intersection des deux côtés qui tournent autour des deux points fixes, il suffit de faire voir que les deux systèmes de polaires décrits par ces deux côtés sont proportionnels. Or, il résulte de l'énoncé que ces deux côtés interceptent, à chaque instant, sur la direction de la base prolongée, un segment égal à cette base; donc, d'après (170, 6°), ces deux côtés décrivent deux systèmes de polaires proportionnels. Donc, etc.

227. — PROPOSITION. — *Si, dans un quadrilatère complet variable, deux côtés opposés, de grandeur invariable, se meuvent respectivement sur deux droites fixes, tandis qu'un troisième côté tourne autour d'un point fixe, le quatrième côté et les deux diagonales seront tangents à des sections coniques distinctes, tangentes chacune aux deux droites fixes sur lesquelles se meuvent les deux côtés de grandeur invariable.*

DÉMONSTRATION. — Les deux sommets du quadrilatère, adjacents au côté qui tourne autour du point fixe, décrivent, sur les deux droites fixes, deux séries de divisions perspectivement proportionnelles (159, 2°), et les deux autres sommets du quadrilatère décrivent, sur les deux mêmes droites fixes, des divisions égales respectivement à celles des deux premières séries. D'où il suit que deux sommets quelconques, appartenant respectivement aux deux côtés de grandeur invariable, décrivent des divisions perspectivement proportionnelles. Donc, d'après (164), les deux diagonales et le quatrième côté sont tangents à des sections coniques distinctes.

228. — PROPOSITION. — *Si, dans un quadrilatère complet variable, deux angles opposés, de grandeur constante, tournent autour de leurs sommets, supposés fixes, tandis qu'un troisième sommet se meut sur une droite fixe, les trois autres*

Digitized by Google

sommets décriront chacun en particulier une section conique, passant par les deux sommets fixes.

D'une autre manière, qui met mieux en évidence la description organique des courbes du deuxième ordre par Newton :

Si deux angles, de grandeur constante, tournent autour de leurs sommets, supposés fixes, de telle sorte que deux de leurs côtés se coupent sans cesse sur une droite donnée, les trois autres points d'intersection des côtés de ces angles décriront, chacun séparément, une section conique passant par les deux sommets fixes.

Démonstration. — Des quatre systèmes de polaires décrits par les côtés des deux angles mobiles, deux, se coupant sur la droite donnée, sont proportionnels; les deux autres systèmes étant, d'après (170, 5°), respectivement proportionnels aux deux systèmes qui se coupent sur la droite donnée, il en résulte que les quatre systèmes sont proportionnels; de là et de (216) on déduit facilement la propriété énoncée.

229.— Proposition.— « *Quand on a dans un plan deux figures semblables, mais non semblablement placées, les droites menées arbitrairement par un point de la première rencontrent respectivement leurs homologues dans la seconde en des points situés sur une conique.* » (M. Chasles, p. 337. *Mémoires couronnés*, tom. XI.)

Démonstration. — Les droites menées arbitrairement par un point de la première figure et leurs homologues dans la seconde, constituent deux systèmes de polaires qui sont proportionnels, comme ayant leurs angles respectivement égaux. Donc, ces deux systèmes se coupent sur une section conique passant par leurs pôles, c'est-à-dire par les deux points d'où partent les deux séries de droites homologues.

230. — Proposition. — *Si deux angles, de grandeur constante, tournent autour de leurs sommets de manière que le point d'intersection de deux de leurs côtés parcoure une section conique passant par leurs sommets, les trois autres points d'intersection des côtés de ces angles décriront, chacun en particulier, une section conique passant aussi par les deux sommets.*

Démonstration. — Des quatre systèmes de polaires décrits par les côtés des deux angles mobiles, deux, se coupant sur une section conique passant par leurs pôles (les deux sommets), sont proportionnels, et les

Digitized by Google

deux autres systèmes étant, d'après (170, 5°), respectivement proportionnels aux deux systèmes qui se coupent sur la conique, il s'ensuit que les quatre systèmes sont proportionnels. Maintenant, il suffit de conclure que, de ces quatre systèmes, deux quelconques qui n'ont pas même pôle se coupent sur une section conique passant par leurs pôles.

231. — Proposition. — *Si, dans un triangle variable, l'angle opposé à la base tourne autour de son sommet sans changer de grandeur, tandis que la base tourne autour d'un point fixe, et que l'un des sommets à la base décrit une ligne droite, l'autre sommet à la base décrira une section conique passant par le sommet et le point fixes.* (Propriété énoncée sous une forme différente par M. Poncelet, p. 275).

Démonstration. — Il ressort de (170, 5°, 10° et 174, corol. IV), que les trois systèmes de polaires décrits par les deux côtés de l'angle de grandeur constante et par la base, sont proportionnels. Cela étant, il est facile de voir que la section conique mentionnée à l'énoncé est l'intersection de deux de ces trois systèmes de polaires. Donc, (216) etc.

232. — Proposition. — « *Si tous les sommets d'un polygone plan quelconque sont astreints à se mouvoir sur autant de droites fixes, données dans ce plan, tandis que tous ses côtés, un seul excepté, pivotent respectivement sur des points fixes, le côté libre et les diverses diagonales de ce polygone rouleront, par suite du mouvement général de la figure, sur des sections coniques distinctes, tangentes aux deux droites fixes qui dirigent le mouvement de ce côté ou de ces diagonales respectives.* » (M. Poncelet, p. 298).

Démonstration. — Tous les côtés de ce polygone, à l'exception du côté libre, décrivent des systèmes de polaires qui sont tous proportionnels (173, corol. III). Le côté libre et les diverses diagonales relient chacun deux des transversales (deux des droites fixes) de tous ces systèmes de polaires proportionnels. Donc, d'après (190, 3°), la proposition est démontrée.

De la propriété (182, corol. I) on déduira sans difficulté la proposition suivante :

233. — Proposition. — *Si tous les côtés d'un polygone tournent respectivement autour d'autant de points fixes, tandis que tous les sommets, un seul*

Digitized by Google

excepté, se meuvent chacun sur une section conique distincte, passant par les deux points fixes autour desquels tournent les deux côtés de ce sommet, le sommet libre décrira une section conique, passant par les deux points fixes autour desquels tournent les côtés du sommet libre; et il en est de même du point d'intersection de deux côtés quelconques, lequel décrira une section conique passant par les deux points fixes autour desquels tournent ces deux côtés.

234. — Application. — *Deux sections coniques, déterminées chacune par cinq points, ont deux points communs : on demande de construire, sans décrire ces courbes, les deux autres points qu'elles peuvent avoir de communs.*

Solution. — Soient p, p' les deux points communs aux deux sections coniques. Construisons le système de trois polaires, ayant pour pôle p et aboutissant aux trois autres points de la première conique; construisons aussi les trois points de rencontre de ces trois polaires avec la seconde conique (217, remarque). Cela fait, nous pouvons construire deux autres systèmes de trois polaires, ayant tous deux pour pôle p', et dont l'un coupe le système p sur la première conique, et l'autre sur la seconde. Ces deux systèmes, qui ont même pôle p', sont proportionnels, comme étant chacun proportionnels au système p. Maintenant, il ne reste plus qu'à chercher si les deux systèmes p' ont une ou deux paires de polaires correspondantes qui coïncident (210), auquel cas, chaque paire rencontrera l'une des deux coniques en un point qui appartiendra aussi à l'autre conique, et ce point que l'on construira d'après (217, remarque), satisfera à la question. Si, dans les deux systèmes p', il n'y a pas de polaires correspondantes qui coïncident, les deux sections coniques n'auront d'autres points communs que les deux points donnés p, p'.

235. — Application. — *Étant donnés deux polygones d'un même nombre de côtés, construire un troisième polygone qui soit inscrit au premier et circonscrit au second, ou bien :*

Construire un polygone dont les côtés passent respectivement et dans un ordre déterminé, par des points donnés et dont les angles se trouvent respectivement, dans un ordre également déterminé, sur des droites données.

Solution. — Pour le cas du second énoncé, il est facile de s'assurer : 1° que si l'on connaissait le premier côté du polygone demandé, on pour-

Digitized by Google

rait en construire successivement tous les autres; 2° que pour vérifier si un polygone, dont le premier côté est choisi au hasard, satisfait à la question, il faut vérifier si le dernier côté de ce polygone rencontre le premier côté sur la première droite fixe. D'après cela, si l'on imagine le lieu géométrique formé par le point d'intersection du premier et du dernier côté de tous les polygones que l'on peut essayer pour trouver celui qui convient, le point d'intersection de ce lieu géométrique avec la première droite fixe sera le point par lequel devra passer le premier côté du polygone demandé; et comme ce premier côté doit aussi passer par le premier point fixe, il sera entièrement déterminé. Pour connaître la nature du lieu géométrique dont il s'agit, il suffit de donner les premiers côtés de trois polygones seulement et de construire tous les autres côtés. On mettra ainsi en évidence autant de systèmes de trois polaires qu'il y a de points fixes, systèmes ayant respectivement pour pôles ces mêmes points fixes. Comme ces systèmes sont tels que le premier coupe le second sur la seconde droite fixe, que le second coupe le troisième sur la troisième droite fixe et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernier qui coupe le dernier sur la dernière droite fixe, il en résulte que tous ces systèmes de polaires sont proportionnels (373, corol. III), et que le premier et le dernier se coupent sur une conique passant par leurs pôles; le lieu géométrique dont il s'agit est donc une conique dont on construira, d'après (217), les points de rencontre avec la première droite fixe, et le problème pourra être considéré comme résolu.

236. — Théorème. — *Si trois droites* D, D′, D″ *sont proportionnelles, tout système de parallèles qui a pour transversale l'une d'entre elles* D, *rencontrera le système de droites qui relient les deux autres droites proposées sur une parabole ou sur une hyperbole.*

Démonstration. — En prenant pour ligne de terre une droite ayant même direction que le système de parallèles, on pourra considérer ces parallèles comme les projections verticales, et les droites qui relient *D′* et *D″* comme les projections horizontales d'autant de génératrices d'un paraboloïde hyperbolique ayant le plan horizontal de projection pour plan directeur. En effet :

En menant par les points de division de D' et de D'' des perpendiculaires à la ligne de terre, ces deux systèmes de perpendiculaires couperont respectivement le système de parallèles suivant deux droites d', d'' (184, corol.). Cela posé, les directrices du paraboloïde dont il s'agit sont les droites de l'espace (D', d'), (D'', d''); et la courbe mentionnée à l'énoncé n'est autre que la projection double de l'intersection de ce paraboloïde avec le plan bissecteur B. Donc, etc.

237. — Théorème. — *Étant données deux transversales proportionnelles* t, t' *dont l'une,* t, *appartient à un système de polaires, et l'autre,* t', *à un système de droites respectivement parallèles à ces polaires, toutes ces droites, ainsi que leur transversale* t', *sont tangentes à une même parabole.*

Démonstration. — Le théorème est évident si les droites qui relient les deux transversales t, t' sont parallèles, c'est-à-dire si les deux transversales ont un point correspondant commun; car, dans ce cas, les droites, respectivement parallèles aux polaires sont les projections horizontales des génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique (70); et, d'après (35), ces droites, ainsi que leur transversale t', sont tangentes à une même conique, laquelle, ne pouvant avoir deux tangentes parallèles, est nécessairement une parabole.

Dans le cas où les deux transversales proportionnelles n'ont pas de point correspondant commun, il est facile de voir que la construction de la courbe mentionnée à l'énoncé reste la même si l'on transporte parallèlement à lui-même le système de polaires avec sa transversale t, de manière qu'un point de celle-ci aille coïncider avec le point correspondant de t'. Et comme la propriété énoncée existe pour cette position du système de polaires, elle existe également pour la position primitive du même système. Donc, etc.

Eu égard à (175, corol. II), le théorème précédent donne :

Corollaire. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels, si l'on coupe l'un des deux par une transversale quelconque, et si, par le point de rencontre de chaque polaire avec cette transversale, on mène une droite parallèle à la polaire correspondante de l'autre système, toutes ces droites, ainsi que la transversale, seront tangentes à une même parabole.*

Digitized by Google

Proposition. — *Si le sommet d'un angle, de grandeur invariable, se meut sur une droite fixe* D, *tandis que le premier côté de l'angle tourne autour d'un point fixe, le second côté sera, dans toutes ses positions, tangent à une même parabole.*

Démonstration. — Si, dans chaque position du premier côté de l'angle, on mène par le point fixe une parallèle au second côté, toutes ces parallèles formeront (170, 2°) un système de polaires proportionnel au système formé par le premier côté; et si maintenant on considère la droite *D* comme transversale du système de polaires décrit par le premier côté, on aura toutes les circonstances du corollaire qui précède.

238. — **Théorème.** — *Dans toute section conique, un système de diamètres, respectivement conjugués aux directions d'un système de polaires* p, *constitue un système de polaires proportionnel au système* p.

Démonstration. — Il suffit de remarquer qu'un système de diamètres et leurs conjugués sont deux systèmes de polaires proportionnels entre eux et à tout système de polaires parallèle à l'un d'eux.

Proposition I. — *Si un nombre quelconque de cordes d'une section conique donnée passent par un point fixe* p, *les milieux de toutes ces cordes se trouvent sur une autre section conique passant par ce point fixe et par le centre* p′ *de la section conique donnée.*

En effet, ces cordes forment un système de polaires p et les diamètres de la section conique respectivement conjugués à ces cordes (c'est-à-dire les diamètres qui passent respectivement par les milieux de ces cordes) forment un système de polaires p' proportionnel au système p; or, l'intersection de ces deux systèmes, qui est une conique passant par les deux pôles p, p', est précisément le lieu géométrique des points milieux de toutes les cordes. Donc, etc.

Puisque l'ensemble de deux droites est une section conique, on a :

Proposition II. — *Si l'on coupe un système de polaires par deux transversales quelconques, les milieux de toutes les portions de polaires comprises entre ces transversales sont situés sur une hyperbole passant par le pôle du système de polaires et par le sommet des deux transversales.*

Démonstration directe. — Tout se réduit à démontrer que, en joignant

Digitized by Google

le sommet des deux transversales avec le milieu de chaque portion de polaire comprise entre ces transversales, on a un second système de polaires proportionnel au système proposé. Or, en menant, par un point pris sur l'une des deux transversales, des droites respectivement parallèles aux polaires du système proposé, on aura un troisième système de polaires proportionnel au proposé (170, 3°) et au second, car il coupera le second, comme il est facile de le démontrer, sur une droite parallèle à l'autre transversale. Il en résulte (175, corol. IV) que le premier et le second système sont proportionnels, et comme ils ont deux paires de polaires correspondantes respectivement parallèles aux deux transversales, ils se coupent sur une hyperbole, qui est celle de l'énoncé.

239. — Étant donnés, sur un plan, deux sections coniques et un système de polaires π, si, par le centre de chacune de ces coniques, on mène les diamètres respectivement conjugués aux directions des polaires π; ces deux systèmes de diamètres formeront, d'après (238 et 175, corol. IV), deux systèmes de polaires qui seront proportionnels et qui se couperont sur une troisième section conique passant par leurs pôles, centres des deux premières coniques. D'où l'on déduit les propositions connues qui suivent :

Proposition I. — *Dans deux sections coniques tracées sur un même plan, le lieu géométrique des points de concours des diamètres conjugués à une même direction variable, est une troisième section conique passant par les centres des deux sections coniques proposées.*

Si les deux coniques proposées se coupent en quatre points, elles ont dès lors six cordes communes; la troisième conique, devant passer par les milieux de ces six cordes, est entièrement déterminée, puisque les milieux des six cordes se réduisent au *minimum* à cinq, dans le cas où les quatre points communs aux deux sections coniques se trouvent être les sommets d'un parallélogramme; et comme les centres des deux coniques proposées doivent se trouver sur la troisième conique, il en résulte cette autre proposition connue :

Proposition II. — *Le lieu géométrique des centres de toutes les sections coniques que l'on peut mener par quatre points, est également une section conique.*

Digitized by Google

Et puisque le lieu des centres de toutes ces sections coniques est unique, il en résulte cette nouvelle proposition, due à M. Lamé :

Proposition III. — *Lorsque plusieurs sections coniques ont quatre points communs, leurs diamètres conjugués à des diamètres parallèles, ou conjugués à une même direction, concourent tous en un même point.*

Dans un quadrilatère, on peut considérer les deux diagonales et les deux paires de côtés opposés comme représentant trois sections coniques ayant en commun les quatre sommets du quadrilatère. En appliquant à ces trois sections coniques l'énoncé précédent, on en déduit la proposition suivante énoncée en ces termes par M. Chasles, *Géom.*, p. 252 :

Proposition IV. — « *Une transversale étant tracée dans le plan d'un quadrilatère, la droite menée du point de concours de deux côtés opposés au point milieu du segment intercepté sur la transversale entre ces deux côtés; la droite menée semblablement du point de concours des deux autres côtés au point milieu du segment compris sur la transversale entre ces deux côtés; et, enfin, la droite menée du point de rencontre des deux diagonales au point milieu du segment compris entre ces deux côtés; ces trois droites, dis-je, passent par un même point.* »

240. — Application. — *Construire les diamètres conjugués parallèles de deux sections coniques tracées sur un même plan.*

Solution. — Si, dans chaque section conique, l'on construit trois diamètres au moins, respectivement conjugués à des directions quelconques données, ces deux systèmes de diamètres, deux à deux conjugués à une même direction, forment deux systèmes de polaires proportionnels, dont on construira, d'après (211), la paire ou les deux paires de polaires correspondantes qui sont parallèles; chaque paire, se composant de deux diamètres parallèles, dont les conjugués le sont également, la question se trouve résolue.

241. — Application. — *Par un point donné, mener une normale à une section conique.*

Solution. — Abaissons du point donné une perpendiculaire à une tangente quelconque, et soit x le point de rencontre de la perpendiculaire avec le diamètre mené au point de contact. Lorsque le point x, variable de position d'une tangente à l'autre, viendra se placer sur la conique, il

Digitized by Google

sera le pied de la normale (voir *Propriétés projectives* de M. Poncelet, p. 288), ce qui revient à dire que le pied de la normale est l'intersection de la conique avec le lieu géométrique décrit par le point x.

Pour déterminer ce lieu, remarquons que la perpendiculaire à la tangente est aussi perpendiculaire au diamètre conjugué de celui qui passe par le point de contact. Donc, la construction d'un point du lieu demandé est ramenée à ceci : par le point fixe donné, ayant mené une perpendiculaire sur un diamètre quelconque, le conjugué de ce diamètre rencontrera la perpendiculaire en un point x du lieu cherché.

On voit sur-le-champ que si l'on répète cette construction pour déterminer d'autres points x, on aura trois systèmes de polaires, formés comme il suit : le premier, par un système de diamètres; le second, par les perpendiculaires abaissées sur les diamètres précédents ; enfin, le troisième, par les diamètres respectivement conjugués aux diamètres du premier système. Le lieu demandé est précisément l'intersection des deux derniers systèmes; or, les trois systèmes sont proportionnels (170, 4° et 182, corol. II) ; donc, le lieu, intersection des deux derniers systèmes, est une section conique qui passe par leurs pôles, c'est-à-dire par le point donné et par le centre de la section conique donnée. D'un autre côté, on s'assurera facilement que les deux derniers systèmes ont leurs polaires rectangulaires correspondantes respectivement parallèles ; donc, le lieu demandé est une hyperbole équilatère, dont les points d'intersection avec la conique proposée sont les pieds de la normale demandée.

242. — Application. — *Construire une droite qui rencontre quatre droites données dont deux quelconques ne sont pas dans un même plan;*

Construire le point de rencontre d'une droite avec un hyperboloïde à une nappe.

Ces deux problèmes peuvent facilement être ramenés au suivant :

Construire les génératrices communes à deux hyperboloïdes à une nappe h, h′, *qui ont deux directrices communes.* (V. *Géom.* de M. Steiner, p. 245, 4°).

Solution. — En prenant les deux plans de projection respectivement perpendiculaires aux deux directrices communes, une de ces directrices se projettera en un point p sur le plan horizontal, et l'autre en un point p' sur le plan vertical. Soient T, T', les deux projections de la troisième

Digitized by Google

directrice du premier hyperboloïde et t, t', les deux projections de la troisième directrice du second hyperboloïde.

Parmi toutes les génératrices ayant, deux à deux, la même projection horizontale et appartenant respectivement aux deux hyperboloïdes h, h', il s'agit de trouver celles qui ont, de plus, la même projection verticale. Ces deux génératrices se confondent évidemment en une seule, qui appartiendra à la fois aux deux hyperboloïdes. Pour cela, on commencera par construire trois génératrices quelconques de chaque hyperboloïde qui aient respectivement mêmes projections horizontales.

La construction de ces génératrices mettra en évidence : 1° deux systèmes de polaires proportionnels $p\ T$, $p'\ T'$ (projections horizontales et verticales de trois génératrices de h); 2° deux autres systèmes de polaires proportionnels $p\ t$, $p'\ t'$ (projections horizontales et verticales de trois génératrices de h'). Or, les deux systèmes $p\ T$, $p\ t$ ne forment qu'un seul et même système; donc, les deux autres systèmes $p'\ T'$, $p'\ t'$ qui ont même pôle p' et dont chacun est proportionnel au système $p\ T$ ou $p\ t$ (170, 8°), sont proportionnels. Tout est ramené maintenant à construire, d'après l'art. (210), la paire ou les deux paires de polaires correspondantes qui coïncident dans les deux systèmes $p'T'$, $p't'$. Chaque paire de polaires correspondantes qui coïncident sera la projection verticale d'une génératrice commune aux deux hyperboloïdes, et il ne reste plus qu'à construire la projection horizontale de cette génératrice commune, ce qui est facile.

243. — Proposition. — *Si un angle droit tourne autour de son sommet, supposé fixe, de manière que ses deux côtés s'appuient respectivement sur deux droites fixes non situées dans un même plan, la droite qui relie à chaque instant les deux points de rencontre des côtés de l'angle avec les droites fixes, décrira un hyperboloïde à une nappe, dont ces droites fixes font également partie.* (V. *Géom.* de M. Steiner, p. 221, 8°).

Démonstration. — On fera voir, comme à l'article (264), que les deux côtés mobiles de l'angle droit décrivent, respectivement dans deux plans fixes, deux systèmes de polaires proportionnels. Ces deux systèmes de polaires divisent donc les deux droites fixes, prises pour transversales,

Digitized by Google

en parties perspectivement proportionnelles, et, par suite, les droites qui relient ces deux droites fixes constituent un hyperboloïde à une nappe (163) dont ces droites fixes font partie. Cette proposition est due à M. Poncelet, ainsi que le fait remarquer M. Steiner.

244. — Nous laissons à démontrer la proposition et à résoudre le problème ci-après :

Proposition. — *Une droite qui se meut tangentiellement à un cylindre du second degré, de manière à s'appuyer sur deux droites fixes, non situées dans un même plan et tangentes au cylindre, engendre un hyperboloïde à une nappe.*

Problème. — *Étant données trois tangentes de chacune des deux sections coniques, plus deux tangentes communes à ces courbes, construire, s'il y a lieu, les deux autres tangentes communes.*

TROISIÈME SECTION

TRAITANT DE SYSTÈMES DE PLANS POLAIRES ET DE SYSTÈMES DE POLAIRES DANS L'ESPACE.

245. — Définition. — Nous entendons par système de plans polaires, un ensemble de plans passant par une même droite, laquelle est nommée axe du système.

246. — La transversale d'un système de plans polaires est une droite qui rencontre tous ces plans.

247. — Un système de plans polaires est coupé par un plan quelconque, non parallèle à l'axe, suivant un système de polaires qui a pour pôle le point de rencontre de ce plan avec l'axe.

248. — Un système de polaires et sa projection orthogonale sur un plan quelconque constituent deux systèmes de polaires proportionnels; car, en prenant pour transversale du second système, la projection d'une trans-

Digitized by Google

versale quelconque du premier système, ces deux transversales seront toujours proportionnelles.

249. — Toutes les sections faites dans un système de plans polaires par des plans quelconques non parallèles à l'axe de ce système, sont autant de systèmes de polaires proportionnels; car tous ces systèmes ont même projection orthogonale sur un plan quelconque perpendiculaire à l'axe (248).

D'où l'on déduit facilement que deux transversales quelconques d'un même système de plans polaires sont proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, selon qu'elles sont toutes deux parallèles ou non parallèles à l'un de ces plans.

250. — Définition. — *Deux systèmes de plans polaires sont dits proportionnels, lorsqu'en les coupant par un plan quelconque rencontrant les deux axes, on obtient toujours pour sections deux systèmes de polaires proportionnels.*

De cette définition et de l'article précédent, on déduit que :

1° *Deux systèmes de plans polaires sont proportionnels lorsqu'on peut les couper par un seul plan, ou respectivement par deux plans, suivant deux systèmes de polaires proportionnels.*

Car (d'après 249 et 175 corol. III), un plan quelconque coupera ces deux systèmes de plans, suivant deux systèmes de polaires proportionnels;

2° *Deux systèmes de plans polaires sont proportionnels, lorsqu'ils ont des transversales proportionnelles ou perspectivement proportionnelles;*

Car, en coupant chaque système de plans polaires par un plan conduit suivant la transversale de ce système, on aura évidemment deux systèmes de polaires proportionnels.

251. — Théorème. — *Deux systèmes de plans polaires proportionnels se coupent sur un hyperboloïde à une nappe passant par les axes de ces deux systèmes.*

Si les axes se rencontrent en un point, l'hyperboloïde devient un cône du second degré ayant pour sommet ce point de rencontre.

Si les axes sont parallèles entre eux, l'hyperboloïde dégénère en cylindre du second degré dont les génératrices rectilignes sont parallèles à ces axes.

Démonstration. — En coupant chacun des deux systèmes de plans polaires proportionnels par un plan de projection perpendiculaire à son axe, on obtiendra deux systèmes de polaires proportionnels, dont deux

polaires correspondantes quelconques sont les projections de la droite d'intersection de deux plans polaires correspondants. Donc (d'après 185 et 186) la propriété est démontrée.

Remarque. — Pour prouver que la droite d'intersection de deux plans tournant respectivement autour de deux axes, engendre un hyperboloïde à une nappe, passant par ces axes, il suffira, d'après (250, 1°), de prouver que les traces horizontales ou verticales des deux plans mobiles, ou bien que la trace horizontale de l'un et la trace verticale de l'autre décrivent deux systèmes de polaires proportionnels.

Corollaire. — Si les deux systèmes de plans polaires proportionnels ont deux paires de plans polaires correspondants parallèles, leurs axes sont également parallèles et deux plans polaires correspondants quelconques se coupent suivant une droite parallèle à ces axes. De plus, si on coupe les deux systèmes par un plan quelconque rencontrant ces deux axes, on obtiendra deux systèmes de polaires proportionnels, ayant deux paires de polaires correspondantes parallèles et se coupant sur une hyperbole. D'où il est facile de conclure que :

1° *Deux systèmes de plans polaires proportionnels, ayant deux paires de plans polaires correspondants parallèles, ont leurs axes parallèles et se coupent sur un cylindre hyperbolique dont les génératrices rectilignes sont parallèles à ces axes, lesquels sont eux-mêmes des génératrices de ce cylindre;*

2° *Deux systèmes de plans polaires proportionnels dont les axes ne sont pas parallèles, ne peuvent avoir plus d'une paire de plans polaires correspondants parallèles.*

Car leurs axes, dans le cas contraire, seraient parallèles.

252. — Théorème. — *Deux systèmes de plans polaires proportionnels, ayant une paire de plans polaires correspondants parallèles, se coupent sur un paraboloïde hyperbolique dont un des deux plans directeurs est parallèle aux deux plans polaires correspondants parallèles.*

Démonstration. — Si l'on coupe chacun des deux systèmes de plans polaires proposés par un plan de projection perpendiculaire à son axe, on aura deux systèmes de polaires proportionnels dont deux polaires correspondantes sont perpendiculaires à la ligne de terre, si l'on remar-

Digitized by Google

que que les deux plans polaires correspondants parallèles sont chacun perpendiculaire à cette ligne de terre; donc (d'après 188), ces deux systèmes de polaires représentent un paraboloïde hyperbolique, et, par suite, les deux systèmes de plans polaires proposés se coupent sur ce paraboloïde.

253. — Théorème. — *Tout hyperboloïde à une nappe peut être considéré comme le lieu géométrique des intersections d'une infinité de deux systèmes de plans polaires proportionnels. Il en est de même du paraboloïde hyperbolique.*

Démonstration. — Soient prises, sur l'hyperboloïde, trois génératrices quelconques d'un même mode. Si l'on fait tourner deux plans respectivement autour de deux de ces génératrices prises pour axes, de manière que ces plans rencontrent sans cesse la troisième génératrice en un même point, il est visible que la droite d'intersection de ces plans rencontrera constamment les trois génératrices et engendrera ainsi l'hyperboloïde proposé.

Or, il est facile de voir que les deux plans mobiles décrivent deux systèmes de plans polaires proportionnels, car, si par la troisième génératrice on mène un plan quelconque qui rencontre les deux axes, ce plan coupera les deux systèmes de plans proposés suivant deux systèmes de polaires qui se coupent sur cette même génératrice et qui sont, par suite, proportionnels; donc, (150, 1°), etc. Et puisque les trois génératrices mentionnées plus haut sont tout à fait arbitraires, il en résulte que l'hyperboloïde est le lieu géométrique des intersections d'une infinité de deux systèmes de plans polaires proportionnels.

Corollaire I. — De ce théorème on déduit facilement la réciproque suivante du théorème (251) :

Si deux systèmes de plans polaires se coupent sur un hyperboloïde à une nappe, ces deux systèmes sont proportionnels et leurs axes font toujours partie de cet hyperboloïde.

Corollaire II. — En coupant deux systèmes de plans polaires proportionnels par un plan qui rencontre leurs axes, on obtient deux systèmes de polaires proportionnels se coupant sur une section conique qui appartient visiblement à l'hyperboloïde à une nappe sur lequel se coupent les

Digitized by Google

deux systèmes de plans polaires proportionnels proposés. De là, on conclut que :

Toute section plane d'un hyperboloïde à une nappe ou d'un paraboloïde hyperbolique, est une section conique ou courbe du second degré.

254. — Proposition. — *Si deux plans tournent respectivement autour de deux droites fixes, de manière à être respectivement parallèles à deux diamètres variables mais conjugués d'une même section conique, la droite d'intersection des deux plans mobiles décrira un hyperboloïde à une nappe passant par les droites fixes.* (Proposé par M. Steiner. V. *Géom.*, n° 21, p. 301.)

Démonstration. — Les traces des deux plans mobiles décrivent, sur le plan de la section conique donnée, deux systèmes de polaires qui sont proportionnels (170, 9°) comme étant respectivement parallèles aux deux systèmes de polaires proportionnels décrits par les deux diamètres conjugués (182, corol. II). Donc, selon (251, remarque), le théorème se trouve démontré.

255. — Proposition. — *Si deux plans tournent respectivement autour de deux droites fixes de manière à se couper constamment à angle droit, leur intersection décrira un hyperboloïde à une nappe passant par les droites fixes.*

Démonstration. — En prenant pour plan horizontal de projection un plan quelconque perpendiculaire à l'une des deux droites, l'un des deux plans mobiles sera vertical et les traces horizontales des deux plans mobiles se couperont toujours à angle droit, puisque deux plans perpendiculaires entre eux, dont l'un est vertical, ont toujours leurs traces horizontales perpendiculaires. Les traces des deux plans mobiles décrivent donc deux systèmes de polaires proportionnels (170, 4°). Donc, (251, remarque), le théorème est démontré.

256. — Des articles (250, 2°) et (251) résulte immédiatement cette proposition :

Proposition. — *Deux droites de l'espace étant divisées en parties proportionnelles, ou en parties perspectivement proportionnelles, si deux plans tournent chacun autour d'un axe fixe de manière à rencontrer respectivement les droites données en deux points correspondants, l'intersection des deux plans mobiles décrira un hyperboloïde à une nappe passant par les deux axes fixes.*

Digitized by Google

257. — Proposition. — *Étant donnés deux coins, de grandeur invariable, si l'on fait tourner chacun d'eux autour de son arête, de manière que l'intersection d'une face de l'un avec une face de l'autre s'appuie constamment sur une droite fixe de l'espace, cette intersection décrira un hyperboloïde à une nappe passant par les deux arêtes, et les trois autres droites d'intersection des faces des deux coins décriront, chacune séparément, un hyperboloïde à une nappe passant par les deux mêmes arêtes.* (Proposé par M. Steiner. V. *Géom.*, n° 17, p. 299.)

Démonstration. — D'abord, les deux faces de chaque coin décrivent deux systèmes de plans polaires proportionnels ayant même axe, par la raison que les traces de ces faces sur un plan perpendiculaire à l'arête de ce coin, décrivent deux systèmes de polaires proportionnels (170, 5°), car l'angle de ces traces, mesurant l'ouverture constante du coin, ne varie pas de grandeur dans le mouvement de ce dernier. D'un autre côté, les deux faces dont l'intersection décrit, d'après l'énoncé, un hyperboloïde à une nappe, décrivent aussi deux systèmes de plans polaires proportionnels (253 corol. I). De ce qui précède, il est facile de conclure que les quatre systèmes de plans polaires, décrits par les quatre faces des deux coins, sont tous proportionnels entre eux et que deux quelconques de ces systèmes, qui n'ont pas même axe, doivent se couper sur un hyperboloïde à une nappe. Donc, etc.

258. — Proposition. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels situés dans deux plans différents, si, par un point de l'espace, on mène des droites dont chacune rencontre deux polaires correspondantes, toutes ces droites appartiendront à un même cône du second degré, ayant pour sommet le point donné.* (V. *Géom.* de M. Steiner, II, p. 183.)

Démonstration. —Le système de plans polaires que l'on mènera par le point donné et par les polaires du premier système est proportionnel à celui des plans polaires que l'on mènera par le point donné et par les polaires du second système (250, 1°). Et comme les axes de ces deux systèmes de plans polaires se rencontrent au point donné, il résulte de (251) que deux plans polaires correspondants quelconques se coupent sur un même cône du second degré ayant pour sommet le point donné. Or, chaque droite d'intersection de deux plans polaires correspondants passe

Digitized by Google

par le point donné et rencontre deux polaires correspondantes. Donc, etc.

259. — PROPOSITION. — *Étant donnée une section conique rencontrée par deux droites fixes non situées dans un même plan, si une troisième droite se meut de manière à s'appuyer à la fois sur les deux premières et sur la section conique, elle engendrera un hyperboloïde à une nappe, passant par les deux droites fixes et par la section conique.*

DÉMONSTRATION. — Si l'on fait tourner deux plans respectivement autour des deux droites fixes prises pour axes, de manière que pour chacune de leurs positions les traces de ces deux plans sur celui de la section conique se coupent sur cette courbe, ces traces décriront deux systèmes de polaires proportionnels (182); donc, (251, remarque) les deux plans se coupent sur un hyperboloïde à une nappe satisfaisant à l'énoncé.

260. — THÉORÈME. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels ayant même pôle, si l'on prend une ligne de terre quelconque passant par le pôle commun, et que l'on considère les polaires d'un système comme les traces horizontales et les polaires correspondantes de l'autre système comme les traces verticales de plans de l'espace, tous ces plans, ainsi que les deux plans de projection, seront tangents à un même cône du second degré, ayant pour sommet le pôle commun.*

Autrement. — Si un plan mobile autour d'un point donné sur une ligne de terre, se meut de manière que ses traces sur les plans de projection décrivent respectivement deux systèmes de polaires proportionnels, le plan mobile, dans toutes ses positions, ainsi que les deux plans de projection, seront tangents à un même cône du second degré, ayant pour sommet le point donné.

DÉMONSTRATION. — Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que tous les plans mentionnés à l'énoncé sont coupés par un plan auxiliaire quelconque, suivant un système de droites tangentes à une même section conique.

Or, les deux traces du plan auxiliaire étant prises pour transversales respectives des deux systèmes de polaires proposés, ces transversales sont perspectivement proportionnelles et les droites qui les relient dans l'espace, l'un des plans de projection étant relevé dans sa vraie position, sont précisément les intersections du plan auxiliaire avec le système de plans proposés; et comme les droites qui relient les deux transversales

Digitized by Google

sont, ainsi que ces dernières, tangentes à une même conique (164), le théorème est démontré.

261. — La réciproque du théorème précédent est facile à démontrer et peut s'énoncer comme il suit :

Théorème. — *Deux plans tangents quelconques à un cône du second degré, sont coupés par tous les autres plans tangents à cette surface, suivant deux systèmes de polaires proportionnels.*

Autrement. — Deux plans tangents quelconques à un cône du second degré étant pris pour plans de projection, si un troisième plan se meut tangentiellement au même cône, ses deux traces décriront deux systèmes de polaires proportionnels, ayant pour pôle commun le sommet du cône.

262. — Proposition. — *Si d'un point quelconque on mène des plans perpendiculaires à toutes les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe, tous ces plans seront tangents à un même cône du second degré.* (M. Steiner, p. 234.)

Démonstration. — Si l'on prend pour plans de projection deux plans passant par le point donné et respectivement perpendiculaires à deux des trois directrices de l'hyperboloïde, les projections des génératrices de cette surface formeront deux systèmes de polaires proportionnels (170, 7°, 8°) et les traces horizontales et verticales de tous les plans perpendiculaires à ces génératrices formeront deux autres systèmes de polaires également proportionnels, comme ayant leurs polaires respectivement perpendiculaires à celles des deux premiers systèmes (170, 4°); (car le principe, si une droite est perpendiculaire à un plan, ses deux projections orthogonales le sont respectivement aux traces du plan, est indépendant de l'angle que font les deux plans de projection.) Donc (260) etc.

Remarque. — Le même théorème existe pour un cône du second ordre, et se démontre de la même manière.

263. — Proposition. — *Tous les plans menés par un même point de l'espace, et dont chacun est parallèle à deux polaires correspondantes de deux systèmes de polaires proportionnels, situés dans deux plans différents, sont tangents à un même cône du second degré ayant pour sommet le point donné.* (Proposé par M. Steiner. V. *Géom.*, n° 27, p. 303.)

Démonstration. — En prenant pour plans de projection deux plans

Digitized by Google

passant par le point donné et respectivement parallèles aux plans des deux systèmes de polaires proposés, on trouvera facilement que les traces horizontales et verticales de tous les plans satisfaisant aux conditions de l'énoncé, forment deux systèmes de polaires proportionnels, si l'on remarque que les traces horizontales sont respectivement parallèles aux polaires de l'un des deux systèmes proposés, et les traces verticales respectivement parallèles aux polaires de l'autre système. Donc, d'après (260), la propriété est démontrée.

264. — Proposition. — *Si les deux côtés d'un angle droit se meuvent respectivement dans deux plans fixes, tandis que le sommet reste en un point fixe de l'intersection de ces deux plans, le plan de l'angle, dans toutes ses positions, ainsi que les deux plans fixes, seront tangents à un même cône du second degré, ayant pour sommet le point fixe.* (V. *Géom.* de M. Steiner, n° 4, p. 219.)

Démonstration. — Les deux plans fixes étant pris pour plans de projection, les deux côtés de l'angle droit seront respectivement les traces horizontale et verticale de son plan. D'après (260), tout se réduit donc à démontrer que les deux côtés de l'angle décrivent deux systèmes de polaires proportionnels. Or, le côté qui se meut dans le plan horizontal, et la projection horizontale de l'autre côté, se coupant toujours à angle droit (en vertu du principe que les projections horizontales de deux droites perpendiculaires, dont l'une est dans le plan horizontal, sont perpendiculaires), décrivent deux systèmes de polaires proportionnels (170, 4°). De là, et de (248), il est facile de conclure qu'il en est de même des deux côtés. Donc, (260), etc.

265. — Proposition. — *Si, dans l'espace, on donne un point et deux droites proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, non situées dans un même plan, tous les plans dont chacun passe par le point donné et par une paire de points correspondants des deux droites proposées, sont tangents à un même cône du second degré, ayant ce point pour sommet et pour tangentes les deux droites données.*

Démonstration. — Si par chaque droite et le point donnés on mène un plan, et qu'on prenne ces deux plans pour plans de projections, les traces horizontales et verticales de tous les plans mentionnés à l'énoncé forment

Digitized by Google

respectivement deux systèmes de polaires de même pôle, lesquels sont proportionnels comme ayant leurs transversales proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, ces transversales étant les droites proposées. Donc (260), etc.

Puisque les droites qui relient deux droites proportionnelles constituent un paraboloïde hyperbolique et que celles qui relient deux droites perspectivement proportionnelles représentent un hyperboloïde à une nappe, il en résulte le corollaire suivant :

Corollaire. — *Tous les plans menés par un même point fixe et par chacune des génératrices d'un paraboloïde hyperbolique ou d'un hyperboloïde à une nappe sont tangents à un même cône du second degré.*

266. — Proposition. — *Deux plans tangents à un cône du second degré étant considérés comme fixes, si l'on assujettit une droite à s'appuyer sur deux autres droites fixes respectivement perpendiculaires à ces deux plans, et à être constamment perpendiculaire à un troisième plan tangent mobile, cette droite engendrera un hyperboloïde à une nappe.* (Proposé par M. Steiner. V. *Géom.* 29°, p. 303.)

Démonstration. — Les deux plans tangents fixes étant pris pour plans de projection, il en résulte que le sommet *s* du cône sera sur la ligne de terre, et que les deux droites fixes, respectivement perpendiculaires à ces deux plans de projection, s'y projetteront respectivement en deux points *p*, *p'*. D'après (261), les deux traces du plan tangent mobile décriront respectivement deux systèmes de polaires proportionnels, ayant pour pôle commun le sommet *s* du cône. D'un autre côté, les deux projections de la droite mobile décriront deux systèmes de polaires *p*, *p'*, respectivement proportionnels aux deux systèmes de polaires *s*; car les polaires des deux systèmes *p*, *p'* sont respectivement perpendiculaires à celles des deux systèmes *s*, en vertu de ce principe qu'une droite perpendiculaire à un plan a ses deux projections respectivement perpendiculaires aux traces de ce plan. Donc, (d'après 185), la droite mobile engendre un hyperboloïde à une nappe.

267. — Théorème [1]. — *La section faite dans deux systèmes de plans polaires*

[1] Ce paragraphe et les trois suivants ont été ajoutés au mémoire pendant l'impression.

Digitized by Google

proportionnels par un plan, mené suivant la droite d'intersection D de deux plans polaires correspondants quelconques, représente deux systèmes de polaires qui se coupent sur une ligne droite.

Démonstration. — La section dont il s'agit représente, en effet, deux systèmes de polaires proportionnels (250) dont les pôles sont aux points de rencontre de la droite D avec les axes des deux systèmes de plans polaires proposés. Et puisque le plan sécant passe par D, intersection de deux plans polaires correspondants, il coupe ceux-ci suivant deux polaires correspondantes qui coïncident de fait avec D. Donc les deux systèmes de polaires proportionnels ont deux polaires correspondantes qui coïncident avec leur ligne des pôles, et ces deux systèmes se coupent par conséquent sur une droite (183, coroll.).

Il serait facile de déduire de ce théorème la double génération de l'hyperboloïde à une nappe, double génération que nous avons supposée connue dans les deux premiers chapitres.

268. — Nous laissons au lecteur à démontrer le théorème suivant, ainsi que la proposition que l'on peut en déduire.

Théorème. — *Si un système de plans parallèles et un système de plans polaires sont proportionnels, ces deux systèmes se coupent sur un paraboloïde hyperbolique.*

Proposition. — *Les normales menées à un hyperboloïde à une nappe, par tous les points d'une même génératrice, constituent un paraboloïde hyperbolique droit.*

A l'occasion de ces deux énoncés, nous devons faire remarquer, comme nous aurions dû le faire à l'article (250), que :

Un système de plans parallèles et un système de plans polaires sont proportionnels lorsqu'en les coupant par un plan quelconque, le système de parallèles et le système de polaires que l'on obtient pour sections sont proportionnels (171, 1°). *De cette définition et de* (181) *on déduit facilement que :*

Un système de plans parallèles dont la transversale est proportionnelle, ou perspectivement proportionnelle à celle d'un système de plans polaires, sont deux systèmes proportionnels.

269. — Nous nous contenterons encore d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Deux systèmes de plans polaires proportionnels étant coupés respectivement par deux transversales, celles-ci sont proportionnelles ou perspectivement*

Digitized by Google

proportionnelles, selon qu'elles sont ou qu'elles ne sont pas respectivement parallèles à deux plans polaires correspondants.

270. — Remarque. — De la théorie des plans polaires proportionnels qui vient de nous occuper, et qui est exposée avec beaucoup de détail par M. Steiner, nous n'avons donné que ce qu'il fallait pour résoudre les quelques questions qui précèdent;

271. — Avant de terminer ce mémoire, nous croyons devoir faire remarquer que la théorie des systèmes de polaires proportionnels dont nous nous sommes occupés dans ce dernier chapitre a été traitée de main de maître, sous les dénominations de *faisceaux projectifs* et de *faisceaux homographiques,* par MM. Steiner et Chasles que nous avons eu plusieurs fois occasion de citer. Notre seul mérite a été d'arriver par des considérations de géométrie descriptive pure, à la démonstration des principaux théorèmes d'une théorie exigeant jusqu'ici la notion du rapport harmonique et anharmonique. Et, à cette occasion, nous ne pouvons nous empêcher de faire ressortir combien notre théorème (29) conduit à ce résultat d'une manière naturelle; car pour passer des deux premiers chapitres, qui ne renferment que des notions de géométrie descriptive pure, au troisième chapitre dont il s'agit, il nous a suffi de reconnaître que deux systèmes de polaires proportionnels peuvent toujours représenter un hyperboloïde à une nappe, et d'introduire ensuite l'idée de deux droites perspectivement proportionnelles.

Dans un prochain mémoire, où nous ferons connaître d'autres applications qui ressortent des propriétés des plans bissecteurs, nous définirons, par des considérations descriptives, deux systèmes de polaires en involution, en même temps que nous traiterons du double contact des sections coniques.

ERRATA ET OBSERVATIONS.

1° Dans l'article (35), après ces mots : *Bulletin de l'Académie,* ajoutez : tome XVIII, p. 41.

2° Nous ne sommes plus revenus, dans le dernier chapitre, sur deux

Digitized by Google

systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, parce que leurs propriétés avaient été exposées, quoique par des considérations différentes, dans la seconde section du second chapitre;

3° L'énoncé du théorème (29) doit être modifié comme il suit : Au lieu de ces mots : *dont le degré est égal à celui de la surface*, il faut lire : *dont le degré ne peut jamais être supérieur, mais bien égal ou inférieur à celui de la surface.*

Car on sait que, pour plusieurs surfaces d'un degré supérieur au second degré, certaines sections planes peuvent être d'un degré moindre que celui de ces surfaces;

4° Nous avons oublié, dans les articles (24), (25), (26) de faire remarquer, ce qui du reste est évident, qu'une droite perpendiculaire à la ligne de terre et située dans l'un des deux plans bissecteurs, est toujours perpendiculaire à l'autre. D'où il résulte *qu'un plan dont les deux traces sont en ligne droite sur l'épure est perpendiculaire au plan bissecteur B, et qu'un plan dont les traces sont également inclinées sur la ligne de terre est perpendiculaire au plan bissecteur B';*

5° Nous avons également oublié de dire à l'art. (171) que *deux systèmes de parallèles, à transversales perspectivement proportionnelles, étant coupés par deux autres transversales quelconques, celles-ci ne sont jamais proportionnelles;* car s'il en était autrement, les deux transversales proposées seraient également proportionnelles (171, 5°);

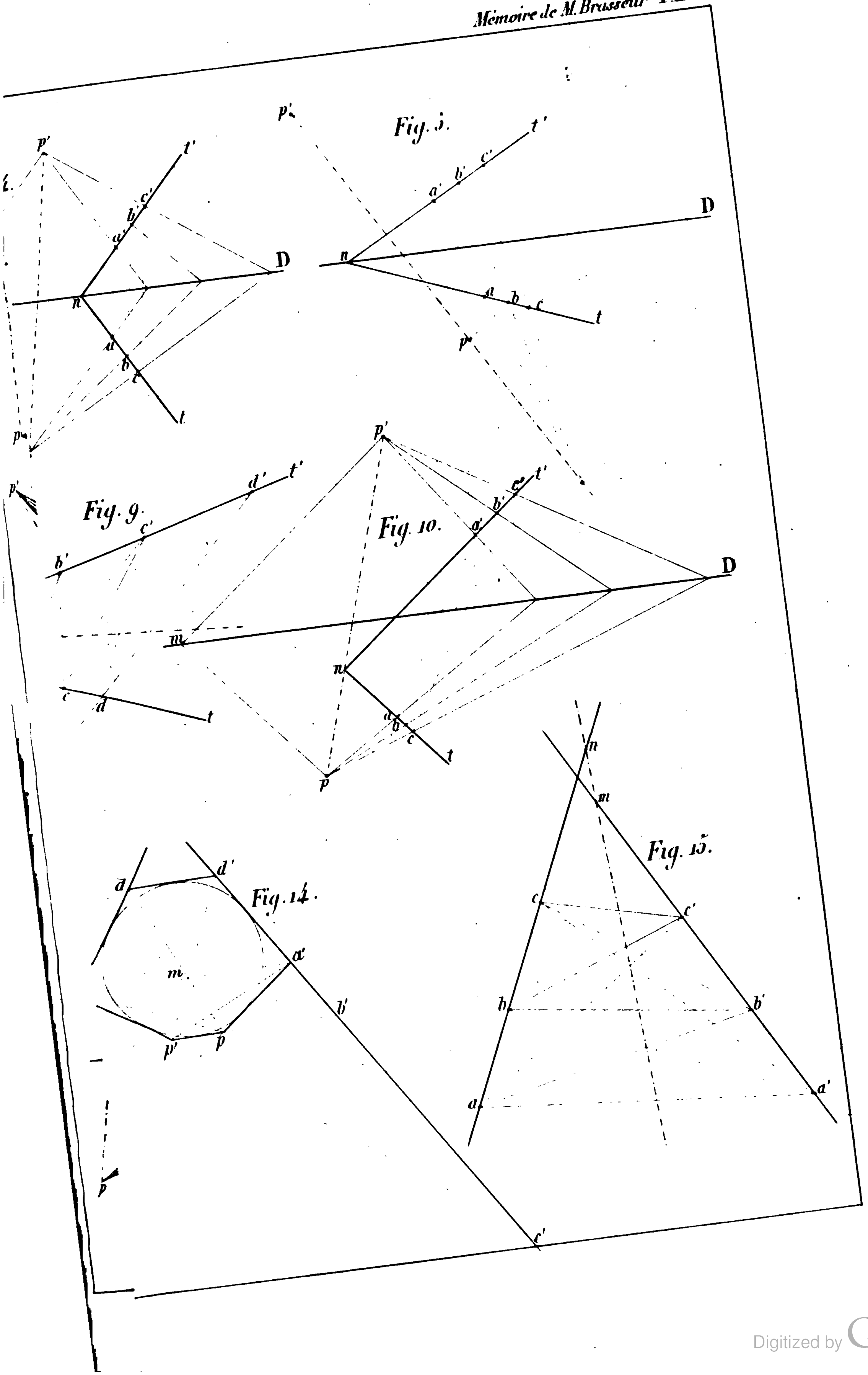
6° La propriété énoncée au corollaire de l'art. (237) est proposée par M. Steiner, comme question à résoudre. (V. *Géom.*, 24°, p. 302);

7° Les propriétés 1° et 2° de l'art. (190) appartiennent seulement à deux systèmes de polaires proportionnels ayant même pôle, lorsqu'ils ont deux polaires correspondantes qui coïncident, et que les deux transversales sont menées par un point de ces deux dernières;

8° Après le premier alinéa de l'art. (50), il faut ajouter ces mots : *et la droite qui unit ces deux points, est parallèle au plan bissecteur B'* (23, 3°).

FIN.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

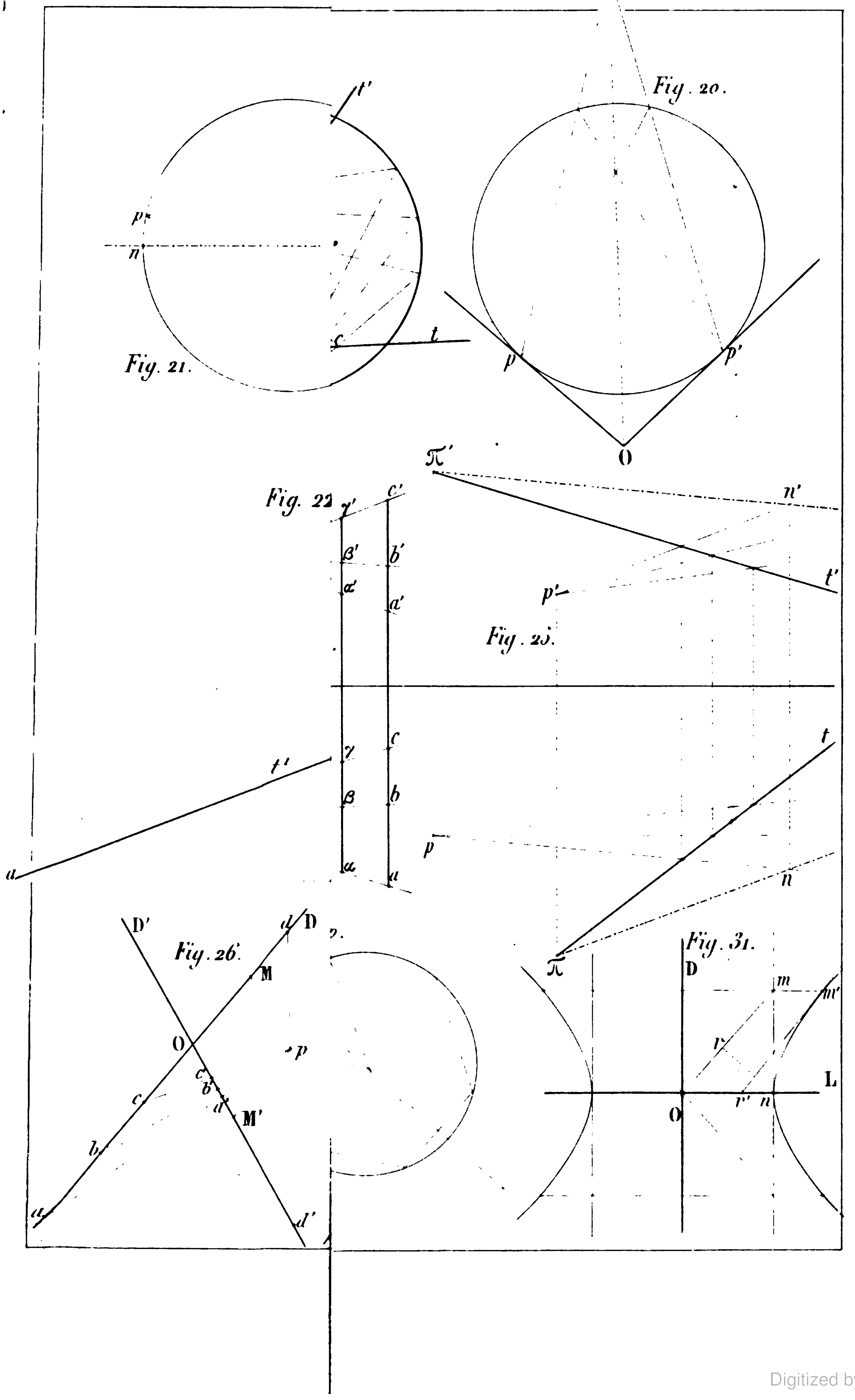


Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22
Fig. 23.
Fig. 26.
Fig. 31.

Digitized by Google

Fig. 34.

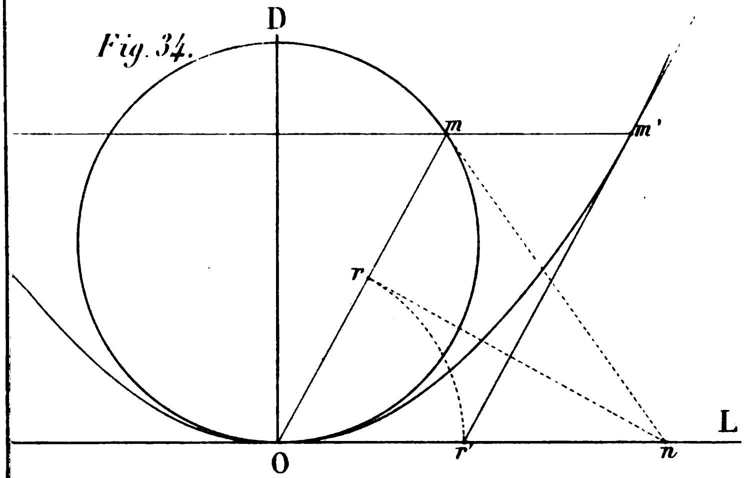
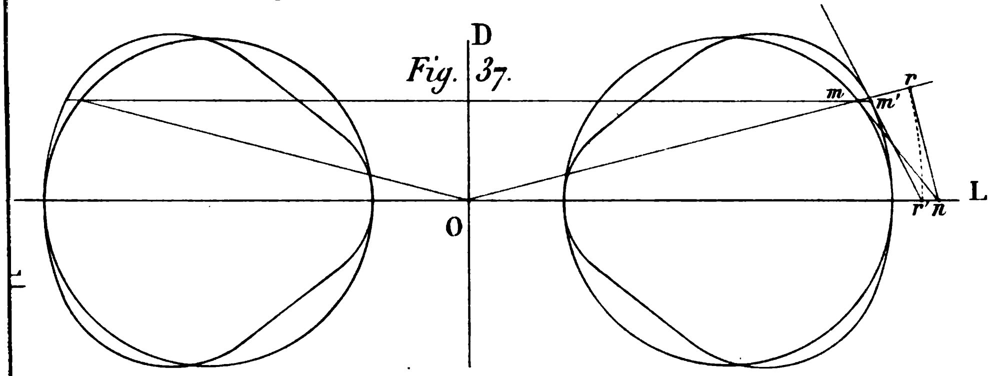


Fig. 37.



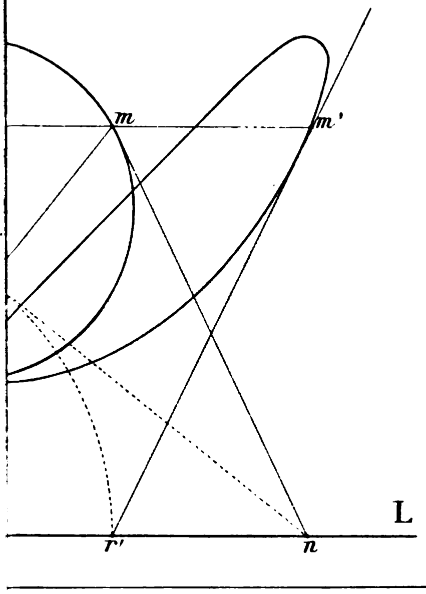
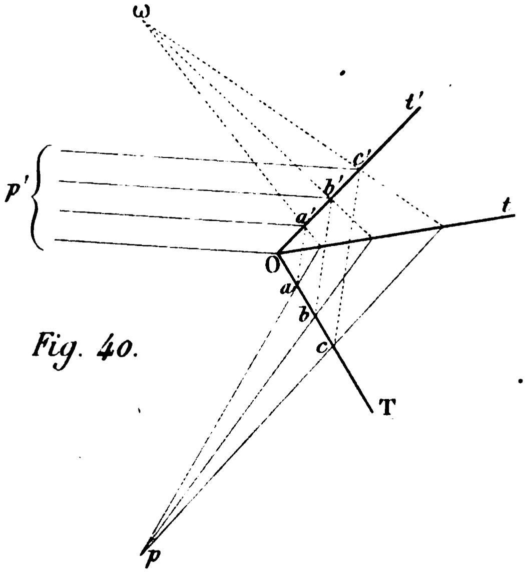


Fig. 40.



Digitized by Google

RECHERCHES

POUR SERVIR

A LA FLORE CRYPTOGAMIQUE

DES FLANDRES;

PAR

J. KICKX,

PROFESSEUR DE BOTANIQUE A L'UNIVERSITÉ DE GAND, MEMBRE DE L'ACADÉMIE, ETC.

(Présenté à l'Académie, en la séance du 8 mai 1855.)

CINQUIÈME CENTURIE.

Digitized by Google

Digitized by Google

AVANT-PROPOS.

En publiant cette cinquième centurie, nous terminons la série des recherches spéciales que nous avons entreprises sur la flore cryptogamique des Flandres.

Notre intention n'est pas d'abandonner des études qui, malgré les difficultés qu'elles présentent, ont toujours fait nos délices, et qui ont pris, en Belgique, une extension à laquelle il nous est permis de croire que nous n'avons pas été étranger. Mais il en est de la science comme de la société : chaque époque a des besoins nouveaux. Ce ne sont plus, en effet, les matériaux qui manquent aujourd'hui pour la confection d'une bonne flore cryptogamique de notre patrie; ce qu'il importe, c'est de les coordonner, d'en éliminer les erreurs, de signaler les doutes. Il semble donc que l'on devrait tendre dorénavant vers ce but plutôt que vers la découverte exclusive de nouvelles espèces indigènes.

La nécessité d'une pareille révision se fait surtout sentir depuis la publication d'un ouvrage récent où le nombre de nos Cryptogames a été notablement augmenté, mais qui laisse beaucoup à désirer sous plusieurs rapports et où l'on regrette de ne point trouver de trace de cette critique scientifique sans laquelle les flores locales perdent leur principale valeur. L'auteur aurait pu prendre pour modèle, le *Botanicum gallicum* de M. Duby;

Digitized by Google

mais il eût fallu le suivre moins à la lettre et tenir compte des vingt années qui s'étaient écoulées dans l'intervalle.

L'exécution du plan sur lequel nous appelons l'attention de nos botanistes deviendrait facile si chacun d'eux se chargeait de la revue de l'une ou de l'autre famille objet de sa prédilection. Déjà M. Westendorp, à qui notre flore cryptogamique a tant d'obligations, s'occupe d'un travail sur les Hypoxylées, et nous sommes heureux de pouvoir ajouter que notre honorable ami, M. le vicaire Eug. Coemans, celui de nos compatriotes qui connaît le mieux les Lichens, nous promet également une révision de cette famille.

De notre côté, nous tâcherons de fournir aussi notre contingent, et nous n'hésiterons pas à reconnaître des premiers les erreurs que nous aurions pu commettre, erreurs qui sont souvent inévitables, ainsi que le savent les hommes compétents.

Gand, 7 mai 1855.

Digitized by Google

RECHERCHES

POUR SERVIR

A LA FLORE CRYPTOGAMIQUE

DES FLANDRES.

CHARACÉES.

1. NITELLA INTRICATA Al. Braun. CHARA NIDIFICA β *polysperma* Rabenh. CHARA POLYSPERMA Al. Braun olim (*non* Kutz.) Kx., *Notice sur quelques espèces peu connues de la Flore belge,* pag. 7, n° 8.

Monoïque, de deux à trois décimètres de longueur. Verdure glauque, devenant grisâtre par la dessiccation. Verticilles ordinairement composés de sept à dix ramules allongés et atténués à leurs extrémités : les inférieurs très-distants, à ramules étalés, bifides ou trifides; les supérieurs rapprochés entre eux, à ramules trifides ou quinquefides, dont l'un est souvent divisé une seconde fois, redressés et réunissant leurs sommets autour des glomérules compactes, grands et ovales, que forment les rameaux raccourcis des verticilles fructifères. Anthéridies agrégées, situées au-dessus des fruits. Ceux-ci également agrégés, axillaires à la base des rameaux, ovoïdes, successivement blanchâtres, jaunes et bruns, transparents, mar-

Digitized by Google

qués de treize bandes spirales et surmontés d'une coronule courte et tronquée.

L'intervalle qui sépare les verticilles inférieurs est souvent de six à sept centimètres et dépasse toujours plus ou moins la longueur des ramules.

Dans les eaux claires et stagnantes, à Oostacker, près de Gand. Fin d'avril ou commencement de mai.

2. **NITELLA FLABELLATA** Kutz. Nitella flexilis γ *flabellata* Rabenh. *Deutschl. Krypt. flora.*, II, pag. 196.

Monoïque, de même taille, mais d'un vert assez foncé. Tiges trichotomes portant des verticilles de cinq ramules trifides, dont chaque segment est bifide ou trifide et mucroné à son sommet. Ramules du milieu de la tige habituellement plus longs que la moitié de la distance interverticillaire. Rameaux des verticilles fructifères plus minces que les autres, raccourcis et rapprochés en petits glomérules. Anthéridies le plus souvent agrégées au nombre de trois et insérées au-dessus des fruits, lesquels sont aussi agrégés, ovales, un peu allongés, marqués de sept bandes spirales et surmontés d'une coronule courte et obtuse.

Les dernières ramifications des ramules sont presque toutes trifides dans nos échantillons, tandis que dans ceux que nous devons à l'obligeance de M. le professeur Braun, elles sont généralement bifides.

Dans les eaux stagnantes, à Melle, près de Gand, d'où me l'a communiqué M. le professeur Scheidweiler. Été.

MOUSSES.

3. **BARTRAMIA ITHYPHYLLA** Brid. Bartramia pomiformis Wahl. *nec* Hedw. Bryum pomiforme Linn., *Flor. Lapp. et Suec.* — Ilgner, *Schlesiens Laubmoose,* pag. 19, n° 2.

Hermaphrodite. Tige raccourcie, rameuse, feuilles d'un vert un peu glauque, rigides, droites-étalées; les caulinaires à base élargie et vagi-

Digitized by Google

nante, puis brusquement réfractées et rétrécies, régulièrement subulées à partir du sommet de la gaîne, denticulées de distance en distance, munies d'une nervure large et épaisse qui forme à elle seule leur tiers supérieur; les périchætiales conformes, mais moins subitement rétrécies et non réfractées, ce qui les fait ressembler beaucoup aux feuilles caulinaires de la *Bartramia vulgaris*. Pédicule roide, jaune, devenant rougeâtre. Urne insérée obliquement, se penchant un peu, sillonnée. Opercule largement conique, obtus.

Forme des touffes moins grandes et moins compactes que la *Bartramia vulgaris* Dec., laquelle d'ailleurs est monoïque. Les feuilles sont beaucoup plus longues, plus subulées : elles jaunissent très-peu en se desséchant, et, dans nos échantillons, elles ont plutôt pris une teinte roussâtre due peut-être à la nature du sol. La dessiccation ne les rend ni flexueuses ni courbées, comme celles de leur congénère : toutefois, MM. Dozy et Molkenboer, font observer avec raison [1] que ce caractère peut induire en erreur, parce que l'espèce commune présente quelquefois aussi, par exception, des feuilles droites.

Le *Bryum pomiforme* de Linné est rapporté par quelques auteurs à la plante que nous venons de décrire et par d'autres à la *Bartramia vulgaris*. Aucun de ces rapprochements ne saurait, nous semble-t-il, être admis sans restriction. Nous sommes convaincu que le *Bryum pomiforme* de la flore de Laponie et de la flore de Suède est bien réellement la *Bartramia ithyphylla :* mais nous croyons que, dans les *Species plantarum* et dans le *Systema naturae,* il y a sous le même nom confusion des deux espèces.

Dans les endroits ombragés et montueux, au pied des bancs de grès ferrugineux, près de Renaix. Juin.

4. BRYUM PALLENS Sw. HYPNUM PALLENS Web. — Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XXXIX, n° 1921.

Dioïque, lâchement touffu, rameux, à rameaux grêles, plus ou moins allongés, inférieurement radiculeux. Feuilles caulinaires espacées, semi-

[1] *Prodromus florae batavae*, t. II, p. 42.

amplexicaules, décurrentes, ovales-acuminées, légèrement serrulées vers le sommet, étroitement marginées, enroulées un peu par leur bord à la base, parcourues par une nervure plus ou moins pourprée, qui est saillante : les périchætiales plus longues, plus étroites, un peu flexueuses. Pédicule allongé, très-délicat, d'abord jaune rougeâtre, puis pourpre. Urne successivement jaunâtre, jaune sale et brunâtre, lisse, obovale-pyriforme, atténuée vers le bas, un peu courbée ou gibbeuse d'un côté, quand elle est complétement mûre, quelquefois un peu resserrée sous le péristome, penchée ou pendante. Dents du péristome interne séparées par des cils solitaires, mais qui sont bifurqués ou plus rarement trifurqués à leur partie inférieure. Opercule conique, courtement acuminé et luisant.

Voisin du *Bryum inclinatum* [1], dont il est cependant distinct. Nous avons longtemps conservé des doutes au sujet de cette Mousse, qui nous paraissait être propre, d'après les auteurs, aux pays de montagnes, et c'est pour cela que nous l'avions omise dans nos précédentes publications. Ces doutes se trouvent levés aujourd'hui par l'autorité de MM. Van Den Bosch, Dozy et Molkenboer, qui indiquent la même espèce en Hollande, et entre autres dans l'île de Walcheren, limitrophe de la Flandre.

Communiqué par feu M. Vandevyvere, qui l'avait recueilli sur le sable humide aux environs de Bloemendael.

5. **BRYUM ULIGINOSUM** Br. et Schimp. Hampe, *Veget. cellul. Hercyniæ.* A. Dec. XVI, n° 152.

Aspect général des *Bryum intermedium* et *inclinatum*. S'éloigne de l'un et de l'autre, en ce qu'il est monoïque et qu'il a des feuilles distinctement marginées. Il diffère en outre du premier par ses feuilles à bords roulés en dehors, au lieu d'être réfléchis, et par son urne pyriforme moins renflée en massue : du second, par des feuilles plus allongées, un pédicule recourbé en arc incliné vers le sol, ainsi que par une urne non ventrue.

Dans les endroits sablonneux, humides, à Aeltere. Juin.

[1] Voir *Quatrième centurie*, p. 9.

Digitized by Google

6. HYPNUM STOKESII. Turn. HYPNUM PRÆLONGUM β *Stokesii* Brid. HYPNUM RIGIDULUM Bland. — Turn., *Muscolog. hibern.*, tab. 15, fig. 2.

Tiges couchées, rampantes, régulièrement bipennées. Rameaux rigides, très-étalés. Feuilles caulinaires larges, cordiformes, terminées en une longue pointe flexueuse et recourbée, munies d'une nervure qui pénètre dans la pointe, au lieu de s'évanouir en dessous d'elle : les rameales ovales-lancéolées, à nervures disparaissant au delà de leur moitié. Nous n'en avons pas vu la fructification, qui est semblable, d'après les auteurs, à celle de l'*Hypnum prælongum*, dont cette espèce a le port, quoique plus robuste et d'un vert gai, luisant, avec une teinte jaunâtre.

Croît au pied des arbres dans les taillis montueux, près de Rooborst, entre Zotteghem et Audenarde. Printemps.

7. ORTHOTRICHUM PUMILUM Sw. Ilgner, *Schlesiens Laubmoose*, pag. 13, n° 1.

Petites touffes compactes, rappelant celles de *l'Orthotrichum diaphanum*, dont on les distingue au premier abord, parce que les feuilles ne sont pas terminées en poil. Tige courte, comme dichotome. Feuilles caulinaires rapprochées et imbriquées, quand elles sont sèches : étalées et recourbées lorsqu'elles sont mouillées; lancéolées, courtement acuminées, à sommet un peu obtus, à bords roulés; les périchætiales conformes, mais plus grandes. Coiffe largement campanulée, à stries brunes. Urne immergée, ovale-oblongue, ventrue, un peu luisante, marquée de huit côtes épaisses d'un brun roux, et resserrée sous le péristome. Celui-ci double : l'extérieur a trente-deux dents pâles-orangées, lancéolées, larges, rapprochées par quatre : l'intérieur a huit cils hyalins, plus courts, alternant avec chaque double paire de dents. Opercule conique, court.

Sur le tronc des saules et des peupliers, entre Melle et Gontrode. Printemps, à commencer de la fin de mars.

Digitized by Google

8. **ORTHOTRICHUM FALLAX** Bruch. ORTHOTRICHUM PUMILUM β *fallax* Rabenh. — Mougeot, *Stirp. crypt. Vog. Rhen.*, fasc. IX, n° 925.

Monoïque comme le précédent, mais un peu plus grand et d'un vert moins foncé. Feuilles plus longues, plus aiguës, moins étalées, un peu carenées. Coiffe conique-campanulée, allongée. Urne à col allongé, cylindrique-oblongue, émergente à l'état sec, moins colorée, à côtes plus étroites, à dents du péristome externe pâles.

Sur le peuplier et le saule, à Saint-Amand. Printemps, mais moins précoce que l'*Orthotrichum pumilum*.

9. **ORTHOTRICHUM PATENS** Bruch. ORTHOTRICHUM AFFINE β *patens* Garov. — Moug. et Nestl., *Stirp. Vog. Rhen.*, fasc. IX, n° 924.

Voisin de l'*Orthotrichum stramineum*, dont on le distingue à ses touffes plus grandes, d'un vert gai, à son urne moins émergente, obovale quand elle est mûre et avant la chute de l'opercule, mince, cartilagineuse, comme satinée dans les intervalles des côtes, qui sont plus distantes, moins épaisses et à peine striées. Feuilles généralement plus larges, lâches, plus ou moins étalées, même dans l'état de sécheresse, non décurrentes, aiguës.

Coiffe tantôt plus, tantôt moins velue. Rabenhorst fait observer que cette espèce varie aussi par sa taille. Les grands individus ont beaucoup du port de l'*Orthotrichum affine*.

Sur le tronc du hêtre, dans le bois de Melle. Mai.

10. **ORTHOTRICHUM FASTIGIATUM** Bruch. ORTHOTRICHUM AFFINE β *fastigiatum*, Huben. — Ilgner, *Schlesiens Laubmoose*, pag. 13, n° 2.

Monoïque, ainsi que la plupart de ses congénères. Touffes compactes, d'un vert foncé. Tige rameuse, à rameaux courts, robustes, rigides, fastigiés. Feuilles dressées, imbriquées étant sèches, ovales-lancéolées, plus ou moins acuminées, offrant, vers leur sommet, de grandes cellules hexagones, riches en granules de chlorophylle. Urne pyriforme-oblongue. Opercule convexe, à pointe épaisse.

Digitized by Google

Ne nous paraît guère pouvoir être considéré comme une variété de l'*Orthotrichum affine* avec lequel cependant il est sans doute souvent confondu. Muller [1] fait remarquer qu'il en diffère, indépendamment des caractères précités, par ses feuilles plus courtes et moins étroites, par son urne plus grosse, par la largeur plus grande des cils du péristome interne, qui sont en même temps moins longs, et enfin par sa fructification plus précoce.

Sur le tronc d'un vieux frêne, à Vinderhaute. Croît aussi sur le sapin, l'orme, le saule, le peuplier. Mai.

11. ORTHOTRICHUM COARCTATUM Pal. Beauv. Hampe, *Veget. cellul. Hercyniæ.* A. Dec. VII, n° 70.

Port général de l'*Orthotrichum crispulum,* avec lequel il est facile de le confondre. Ce qui l'en distingue surtout, c'est la forme régulièrement orbiculaire de ses touffes, sa tige presque toujours décombante, ses feuilles plus longues, plus effilées, dont la nervure s'évanouit au-dessous du sommet, son pédicule fortement enroulé en spirale, quelquefois flexueux, son urne plus exserte, d'abord courte, ovale, puis, après la dissémination, allongée, étroite et resserrée à son ouverture. Coiffe à bords laciniés. Opercule à pointe plus longue.

Sur les jeunes troncs du chêne et sur le sapin, dans les bois, entre Aeltere et Bloemendael. Août.

12. ORTHOTRICHUM PHYLLANTHUM Steud. ORTHOTRICHUM JUTLANDICUM Brid. Hampe, *Veget. cellul. Hercyniæ.* A. Dec. XIX, n° 188.

Touffes lâches. Tiges couchées, rameuses, à rameaux dressés, allongés, grêles. Feuilles longues, droites-étalées étant humides, se recourbant et devenant flexueuses et tortiles par la dessiccation, concaves, lancéolées, longuement atténuées en une pointe obtuse, munies d'une nervure épaisse qui les parcourt en entier. La nervure se prolonge même souvent au delà

[1] *Synopsis Muscorum.* I, page 698.

Digitized by Google

du sommet et y donne naissance, en se renflant, à une petite masse tissulaire saillante, formée de grandes cellules allongées, fasciculées, obtuses, cylindriques, bi-quadriseptées, d'abord verdâtres, puis colorées en rouge intense, et contrastant alors agréablement, quand on les examine à la loupe, avec la verdure du reste de la feuille. Ces cellules, primitivement agrégées entre elles, se désagrégent ensuite et se présentent quelquefois, avant leur chute, en groupe étoilé. Organes de la fructification inconnus.

Ressemble de prime abord à l'*Orthotrichum crispum*. M. Schimper [1] décrit et figure les cellules colorées dont il est fait mention ci-dessus comme étant claviformes, tandis que nous les avons constamment trouvées cylindriques. Ce sont, du reste, ainsi que l'observe avec raison ce botaniste, de véritables propagules analogues à ceux que portent à la base de leurs feuilles les *Orthotrichum obtusifolium* et *Lyellii*, et qui sont destinés, dans ces deux espèces dioïques à assurer la multiplication. La présence des mêmes organes dans la Mousse que nous venons de décrire, laquelle n'a été observée jusqu'à présent qu'à l'état stérile et seulement dans des contrées maritimes, nous autorise à croire qu'elle doit être également dioïque.

A la base des troncs du saule, à Lombarzyde, près de Nieuport, où cette curieuse Mousse a été découverte par mon fils. Septembre.

13. POLYTRICHUM JUNIPERINUM Hedw. β *strictum* Mull., *Syn.* Polytrichum strictum Menz. *non* Dec. *nec* Schl. — Hampe, *Veget. cellul. Hercyniæ.* A. Dec. XI, n° 102.

Variété remarquable qui se distingue du type au premier aspect. Tige grêle, stricte, le plus souvent simple, et de huit à dix centimètres d'élévation, inférieurement entourée d'un duvet confervoïde ou radiculaire d'un jaune sale terreux. Feuilles entières plus subulées, moins dilatées à leur base et moins longuement vaginantes. Pédicule filiforme. Une raccourcie presque cubique. Opercule un peu convexe, à pointe conique et droite.

Sur le bord des marécages tourbeux, parmi les roseaux, dans les dunes.

[1] *Recherches anatomiques et physiologiques sur les Mousses*, p. 17, pl. 2, fig. 12 et 13.

Digitized by Google

14. CATHARINEA ANGUSTATA Brid. Polytrichum undulatum *β minus* Hedw. *non* Funck. — Hampe, *Veget. cellul. Hercyniæ.* A. Dec. XVIII, n° 177.

Aspect de la *Catharinea undulata*, mais dioïque, plus grêle, plus petite, ne dépassant guère deux ou trois centimètres de hauteur. Feuilles courtes, entières, peu ondulées, à large nervure, se recourbant au lieu d'être tortiles par la dessiccation. Pédicule filiforme. Urne étroite, longue, cylindrique, à peine et tardivement arquée. Opercule conique, brévirostre.

Sur les bords des chemins creux, aux environs de Dickele, entre Gand et Audenarde. Fin de septembre.

15. CATHARINEA TENELLA Roehl. Polytrichum undulatmu *β minus* Funck. *non* Hedw.—Hampe, *Veget. crypt. Hercyniæ.* A. Dec. XI, n° 110.

Dioïque, à tige courte. Feuilles ovoïdes-lancéolées, acuminées, légèrement ondulées, serrulées vers le sommet et munies d'une grosse nervure dont les bords sont quelquefois dentelées dans sa partie inférieure. Pédicule capillaire, allongé, droit et rigide. Urne brunâtre, très-peu arquée, de deux millimètres de longueur sur un de largeur, devenant un peu ovale après la chute de l'opercule, et présentant alors une large ouverture. Opercule conique, subulé, à pointe longue.

Taille de la *Catharinea nana*, Roehl., qu'il est facile d'en distinguer à ses feuilles roides et épaisses, à son pédicule flexueux ou tortillé, à son urne plus raccourcie et plus évasée après sa déhiscence.

Nous citons le n° 110 de la collection de Hampe et non son n° 178, parce que la plante publiée sous ce dernier, et portant également le nom de *Catharinea tenella*, nous paraît être la *Catharinea undulata γ abbreviata* Mull., *Syn.* Nous ferons observer, par la même occasion, qu'après avoir comparé de nouveau [1] la *Catharinea undulata β minor*, de Hampe (*Decad.*, XI, n° 109) avec la *Catharinea hercynica*, nous restons convaincu de leur parfaite identité. Nous ignorons s'il en est de même dans tous les exemplaires de la collection.

Dans le sable humide, à Rieme, près de Zelzaete. Printemps.

[1] Voir *Deuxième centurie*, p. 10.

Digitized by Google

HÉPATIQUES.

16. **JUNGERMANNIA TRICHOMANES** Dicks. Cincinnulus trichomanes Dmtr. Calypogeia trichomanes Cord. Hampe, *Veget. cellular. Hercyniæ*. B. Dec. VII, nº 61.

Tige rampante, rameuse. Feuilles opposées, disposées sur deux rangs dans le même plan, sessiles, comme décurrentes, ovales-arrondies, entières ou émarginées, non auriculées. Stipules arrondies, émarginées-bifides, à échancrure peu profonde et large, les lobes en étant plus ou moins obtus. Capsule latérale, linéaire, roulée en spirale. Colésule oblongue, partout velue, latéralement attachée à la tige par un côté de son orifice, qui est irrégulier et restant cachée dans le sol.

Port général de la *Jungermannia polyanthus*, mais beaucoup plus petite et plus délicate. Nos échantillons ont la plupart de leurs feuilles entières, et nous paraissaient, d'abord, appartenir plutôt à la variété β *Sprengelii*, Lind.; mais, d'autre part, ils offrent des stipules en tout conformes à celles du type. Dans la variété, ces derniers organes sont au contraire, comme on sait, plus petits, plus étroitement échancrés, à lobes dressés et aigus. C'est, du reste, à la *Jungermannia trichomanes* β *Sprengelii* que l'on doit rapporter la *Jungermannia trichomanes*, Neck. [1], à qui l'insertion latérale du fruit n'avait pas échappé.

Parmi la Mousse, sur le sable humide, dans les lieux ombragés, près de Rieme. Printemps.

17. **JUNGERMANNIA OBTUSIFOLIA** Hook. Desm., *Pl. crypt. de la France*, fasc. XXXXIII, nº 2145.

Tige ascendante simple. Feuilles alternes dans le même plan, oblongues, obtuses-arrondies au sommet, un peu obliques, plus ou moins denticulées, auriculées sur leur bord supérieur et condupliquées avec

[1] *Deliciæ Gallo-Belgicae sylvestres*, p. 491.

Digitized by Google

l'oreillette. Celle-ci beaucoup plus petite, oblongue, un peu courbée en faux, obtuse et entière. Point de stipules. Capsule terminale. Colésule ovale, plissée dans toute sa longueur, dentée, à orifice contracté.

Taille inférieure à celle de la *Jungermannia albicans*, qui a la tige plus droite, les feuilles moins obtuses, serrulées au sommet et la colésule obovale, plissée seulement vers son ouverture.

Sur la terre argileuse, dans les chemins creux, à Rooborst. Mai.

18. **JUNGERMANNIA FUNCKII** Web. et Mohr. Jungermannia excisa Funck *non* Dicks. *nec* Hook. Marsupia Funckii Dmtr. — Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XXXIV, n° 1677.

Tige droite presque simple. Feuilles opposées, disposées sur deux rangs dans le même plan, rapprochées, à demi verticales, étalées, concaves, obovales, émarginées, à échancrure aiguë, dont les lobes sont généralement un peu obtus à leur extrémité, surtout dans les feuilles inférieures. Ni oreillettes ni stipules. Nos échantillons sont sans fruit. Dans ceux publiés par M. Desmazières, nous avons observé, comme l'indique notre honorable confrère M. Dumortier [1], 1° une capsule terminale quadrivalve à pédoncule court; 2° une colésule ovale, presque bilabiée, entourée d'un urcéole saillant, qui est formé par les feuilles périchætiales soudées à leur base, et auquel elle adhère par sa surface dorsale [2].

La *Jungermannia excisa* Dicks, à laquelle M. Mathieu rapporte, d'après Duby, l'espèce que nous venons de décrire, en est très-différente; aussi en a-t-elle été universellement séparée depuis la publication du *Botanicum gallicum,* comme, du reste, elle l'avait déjà été antérieurement par Steudel, Chevallier, Sprengel, Lindenberg, etc.

Forme de larges plaques d'un brun foncé sur la terre sablonneuse mêlée d'argile, dans les lieux boisés, à Meirelbeke, d'où me l'a communiquée M. J. Donkelaer. Fructifie à la fin de l'hiver et au printemps.

[1] *Sylloge Jungermannidearum Europæ*, pages 77 et 79.

[2] Pour la germination de cette espèce, voir Grœnland, *Ann. sc. nat.*, 1854. I, page 12.

Digitized by Google

LICHENS.

19. CORNICULARIA ACULEATA *β muricella* Floek. CORNICULARIA ACULEATA *β odontella* Kx. *non* Ach. CORNICULARIA ODONTELLA Math., *Flor. belg.*, pag. 3. Westend., *Herb. crypt.*, fasc. VII, n° 618, *non* Fr.

Touffes compactes, pulvinées, d'un brun noirâtre. Thalle mince, cylindracé, raccourci, très-rameux, à rameaux divariqués, rigides, étroits, plus ou moins anguleux, lisses, divisés en ramules terminaux très-courts et épineux. Nous n'y avons jamais vu de scutelles.

Dans notre *Flore cryptogamique des environs de Louvain*, nous avons pris abusivement cette variété pour la *Cornicularia odontella* Fr. qui forme une espèce distincte et semble être confinée dans les parties les plus boréales de la Scandinavie.

Croît, ainsi que le type, dans les dunes, aux environs de Oostdunkerke et de Cnocke, et probablement aussi dans les bruyères des Flandres.

20. LECIDEA FULIGINOSA Ach. LECIDEA MICROPHYLLA *γ fuliginea* Schær., *Spic.* BIATORA ULIGINOSA *β fuliginea* Rabenh., *Deutschl. krypt. Flor.*, tom. II, pag. 91.

Thalle largement étalé, brun, devenant fuligineux, lépreux-granulé, inégal, très-finement fendillé-aréolé. Apothèces toujours noirs à l'intérieur comme à l'extérieur, un peu luisants, innés, d'abord plans et marginés, puis hémisphériques et immarginés.

Les aréoles ne sont plus visibles dans nos individus, sans doute à cause de la carie du support. On trouve aussi, dans les Flandres, la *Lecidea uliginosa* Ach. [1] qui en est voisine mais terrestre, et dont le thalle, non aréolé, commence, d'après Rabenhorst, par être d'un vert-foncé olivâtre pour brunir et noircir ensuite. Chez cette dernière espèce, les apothèces sont d'ailleurs successivement, à l'intérieur et à l'extérieur, d'un brun rougeâtre et d'un noir terne.

[1] Westend., *Herb. crypt. belge*, fasc. 17, n° 818.

Digitized by Google

Sur une clôture en sapin à demi pourrie, près d'Isenberg, aux environs de Furnes.

21. **LECANORA ELACISTA** Ach. *sub* Parmelia. LECANORA COARCTATA γ *elacista* Schær., *Enum.* — Ach., *Meth.*, pag. 159, tab. IV, fig. 4.

Thalle d'un gris légèrement glauque-verdâtre, mince, comme tartreux, fendillé en aréoles polygones. Apothèces noirs, ayant d'abord une teinte brunâtre, adnés et apprimés, concaves, ensuite plus ou moins plans, entourés d'une bordure resserrée, formée par le thalle, blanche, pulvérulente, puis nue.

Nos échantillons nous offrent, en outre, deux variétés : l'une à thalle granuleux non fendillé en aréoles et du reste semblable au type ; l'autre (*Lecanora coarctata δ prominula* Schær.), à thalle également granuleux, mais à apothèces un peu plus grands, sessiles, marginés, privés de la bordure thalloïde.

L'espèce et la variété ont été trouvées par M. le vicaire Eug. Coemans, sur les grès et les cailloux, aux environs d'Audenarde, de Bottelaere et de Munten.

HYPOXYLÉES.

22. **DOTHIDEA GENISTALIS** Fr. Moug. et Nestl., *Stirp. crypt. Vogeso-Rhenanæ*, fasc. V, nº 448.

Petites pustules tuberculeuses, d'un noir terne, généralement orbiculaires, confluentes, d'abord recouvertes par l'épiderme qu'elles déchirent. Cellules blanches, très-petites, de six à douze, rarement plus, périphériques, dont une cependant occupe quelquefois le centre du nucléus. Strome blanchâtre et compacte. Nous y avons vu des thèques peu renflées et dépourvues de sporidies.

Sur les deux faces des feuilles vivantes du *Genista sagittalis*, dans le Jardin botanique de Gand. Octobre.

Digitized by Google

23. ASTEROMA CACALIÆ Desm., *Pl. crypt. de la France*, fasc. XXXX, n° 1998.

Petits groupes de fibrilles rayonnantes, aplaties et comme membraneuses, d'abord brunâtres puis noirâtres, prenant naissance sur l'une des nervures tertiaires de la feuille. Périthèces inconnus.

Cette espèce occupe quelquefois les taches brun-rougeâtres de la *Septoria tussilaginis* West. [1] avec laquelle elle coexiste d'ailleurs fréquemment sur la même feuille. Souvent, et ceci se remarque surtout sur les feuilles déjà adultes, l'aréole pourprée qui entoure la *Septoria* prend alors un développement plus considérable et donne ainsi à l'Astérome un aspect tout particulier.

A la surface supérieure des feuilles vivantes du *Tussilago farfara*. Printemps et été. Communiquée par M. Demey, pharmacien.

24. SPHÆRIA (*cæspitosæ*) **PULICARIS** Fr., *Syst.* Gibbera pulicaris Fr., *Summ. veget. Scandin.*, t. II, pag. 402.

Groupes arrondis ou elliptiques, souvent irréguliers. Strome noirâtre formé par l'écorce, mince, un peu charnu. Périthèces superficiels, d'un noir terne, pressés les uns contre les autres, très-petits, de grosseur inégale, ovales-globuleux, dépourvus de papille, déhiscents par fentes, s'aplatissant ensuite et devenant cupuliformes. Sporidies uniloculaires, oblongues. Nous n'y avons vu ni thèques ni paraphyses ni sporules.

Parmi les sporidies, nous en avons observé quelques-unes qui paraissaient uniseptées. L'absence de cloisons chez le plus grand nombre ne pourrait-elle pas être attribuée soit à un développement moins avancé, soit à un avortement. Nous penchons d'autant plus à le croire que les sporidies, dépourvues de cloisons, étaient très-translucides, Cependant Fries attribue à la section de son genre *Gibbera*, où il place cette espèce, des sporidies simples et des thèques filiformes très-délicates.

Sur les rameaux lauguissants ou récemment morts du *Sambucus nigra*, surtout autour des nœuds et sur les lenticelles. Printemps.

[1] *Herb. crypt. Belge*, fasc. 13, n° 640.

Digitized by Google

25. SPHÆRIA (*confluentes*) MUCOSA Pers., *Synops. Fung.*, vol. 1, pag. 29.

Étendue en larges taches irrégulières. Périthèces très-petits, globuleux, un peu déprimés, astomes, mous quand ils sont frais, érompants, d'un noir grisâtre terne; connés en une espèce de strome maculiforme qui donne à l'épiderme une teinte d'un gris olivâtre.

Cette espèce, qu'il ne faut pas confondre avec la *Sphœria cucurbitacearum*, est d'abord rougeâtre, d'après les auteurs. Elle semble se développer de préférence à la base du fruit autour du point d'insertion du pédoncule.

Sur les potirons et les courges à demi pourris. Hiver. Communiquée par M. Demey, pharmacien.

26. SPHÆRIA (*obtectœ*) XYLOSTEI Pers. Disp. *non* Fr. *Summ.* SPHÆRIA INQUINANS β Pers., *Syn.* — Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XXXVI, n° 1768.

Taches noires ou noirâtres plus ou moins étendues, sur lesquelles se montrent des ostioles peu proéminents percés d'un pore. Périthèces globuleux, d'abord couverts, puis à peine émergents. Thèques longues, cylindriques, atténuées à la base, renfermant, d'après M. Desmazières, huit sporules ovoïdes, unisériées, brunes.

La *Sphœria xylostei* Fr., *Summ.* [1] ne saurait être synonyme, l'auteur lui attribuant la structure intérieure des *Diplodia*. Elle est probablement la même plante que celle trouvée par M. Westendorp sur les rameaux du chèvre feuille et décrite par lui sous le nom de *Diplodia xylostei* [2].

Sur les rameaux vivants ou morts du *Lonicera xylosteum*, au Jardin Botanique de Gand. Octobre.

27. SPHÆRIA (*foliïcolœ*) BRUNNEOLA Fr. Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XX, n° 986.

Taches le plus souvent épiphylles, ayant au moins un centimètre de lon-

[1] *Summ veg. Scandinav.*, II, p. 392, en note.

[2] Voir Mathieu, *Flor. gén. de Belgique,* tome II, p. 207, où la synonymie de Persoon et peut-être aussi celle de Fries, *Syst.*, doit être supprimée.

Digitized by Google

gueur, oblongues ou linéaires, d'un brun noirâtre, portant des groupes irréguliers de périthèces noirs, excessivement petits, globuleux, légèrement déprimés, astomes, d'abord innés puis proéminents. Ces périthèces renferment un noyau blanchâtre, ainsi que des thèques cylindriques, courtes, grêles, très-peu nombreuses dans nos échantillons. Nous n'y avons vu ni paraphyses ni sporidies.

Croît à Rieme, près de Zelzaete, sur les feuilles de l'*Epipactis latifolia*, sur lesquelles l'avait déjà indiquée M. Mougeot [1]. On la trouve aussi sur la *Convallaria majalis*. Automne et hiver.

28. SPHÆRIA (*foliicolæ*) AQUILINA Fr., *Syst.* Xyloma aquilinum Fr., *Observ. mycolog.*, vol. II, pag. 362.

Périthèces globuleux-déprimés, paraissant s'ouvrir par un pore, rapprochés en petits groupes, quelquefois arrondis, d'autres fois difformes, d'un noir opaque, innés dans l'épiderme qui les recouvre et qui s'identifie tellement avec eux qu'ils paraissent presque superficiels. Le nucléus ne nous a offert que des sporules extraordinairement petites, presque globuleuses ou légèrement ovoïdes.

Les auteurs indiquent généralement cette espèce sur le *Pteris aquilina*. Nos échantillons habitent la fronde et principalement la face supérieure du *Polypodium vulgare*, sur lequel MM. Dozy et Molkenboer [2] l'ont aussi observée.

Communiquée de Vinderhaute, près de Gand, par M. Edmond Blankaert. Automne.

29. VERRUCARIA GLABRATA Ach. Verrucaria alba β Fr., *Lich.*— Schærer, *Lich. Helvet. exsicc.*, n° 110.

Strome blanchâtre un peu cartilagineux, très-mince, lisse, étalé. Périthèces d'un noir terne, glabres, épars, quelquefois agrégés, d'abord

[1] *Stirp. Vog. Rhen.* fasc. 13, n° 1253, *nec* fasc. X. n° 970, qui est la *Dothidea melanoplaca*, comme MM. Berkeley et Desmazières l'ont fait observer.

[2] *Bijdragen tot de Flora cryptogamica van Nederland.*, III° stuk., pag. 8.

Digitized by Google

innés puis seulement immergés par la base, successivement hémisphériques et conoïdes, munis d'un ostiole papilliforme. Noyau brunâtre, noircissant quand on le mouille, ne remplissant toute la cavité périthécienne que dans le jeune âge.

Quelquefois les périthèces au lieu de se développer régulièrement restent un peu déprimés : ils s'ouvrent alors non point par un ostiole papilliforme, mais par une simple perforation.

Sur l'écorce du hêtre, aux environs de Renaix, où l'a recueillie M. Spae.

30. **SPHÆROPSIS DEPRESSA** Lev., *Champ. du Mus.* in *Annales des sciences natur.,* 3e série, t. V (1846), pag. 295.

Périthèces nombreux, rapprochés, noirs, innés, cachés sous l'épiderme qu'ils déchirent et soulèvent, arrondis ou oblongs, d'abord convexes, puis déprimés, munis d'un ostiole perforé et papilliforme. Sporidies ovales-cylindriques, obtuses, transparentes et uniloculaires. Nous n'avons pas observé de sporules.

Se distingue aisément de la *Diplodia lilacis* West. [1] par les périthèces moins grands, moins élevés et n'apparaissant point au dehors.

Sur les ramules morts du *Syringa vulgaris,* après l'hiver.

31. **VERMICULARIA** [2] **ERYNGII** Desm. β *erythrinæ* Nob. (Cfr. pro typo, Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. II, nº 542).

Périthèces nombreux, arrondis, ovales ou oblongs, lisses et luisants après la chute des poils, se déchirant ensuite irrégulièrement au sommet en laissant une large ouverture plus ou moins arrondie. Poils longs, rigides, brunâtres sous le microscope, excepté à leur pointe, qui est hyaline, dressés, divergents, un d'eux sur chaque périthèce ordinairement plus long et plus gros que les autres. Sporidies peu nombreuses, oblongues-cylindriques, un peu courbées, obtuses aux deux bouts.

[1] La *Hendersonia syringæ* Fr., *Summ.*, serait-elle bien différente de cette espèce?

[2] *Perithecium depressum, astomum, lacerato-dehiscens. Asci seu sporidia annulata, vermiculata. Setis tectæ.* Fries, *Orb. Veg.*, pag. III.

Digitized by Google

Diffère du type par ses périthèces plus grands, devenant luisants, par des poils plus longs et plus épais, par des sporidies moins courtes et moins cylindriques. Nous ferons observer que, dans ce genre, les sporidies ne sont pas annulaires ou en forme d'anneau, comme on les a décrites, dans une Flore générale de Belgique, mais bien annelées.

Sur les tiges de l'*Erythrina crista-galli*, au Jardin Botanique de Gand. Printemps.

32. PHACIDIUM REPANDUM Fr. PHACIDIUM HERBARUM Dub. — Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XXXIII, nº 1640.

Périthèces innés, déchirant l'épiderme, arrondis ou ovales, souvent confluents, d'abord pâle-verdâtres, puis brunâtres et noirs, déhiscents par une fissure sinueuse qui laisse des dents courtes, obtuses et inégales; disque pâle-grisâtre, devenant brun-fuligineux par la dessiccation. Thèques grêles, en massue allongée. Sporidies ovales-elliptiques.

Lorsque les périthèces sont nombreux et rapprochés, ils donnent à la feuille une teinte jaunâtre : chacun d'eux atteint au plus un demi-millimètre en diamètre.

Épicaule, épiphylle et surtout hypophylle. Sur la *Sherardia arvensis* recueillie à Oostvleteren, près d'Ypres, par M. Macleod. Croît aussi sur les *Galium.*

33. PHACIDIUM GEOGRAPHICUM. Nob.

Érompant, d'abord d'un brun roussâtre, puis successivement brun et noir. Périthèces très-petits, arrondis quand ils sont isolés, ce qui est rare, confluents, insérés sur ou le long des nervures et des veines et recouvrant ainsi la feuille d'une multitude de lignes sinueuses et de petits groupes, plus ou moins arrondis, qui lui donnent l'aspect d'une carte géographique. Après la déhiscence, les bords écartés laissent apercevoir un disque noirâtre. Thèques en massue et comme courbées, un de leurs côtés étant un peu rentrant. Sporidies légèrement courbées, oblongues.

Digitized by Google

Voisin par sa structure du *Phacidium radians* Rob. [1] mais à périthèces plus petits et différemment disposés.

A la face surtout supérieure des feuilles de l'*Orobus aureus*, au Jardin Botanique de Gand. M. le docteur Ed. Martens, qui s'occupe avec beaucoup de succès de cryptogamie, l'a aussi trouvé, sur l'*Orobus vernus*, à Louvain. Mai. Juin.

GASTÉROMYCES.

34. RHIZOMORPHA SOLIDIUSCULA Van Hall., *Bijdragen tot de Natuurkund. wetenschapp.*, I (1826), pag. 66.

Strome ou subicule cylindracé, rarement un peu aplati, de grosseur inégale, dont le maximum ne dépasse guère quatre millimètres dans nos échantillons, long de quatre décimètres ou plus, très-rameux, à rameaux épars, diffus, divergents, libres en général; extérieurement brun noirâtre, terne, lisse, luisant au moindre frottement, ferrugineux et pubescent sur les jeunes pousses : intérieurement solide, ligneux, compacte et non spongieux, blanc rose ou rougeâtre, marqué vers le centre, sur sa coupe transversale, d'un cercle brun pâle. Nous n'avons pu y découvrir des organes de fructification.

Intermédiaire entre la *Rhizomorpha subterranea* et la *Rhizomorpha scandens*. Cette dernière a été considérée, il est vrai, par Wallroth, comme une variété de la *Rhizomorpha corticalis;* mais elle paraît s'en éloigner, si nous en jugeons par un échantillon dont nous sommes redevable à l'obligeance de M. Leveillé.

Trouvée sous l'écorce de l'*Æsculus hippocastanum* mort, aux environs de Gand, par M. Demey; croît aussi sur le *Populus tremula*.

[1] Voir, pour cette espèce, Desm., *Ann. des scienc. nat.*, 2me série, tome XVII (1842), pag. 116, ainsi que Desm., *Pl. crypt. de la France*, fasc. 27, n° 1350.

Digitized by Google

35. RHIZOMORPHA SUBCORTICALIS Pers. δ *latissima*. Nob.

On sait que la *Rhizomorpha subcorticalis* donne naissance à plusieurs variétés qui ont été désignées sous les noms de : α *cancellata*, β *tendo*, γ *virgata*, et qui offrent pour caractères communs un strome ou subicule intérieurement blanchâtre, étoupeux ou comme cotonneux. A ces variétés vient s'en ajouter une nouvelle dont nous n'avons trouvé nulle part mention et qui n'est certainement pas la moins intéressante.

Elle se présente sous l'aspect d'une large membrane, étalée, très-mince, n'ayant tout au plus qu'un millimètre d'épaisseur, enserrant presque tout le tronc de l'arbre et terminée par quelques rameaux qui ont conservé leur manière d'être habituelle. On y remarque des stries parallèles, longitudinales, qui feraient croire d'abord que la membrane se serait formée par la soudure de rameaux aplatis et juxtaposés; mais l'examen de la coupe transversale prouve qu'il n'en est pas ainsi. Au lieu d'un simple cas de soudure, il y a ici, au contraire, une fasciation par dilatation, comme les branches du frêne et les turions de l'asperge en montrent quelquefois. En effet, si la première supposition était exacte, la couche blanchâtre de la substance interne serait interrompue par l'écorce noire de chacun des rameaux soudés, tandis que l'on voit cette couche se continuer sans interruption sur toute la largeur de la membrane.

Le fragment que nous avons sous les yeux mesure de cinq à six centimètres de largeur sur une longueur de trois décimètres. Il faisait partie d'un autre fragment qui avait au moins trois fois ces dimensions. Son adhérence avec l'aubier était si forte qu'en l'arrachant, l'écorce de l'une des surfaces est restée attachée à l'arbre : ce qui donne à notre exemplaire un port tout particulier.

Sous l'écorce du bouleau blanc[1], près de Bruges, d'où nous l'a communiquée feu M. Vandevyvere. Nous en avons vu aussi un échantillon recueilli, aux environs de Beveren, par M. Vanhaesendonck.

[1] Y aurait-il quelque rapport entre notre plante et la *Rhizomorpha foliorum* trouvée, par Merat, entre les deux lames des feuilles du bouleau et indiquée seulement par ce botaniste? Voir *Flore des environs de Paris*, 5me édition.

Digitized by Google

36. **GEASTER FIMBRIATUS** Fr. Lycoperdon geaster Batsch. — Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XX, n° 956.

Péridium externe plus ou moins profondément divisé, mais jamais jusqu'à sa base, en 5-9 rayons étalés, ovales, aigus, de largeur inégale, brunâtres, devenant ensuite plus foncés; recouvert à l'extérieur d'une peau sale blanchâtre, rugueuse, qui s'en sépare et laisse à nu une surface pâle d'une teinte plus ou moins jaunâtre, lisse et comme satinée. Péridium interne sessile, globuleux, mou, flasque et lisse, s'ouvrant par une ouverture indéterminée, entièrement poilue-frangée. Sporidies sphériques d'un brun terreux.

Taille plus ou moins grande. Diamètre du péridium externe étalé, variant de trois à six centimètres. Les sporidies devraient être fuligineuses, d'après Fries; nous ne les avons trouvées telles ni dans les échantillons de MM. Desmazières et Mougeot ni dans les nôtres. Peut-être prennent-elles cette couleur dans un état de maturité plus complète.

Voisin à la fois du *Geaster mammosus,* qui a ses rayons plus profondément divisés, son péridium interne déprimé, à ouverture ciliée, percée dans un disque circulaire conique aigu, et du *Geaster rufescens* reconnaissable à son péridium interne ovale, dont l'ouverture est dentée. Les caractères assignés à ce dernier par M. Mathieu [1] étant communs à plusieurs espèces, il devient impossible de décider quelle est celle que l'auteur a voulu décrire.

Trouvé dans les bois de sapin de Gontrode, près de Gand, par M. Scheidweiler. Printemps.

37. **LYCOGALA PARIETINUM** Fr. Didymium parietinum Schrad. Licea bicolor Pers., *Syn.* — Desm., *Pl. crypt. de la France,* XIV, n° 670.

Péridium ayant tout au plus un millimètre de diamètre dans son état complet de développement : d'abord pulpeux et d'un vert olivâtre foncé : devenant ensuite, à mesure qu'il se dessèche, rigide, fragile, ponctué et

[1] *Flore générale de Belgique,* t. II, p. 382.

Digitized by Google

d'un noir d'encre un peu bleuâtre; déhiscent par rupture irrégulière et montrant alors une masse sporidienne composée de sporidies excessivement petites, globuleuses, d'un jaune pâle ou couleur de soufre, entremêlées de quelques rares flocons.

Les sporidies ont une double enveloppe, comme le péridium, et paraissent être scabres. Le mode de déhiscence et la fragilité de cette espèce l'éloignent un peu de ses congénères.

Croît éparse sur les tiges mortes des grandes plantes herbacées, entassées dans les lieux humides et obscurs, au Jardin Botanique de Gand. On la trouve aussi sur les murs d'argile enduits de chaux, sur le papier moisi et sur le vieux bois. Avril.

URÉDINÉES.

38. **ÆCIDIUM BEHENIS** Dec. Dub., *Botan. Gall.,* II, pag. 905, excl. syn.

Cupules réunies en groupes le plus souvent irréguliers, cylindracées, à bord entier et replié en dedans dans le jeune âge, puis droit et denticulé : insérées sur une tache brunâtre autour de laquelle la feuille jaunit, et entourées par l'épiderme circulairement relevé en guise de gaîne. Sporidies jaunes, grosses, arrondies-ovoïdes, quelques-unes globuleuses, déformées par la pression, à noyau très-granuleux.

Rabenhorst rapporte la plante de Decandolle à son *Æcidium lychnidis :* mais cette synonymie est évidemment fautive. En effet, l'espèce décrite par le cryptogamiste allemand est le *Cæoma lychnideatum,* Lk., et diffère de celle dont il est ici question par des sporidies d'un jaune rougeâtre devenant ensuite brunes.

Sur les deux faces des feuilles de la *Silene inflata,* dans l'ancien cloître St-Bavon, à Gand. Octobre.

39. **ÆCIDIUM THESII** Desv. Cæoma thesiatum Link. — Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XXXI, n° 1501.

Cupules surtout hypophylles, plus rarement épiphylles et épicaules :

Digitized by Google

éparses, nombreuses, un peu cylindriques, à bord droit, dilaté, légèrement étalé en dehors et lacinulé : jaunissant et brunissant ensuite la feuille. Sporidies globuleuses d'un jaune pâle devenant à la fin d'un brun rougeâtre. Noyau composé de granules peu nombreux et sphériques.

Des filaments excessivement délicats, non septés, rameux, sont entremêlés aux sporidies. De semblables filaments, mais plus nombreux, plus longs, rampent sous l'épiderme de la feuille autour de chaque cupule.

Sur le *Thesium linophyllum,* dans les dunes.

40. ÆCIDIUM SCABIOSÆ Doz. et Molk., *Bydr. tot de Flora crypt. van Nederland.,* III, Stuk., pag. 12.

Taches plus ou moins arrondies, quelquefois confluentes, pâle-jaunâtres, entourées du côté opposé de la feuille d'une zone brun-pourprée. Cupules jaunes, pâlissant par la dessiccation, légèrement verdâtres dans le jeune âge, à bord tardivement denticulé et comme lacéré, ni infléchi ni réfléchi, disposées irrégulièrement en groupes arrondis ou oblongs. Sporidies presque arrondies, d'un jaune orangé, à épispore hyalin.

Hypophylle sur les feuilles de la *Scabiosa arvensis,* aux environs de Gand.

41. ÆCIDIUM GLAUCIS Doz. et Molkenb., *Nov. fung. spec. in Belg. septentr. detectæ,* pag. 16, tab. II, fig. 1.

Cupules hypophylles, pezizoïdes, éparses ou réunies en groupes irréguliers, formées par une membrane qui est successivemeut verte, vert-jaunâtre et blanche : à bord large, réfléchi, quadrilobé, chaque lobe denticulé ou lacinulé à son tour : à orifice tétragone. Sporidies d'un jaune orangé sale, plus ou moins globuleuses, toujours anguleuses. A la face supérieure de la feuille des taches d'un jaune verdâtre passant au rouge brun.

Sur le *Glaux maritima,* aux environs de Cnocke.

42. UREDO LIMONII Dub. PUCCINIA LIMONII Dec., *Flor. franc.,* t. II, pag. 596.

Petits groupes d'un brun roussâtre, arrondis ou oblongs, épars ou agrégés, recouverts longtemps par l'épiderme boursouflé, qui se rompt

Digitized by Google

longitudinalement et persiste autour d'eux. Sporidies, les unes ovoïdes-oblongues ou obovales, les autres ovales-arrondies, pâle-blanchâtres, pellucides, à épispore épais, renfermant une ou deux gouttelettes. Pédicelles blancs, minces, un peu épaissis vers leur sommet, ayant en général deux fois la longueur de la sporidie, quelquefois cependant plus longs, d'autres fois plus courts.

Il ne peut rester aucun doute sur le genre de cette espèce au sujet duquel Decandolle était incertain. Les gouttelettes renfermées dans les sporidies s'épanchent quelquefois en longueur ou irrégulièrement, et leur contour imite alors une ligne plus ou moins longitudinale ou sinueuse.

Sur les deux faces des feuilles, sur les pétioles et sur les tiges du *Statice limonium*, dans les polders de Saint-Laurent. Communiqué par M. Spae.

43. UREDO BEHENIS Dec. Uromyces behenis Lev., *Dispos. méth.* in *Ann. des scienc. nat.*, 3e série, t. VIII (1847), page 371.

Groupes orbiculaires, noirs, épars, convexes, compactes, entourés par l'épiderme relevé. Sporidies ovoïdes, cohérentes, pédicellées, à pédicelle très-long, blanc et rigide.

Croît hypophylle et épiphylle sur la *Silene inflata*, dans les dunes souvent pêle-mêle avec l'*Æcidium behenis*.

44. UREDO OLIVACEA Dec. Ustilago olivacea Lev. *Dispos. method.* Desm., *Pl. crypt. de la France*, fasc. XXXVII, no 1826.

Brun olivâtre, plus pâle dans le jeune âge, naissant et se développant dans la cavité ovarienne, puis se dispersant au dehors. Sporidies petites, globuleuses, opaques, très-cohérentes.

N'est pas du tout, comme le croit M. Mathieu [1], synonyme de l'*Uredo urceolorum* [2], avec lequel il est impossible de le confondre. Ce dernier

[1] *Flore générale de Belgique*, t. II, p. 442.

[2] Voir notre *Deuxième centurie*, p. 31. La figure de Nees que nous y avions citée, par suite de la synonymie admise dans le *Syst. Mycol.*, de Fries, doit être remplacée aujourd'hui par : Desm., *Pl. crypt.*, fasc. 30, no 1483.

Digitized by Google

entoure les urcéoles du Carex qu'il habite, d'une couche épaisse, noire, compacte, qui finit par leur donner l'aspect d'une petite baie.

Dans l'intérieur des fruits du *Carex riparia*, aux environs de Gand.

45. UREDO THESII Dub. Lev., *Disp. méth.* in *Ann. des sciences natur.*, 3e série, vol. VIII (1847), pag. 372.

Petits groupes d'un brun pâle, orbiculaires ou un peu ovales, épars, longtemps couverts par l'épiderme gonflé qui les entoure ensuite. Sporidies sphériques, pellucides, sans pédicelle.

A la surface inférieure des feuilles du *Thesium linophyllum*, dans les dunes. Août et septembre.

46. PUCCINIA THESII Chaill. *ap.* Dub. Desm., *Pl. crypt. de la France*, fasc. XXVIII, nº 1372.

Groupes noir-brunâtres, convexes, ovales, plus rarement arrondis, souvent confluents, entourés par l'épiderme déchiré. Sporidies brunes, ovoïdes, très-obtuses, biloculaires, à loges égales, peu resserrées à l'endroit de la cloison, légèrement atténuées à leur base. Pédicelle épais, long, hyalin.

La longueur relative du pédicelle n'est pas uniforme. On trouve, en effet, dans un même groupe des sporidies dont le pédicelle est au moins deux fois plus long qu'elles, et d'autres où il égale tout au plus leur longueur. Nous n'avons pas observé que la loge inférieure fût amincie en une base épaisse plus longue qu'elle, comme Wallroth le prétend. Mais quelques-unes des sporidies sont un peu plus courtes que les autres, et leur loge inférieure est alors un peu moins grande que la supérieure.

Sur les deux faces des feuilles et quelquefois sur la tige du *Thesium linophyllum*, dans nos dunes. Septembre.

Digitized by Google

47. DIDYMOSPORIUM CARPINI Cord., *Icon. Fungor.*, vol. I, pag. 7, tab. II, fig. 106.

Groupes noirs, ovales ou oblongs, placés transversalement à l'axe, entourés par l'épiderme fendu, peu saillants, supérieurement un peu convexes ou aplatis. Sporidies ovales, uniseptées, non étranglées à l'endroit de la cloison, demi-pellucides, brunes, réunies sur un strome blanc.

Les sporidies nous ont paru sessiles, quoique Bonorden [1] les dise pédicellées dans ce genre. Il en est parmi elles qui présentent vers leur milieu, au lieu d'une cloison, une gouttelette huileuse. Sont-ce des jeunes sporidies où la cloison doit encore se former, ou des sporidies stériles? Nous penchons pour la dernière opinion, parce que nous avons observé qu'elles se trouvent surtout dans la partie la plus inférieure du groupe, c'est-à-dire dans celle qui recouvre immédiatement le strome.

Sur les branches de la charmille, aux environs de Gand.

48. SPORIDESMIUM ATRUM Fr. *non* Grev. PUCCINIA ATRA Spreng. — Corda, *Icon. Fung.*, tom. VI, tab. I, fig. 14.

Pustules d'un noir-brunâtre à l'état sec, complétement noires à l'état frais, devenant confluentes et formant alors une couche inégale. Sporidies concolores, d'abord un peu renflées en massue, puis fusiformes, obtuses au sommet, 3-5 septées, stipitées, à stipe court, filiforme, hyalin, et agrégées sur un pseudostrome mince.

Sur le bois à demi pourri, au Jardin Botanique de Gand, où l'a recueilli M. J. Donkelaer.

49. TUBERCULARIA MUTABILIS Nees *ap.* Cord., *Icon Fungor.*, I, tab. I, fig. 73.

Tubercules globuleux, très-petits, n'ayant au maximum qu'un demi-millimètre de diamètre, épars, très-rarement confluents. Strome convexe,

[1] *Handbuch der allgemeinen Mykologie*, p. 47. Peut-être les pédicelles n'existent-ils que chez les espèces dépourvues de strome, telles, par exemple, que le *Didymosporium complanatum*.

Digitized by Google

un peu déprimé, d'abord blanc-rougeâtre, devenant à la fin d'un blanc sale. Couche sporidienne successivement rouge, rouge de cinabre, puis noirâtre. Sporidies oblongues, courtes.

Les sporidies de notre plante sont un peu plus allongées que ne les figure Corda et plutôt oblongues qu'ovales. Elles offrent les plus grandes analogies de forme, quoique plus petites, avec celles de la *Tubercularia sambuci*, telles que le botaniste de Prague les a représentées.

Sur les rameaux de plusieurs arbres. Nos échantillons ont été recueillis sur les tiges mortes du *Kerria japonica*. Fin de novembre.

50. STROMATERIA CARNEA Cord. *Icon. Fungor.*, vol. I, pag. 5, tab. I, fig. 81.

Aspect d'un *Tubercularia*. Tubercules très-petits, n'atteignant tout au plus qu'un millimètre en diamètre, globuleux, blanc-jaunâtres dans leur premier état, puis successivement couleur de chair, roses et rougeâtres; d'abord couverts d'une villosité blanche très-fine qui disparaît par l'âge. Sporidies oblongues-ovales, obtuses, pellucides, éparpillées sur des filaments très-délicats, simples ou rameux, entre-croisés, qui forment un strome floconneux charnu.

L'écorce qui porte nos échantillons offre aussi cette remarquable altération morbide qui rend l'épiderme bulleux et pour laquelle Fries a créé [1] le genre *Phlœoconis*, voisin du *Nosophlœa*. Les bulles sont généralement oblongues, variant d'un demi à trois centimètres de longueur. Elles se rompent irrégulièrement et laissent apercevoir alors une grande quantité de globules excessivement petits que l'on prendrait pour des sporidies renfermées dans un faux péridium, mais qui ne sont en réalité que des cellules désorganisées, semblables [2] à celles de la plante. Fries fait remarquer avec raison que l'ensemble de cette production rappelle assez bien le *Peridermium pini* et surtout sa variété *β corticola*.

Sur le tronc d'un *Acer striatum* mort, dans le jardin de M. Spae, à Gand. Été.

[1] *Syst. orb. veg.*, p. 199.
[2] *Summ. veget. Scandin.*, II, p. 520.

Digitized by Google

CHAMPIGNONS.

51. **TREMELLA FOLIACEA** Pers. β *terrestris* Nob. (Cfr. pro typo Pers., *Synops. Fung.*, pag. 626. Ejusd., *Myc. Europ.*, I, p. 101.)

Nous doutons de l'identité de la *Tremella foliacea* Pers. avec l'homonyme de Fries. Persoon, en effet, décrit son espèce concave et subpezizoïde : il n'y rapporte plus, dans sa *Mycologie d'Europe*, la *fig.* A. *a.* de la planche 406 de Bulliard, qu'il avait citée avec doute dans son *Synopsis.* Or, c'est précisément cette même figure que Fries mentionne pour sa plante, laquelle forme, dit-il [1], une touffe composée de lobes entiers, ondulés, connés à leur base, sillonnés, ayant le port [2] de la *Tremella sarcoïdes* devenue adulte, ce qui s'accorde assez mal du reste avec la citation de la planche de Bulliard.

Quoi qu'il en soit, la variété que nous décrivons nous a paru d'autant plus digne d'être signalée, que beaucoup de Tremelles sont encore imparfaitement connues. Elle croît sur le sol, sans y être attachée au moindre fragment de bois, par individus épars dont la hauteur ne dépasse guère un centimètre et demi, et n'ayant que rarement plus de trois centimètres de largeur. Chaque individu est monophylle, concave et comme cupuliforme, irrégulier, non plissé près de la base : à bord ondulé, sinueux-lobé, réfléchi en dehors et recourbé en dessous, les lobes s'enroulant en tube par leur extrémité. A l'état frais, la surface supérieure est d'un jaune-cannelle terne, brunâtre vers les bords : l'inférieure toujours plus pâle, un peu grisâtre et comme pubescente dans le jeune âge. A l'état sec, le fond de la concavité est d'un roux rubigineux, et le reste de la face supérieure d'un brun fuligineux [3] légèrement velouté, l'inférieure revêtant une teinte brune plus ou moins foncée. Substance diaphane, colorant très-peu l'eau et la rendant pâle-jaunâtre. Saveur douce.

[1] *Syst. mycol.*, II, p. 213.

[2] Fries, *Summ. veg. Scand.*, p. 341, en note.

[3] La *Tremella nigrescens* Fr., *Summ.*, que nous ne connaissons que de nom, aurait-elle quelque analogie avec notre variété?

Digitized by Google

Sur la terre, dans la cuve d'un *Agave americana*, au Jardin Botanique de Gand. Février et mars.

52. TREMELLA UNDULATA Hoffm. β *lactea* Nob. (Cfr. Hoffm., *Veget. cryptog.*, fasc. 1, tab. VII, fig. 1.)

Touffes peu compactes, d'un blanc de lait, excepté à la base, qui est d'un jaune sale, prenant, par la dessiccation, une teinte d'un gris jaunâtre, composées de cinq ou six pièces minces et foliacées qui naissent d'un point commun et atteignent de trois à cinq centimètres de hauteur. Ces pièces ou folioles, irrégulièrement oblongues, plus ou moins larges, dilatées vers le haut, ondulées, sinuées et lobées, ont le sommet de leurs lobes arrondi-obtus, entier ou garni de dentelures également obtuses qui sont quelquefois un peu crépues. Substance demi-transparente, molle et comme grasse au toucher, craquant sous la dent étant fraîche, cornée et dure lorsqu'elle est desséchée, reprenant son état primitif par son immersion dans l'eau. Le tissu de la plante examiné à la loupe, dans la direction de la lumière, se montre inégalement épaissi et parcouru par un réseau de petites sinuosités plus amincies et plus pellucides que le reste. Ni odeur ni saveur particulières.

La *Tremella undulata* Hoffm., ramenée par Fries comme variété à sa *Tremella fimbriata*, et citée à tort dans une nouvelle *Flore de Belgique*, comme synonyme de cette espèce, s'en éloigne par sa taille toujours plus petite et moins compacte, par sa couleur, qui est purpurine et non fuligineuse, ainsi que par la coloration d'un jaune citrin qu'elle donne à l'eau. La variété décrite ci-dessus est très-bien représentée, sauf sa couleur, par la figure de Hoffmann.

Sur les morceaux de bois non écorcés, servant à la culture des Orchidées exotiques, dans les serres du Jardin Botanique de Gand. De février en mai.

53. PEZIZA FUSCO-ATRA Rebent. Fries., *Syst. mycol.*, vol. II, pag. 82.

Cupules sessiles, d'abord oblongues et comme renflées en massue, puis

Digitized by Google

successivement globuleuses et presque hémisphériques, éparses ou réunies par trois ou par quatre, et alors irrégulières, extérieurement d'un noir brunâtre, couvertes de poils concolores, non fasciculés, denses, fins et crépus. Disque concave, glabre, d'une couleur pâle-brunâtre, sale et terne, qui devient d'un noir intense par la dessiccation. La chair en dessous de la couche hyménienne est d'un gris enfumé à l'état frais, blanchâtre quand le champignon est desséché. Nos plus petits échantillons ont de trois à quatre, et nos plus grands de sept à huit millimètres de diamètre.

Dans son premier état de développement, cette espèce offre le port du *Cyathus striatus* encore fermé, comme l'a bien observé Rebentisch. Elle est sans doute souvent confondue avec la *Peziza hemispherica* à côté de laquelle elle doit être placée, et c'est là peut-être ce qui fait qu'elle n'est citée en Allemagne que près de Neumarck et qu'elle ne fignre ni dans les Flores françaises ni dans celles de l'Angleterre que nous avons pu consulter.

La *Peziza strigosa* Pers. [1], à laquelle ce botaniste rapporte avec doute [2] l'espèce que nous venons de décrire, ne présente avec elle que des analogies éloignées et nous semble plutôt voisine, d'après un échantillon que nous devons à M. Leveillé, de la *Peziza corvina* Fr.; mais elle est en tout cas reléguée à bon droit comme très-problématique par la plupart des mycologues modernes.

D'autre part, nous ne savons ce que peut être la *Peziza strigosa* de M. Mathieu. Les caractères qu'il lui assigne appartiennent les uns à l'espèce douteuse de Persoon, les autres à la *Peziza fusco-atra*. Il y a, en outre, confusion avec une troisième espèce dans l'indication de l'*habitat* « sur les tiges herbacées et sur la terre humide et ombragée », puisque ni la *Peziza strigosa* Pers., ni la *Peziza fusco-atra* Reb. ne sont épiphytes.

Sur un talus buissonneux, parmi les mousses, entre Furnes et Isenberg. Septembre.

[1] *Minuta, cupula primo subglobosa, extus strigosa, atra, intus ochracea, vix linea lata.* Syn. Fung., p. 648.

[2] *Mycologia Europæa*, t. I, p. 247.

Digitized by Google

54. PEZIZA LEUCOLOMA Fr. Nees, *Syst. der Pilz.*, tab. XXXVII, fig. 268.

Voisine de la *Peziza humosa*, orbiculaire et sessile comme elle, mais plus petite et plus mince. Elle est d'abord fermée et globuleuse, puis elle s'étale, devient aplatie et scutelliforme. Sa couleur est rouge, jaunissant un peu par l'âge et pâlissant par la dessiccation. Le bord est relevé, droit, lacinulé ou denté, finement frangé et liséré de petits flocons blancs à l'état frais. La plante ne dépasse guère de deux et demi à trois millimètres de diamètre.

La *Peziza leucoloma β ricciæcola* Cord. [1], garnie sur ses bords et au-dessous de poils argentés, ne saurait appartenir à cette espèce et devra probablement être ramenée à la *Peziza subhirsuta* Fr.

Parmi les mousses, sur un talus sablonneux, à Ledeberg, près de Gand. Printemps.

55. PEZIZA ERUMPENS Grev. Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XXXV, nº 1745.

Sessile, sous-corticale, érompante, éparse, aqueuse-céracée, mince, lisse, glabre, arrondie, sans bord distinct, très-entière, comme un peu concave, d'une couleur cendrée, d'un demi-millimètre à un millimètre de diamètre, au plus.

Quand le temps est sec, on ne remarque, à l'endroit occupé par cette espèce, ainsi que le fait observer Greville [2], qu'une tache noire plus ou moins oblongue ou elliptique, cachant la fissure de l'écorce qui doit lui livrer passage et que l'on prendrait à l'œil nu, quand le support est ligneux, pour un *Hysterium*. Ce n'est que lorsque l'atmosphère est chargée d'humidité que le champignon se montre au dehors.

A la fin de l'automne, sur les pétioles à demi pourris de l'*Æsculus hippocastanum*. On l'a également indiqué sur ceux de l'*Ailanthus glandulosa*, de l'*Acer pseudoplatanus* et, au printemps, sur les tiges sèches des *Epilobium*.

[1] *Icones Fungor.*, t. II, p. 39, tab. XV, fig. 135.
[2] Scott, *Crypt. Flor.*, t. I, fig. 90.

Digitized by Google

56. AGARICUS (*Tricholoma*) ARENARIUS. Lev., *Fragm. mycol.* in *Ann. scienc. nat.,* IIIe série, tom. IX (1848), pag. 119, *non* Decand.

Chapeau convexe, obtus, devenant étalé, de huit centimètres de diamètre, lisse, charnu, jaune, prenant un léger reflet rougeâtre quand il est adulte. Stipe de neuf centimètres de hauteur, cylindrique dans la plus grande partie de son étendue, plein, fibrilleux, blanc ou blanchâtre vers son sommet, d'un jaune terne à sa base, qui est renflée en un tubercule de trois centimètres et demi de diamètre, d'où s'écoule plus ou moins abondamment, quand on le comprime, un liquide limpide. Hyménium jaune de soufre, à lamelles larges, subdistantes, échancrées en dessous près du stipe auquel elles adhèrent seulement par leur partie supérieure. Chair blanche, ferme, inodore, d'une saveur agréable, légèrement farineuse. Édule.

Malgré les pluies continuelles que nous avions eues, en 1854, jusqu'au commencement de juillet, époque où nous découvrîmes cette espèce, le tubercule ne laissait écouler par la compression qu'une petite quantité de liquide, contrairement à ce que dit M. Leveillé. Ce liquide, que nous ne considérons pas comme étant simplement de l'eau absorbée, avait la saveur de la chair du Champignon.

Dans le sable des dunes, entre l'église de Wendune et la maisonnette du garde-côte, en allant vers Ostende. Nous n'en avons vu que trois individus. Juillet.

57. AGARICUS (*Clitocybe*) INVERSUS Fr. *nec* Scop. AGARICUS CIRCINANS Schum. AGARICUS INFUNDIBULIFORMIS Bull., *Champ.,* tab. DLIII, excl. N. O.

Chapeau mince, d'abord convexe et quelquefois omboné dans le jeune âge, devenant successivement plan et infundibuliforme, à bords souvent sinueux et irréguliers, défléchis ou enroulés en dessous : glabre, d'un roux pâle et rougeâtre, prenant plus tard une teinte brunâtre et terne, atteignant de cinq à six centimètres de diamètre. Stipe court ayant rarement plus de quatre centimètres de hauteur, cylindrique ou très-peu aminci vers le haut, glabre comme le chapeau, ferme, creux, un peu courbé

Digitized by Google

chez les individus qui croissent rapprochés, d'abord de la couleur de l'hyménium, puis de celle du chapeau. Lamelles simples, décurrentes, d'un jaune de cannelle pâle, se colorant ensuite comme le chapeau. Chair fragile, généralement sale-jaunâtre. Odeur et saveur farineuses et en même temps un peu acidulées. Vénéneux ou du moins très-légitimement suspect.

Fries, dans son *Epicrisis,* ramène à cette espèce l'*Agaricus gilvus* Secr., et considère l'*Agaricus gilvus* Pers. comme en étant complétement distinct. Cependant la description de Persoon et la citation de la planche DLIII de Bulliard qui l'accompagne, tendent à faire croire que l'auteur du *Synopsis Fungorum,* en décrivant son *Agaricus gilvus* (dont il faut séparer en tout cas la variété β, devenue l'*Agaricus flaccidus* Sow.), avait bien en vue, au moins partiellement, notre Champignon [1].

Nous n'ignorons pas que l'*Agaricus infundibuliformis* Bull., a déjà été indiqué en Belgique par M. Mathieu. Mais nous avons cru devoir d'autant moins l'exclure de notre travail, qu'il n'a pas été décrit par ce botaniste, qui réunit d'ailleurs, sous ce nom, deux espèces très-différentes, dont l'une est l'*Agaricus inversus* proprement dit et l'autre (Bull., pl. CCLXXXVI) l'*Agaricus catinus* Fr.

Dans les sapinières d'Aeltere, où cette espèce a été trouvée par M. Edmond Blankaert. Septembre.

58 AGARICUS (*Collybia*) AUSTRIACUS Tratt., *Fung. austriac.,* fasc. II, tab. IV, fig. V (*e* Pers., *Myc. Eur.*).

Diffère de l'*Agaricus velutipes* par un chapeau non visqueux, par des lamelles plus pâles, et par un stipe presque cylindrique, souvent un peu comprimé, creux, élancé, strié dans le sens de sa longueur, toujours plus ou moins tordu sur lui-même, couvert dans toute son étendue d'un duvet très-court, d'un brun roussâtre, plus dense vers le bas, moins

[1] L'*Agaricus gilvus* Schæff. (*Agaricus fastibilis* Pers. et Fr.), que nous avons fait connaître dans notre *Flore cryptogamique des environs de Louvain,* ne doit pas être confondu avec ses homonymes. Il appartient au sous-genre *Hebeloma.*

Digitized by Google

abondant vers le sommet, où l'on voit percer la couleur rouge-pourprée de l'épiderme. Taille plus petite. Odeur fongine. Saveur d'abord mucilagineuse, puis douce.

Les mycologues que nous avons pu consulter rapportent cette espèce à l'*Agaricus velutipes*, dont une variété, celle figurée par Bulliard, pl. CCCXLIV, présente effectivement avec elle une assez grande analogie. Néanmoins l'absence de viscosité, les caractères fournis par le stipe, la manière de croître, en touffes de dix à douze centimètres de long et de six de large, souvent si compactes que les chapeaux imbriqués se soudent entre eux, ne nous permettent guère de l'y réunir.

Sur les grosses branches les plus élevées du *Populus fastigiata*, au Jardin Botanique de Gand. Décembre et janvier.

59. AGARICUS (*Pleurotus*) SALIGNUS Pers. β *fuscescens* Weinm. Agaricus brumalis Scop. Agaricus salignus, *Tratt. Fung. Aust.*, fasc. II, tab. IV, fig. 8 (*ex* Weinm.).

Chapeau dilaté, pâle-brunâtre, ayant quelquefois une teinte jaunâtre dans le jeune âge, devenant ensuite d'un brun terne. Hyménium blanchâtre, puis jaunâtre. Sporidies très-nombreuses et petites, blanches, se colorant légèrement en rose par leur exposition à la lumière. Stipe réduit à un simple tubercule. Chair très-blanche, compacte, d'une saveur d'abord fade et mucilagineuse, occasionnant ensuite dans l'arrière-bouche un picotement très-sensible.

Nous avons décrit le vrai *Agaricus salignus* dans notre Troisième Centurie et nous omettons, par conséquent, ici, les caractères qui lui sont communs avec cette variété. Celle-ci est toujours plus grande et croît par groupes de trois ou quatre individus. Son mycélium plonge et rampe sous l'écorce qu'il détache tout à fait du bois. Nous en avons suivi plusieurs fois le développement, aussi bien que celui du type, et nous nous sommes assuré que, chez l'un et chez l'autre, le chapeau est latéral et à stipe très-court, dès son premier âge, tandis que l'*Agaricus ostreatus*, qui en est voisin, commence par montrer un stipe central bien distinct,

Digitized by Google

atteignant jusqu'à deux centimètres de longueur, et un chapeau régulier [1].

Sur les grosses branches du *Populus fastigiata*, dans le Jardin Botanique de Gand. De novembre à février.

60. AGARICUS (*Hebeloma*) REPANDUS Fr. *Epicr.* an *Syst?*—Bull., *Champ.*, tab. CDXXIII, fig. 2.

Chapeau peu charnu, campanulé, devenant presque plan, à centre obtusément proéminent, irrégulier, de cinq à six centimètres dans son plus grand diamètre, à bords profondément sinués, se crevassant par l'âge : à surface lisse, comme séricée, d'un jaune très-pâle, ou sale-blanchâtre, rarement un peu fouetté de jaune foncé ou de roux. Stipe élancé, de cinq à six centimètres de hauteur, longitudinalement strié, solide, souvent blanchâtre et toujours plus pâle que le chapeau. Lamelles rapprochées, libres, non décurrentes, d'abord blanchâtres, prenant ensuite une teinte grisâtre plus foncée. Sporidies d'un brun pâle rougeâtre, chair cassante, très-blanche. Odeur nauséabonde, comme vireuse. Saveur farineuse et désagréable. Très-suspect.

Les lamelles ne sont pas, dans nos échantillons, aussi larges que celles représentées par Bulliard, quoiqu'on ne puisse pas cependant les appeler demi-lancéolées, comme Fries le dit dans son *Systema Mycologicum*. Il est à remarquer toutefois que ce caractère n'a plus été reproduit dans l'*Epicrisis*. La *fig.* D, de la planche XIX de Sterbeeck [2], est mauvaise, mais sa description se rapporte exactement à cette espèce.

Dans les sapinières d'Ursele. Juillet.

[1] Nous ajouterons ici, à propos de l'*Agaricus ostreatus*, que les grands individus de cette espèce offrent rarement leurs lamelles anastomosées à la base, tandis que ce caractère se trouve toujours dans les individus jeunes et dans ceux de taille moyenne.

[2] Voir le tableau indiquant la concordance des figures du *Theatrum Fungorum* avec la nomenclature moderne, dans nos *Esquisses sur les ouvrages de quelques anciens naturalistes belges*, t. II. FRANÇOIS VAN STERBEECK, p. 23.

61. AGARICUS (*Galera*) RUBIGINOSUS Fr. — Mich., *Gen. plant.*, tab. LXXV, fig. 8 (*mediocris*).

Chapeau membraneux, campanulé, obtus, hygrophane, sillonné-strié, ruguleux, d'un jaune-cannelle rubigineux. Stipe filiforme, de longueur variable, tenace, glabre, luisant, d'un brun rubigineux, quelquefois noirâtre. Lamelles concolores, larges, distantes, ascendantes, adnées. Cortine très-fugace.

Plus grand dans toutes ses parties que l'*Agaricus hypnorum*, dont il se distingue, en outre, par son stipe plus grêle, plus allongé, non pruineux au sommet, ainsi que par son chapeau ruguleux et obtus.

Parmi les mousses, dans les bois d'Aeltere. Septembre.

62. AGARICUS (*Hypholoma*) CANDOLLIANUS Fr. AGARICUS VIOLACEO-LAMELLATUS Dec. AGARICUS MUTABILIS, *Flor. dan.*, t. DCCLXXIV (*e* Friesio).

Chapeau médiocrement charnu, d'abord très-convexe, puis campanulé et obtus, successivement aplati, en conservant une légère protubérance au point d'insertion du stipe : glabre, hygrophane, d'un blanc sale jaunâtre plus ou moins pâle, ocracé au centre, atteignant environ trois centimètres en diamètre. Stipe ayant deux fois le diamètre du chapeau dans l'âge adulte, grêle, blanchâtre, fragile, strié au sommet, légèrement fibrilleux, creux à l'intérieur, excepté à la base, qui est un peu renflée. Cortine fimbriée-appendiculée, fugace. Lamelles rapprochées, postérieurement obtuses, adnées, d'abord violacées, prenant ensuite une teinte ferrugineuse. Sporidies brunâtres.

Voisin mais différent de l'*Agaricus appendiculatus*, dont il n'atteint jamais les dimensions et auquel le réunit encore M. Mathieu, quoique tous les mycologues l'en aient depuis longtemps séparé. Le deutochlorure de mercure jaunit le stipe et noircit l'hyménium.

Dans les bois de Sleydinge. Septembre. Rare.

Digitized by Google

63. AGARICUS (*Psilocybe*) FOENISECII Pers., *Icon. et descript. Fungor.*, tab. XI, fig. 1.

Très-fragile. Chapeau d'abord convexe et omboné, devenant campanulé et plus ou moins étalé, ayant à peu près deux centimètres d'ouverture quand il est adulte: sec, glabre, lisse et terne, d'un blanc sale fuligineux, devenant ensuite pâle brunâtre et pâlissant de nouveau dans sa vieillesse. Lamelles adnées, très-ventrues, d'un brun noirâtre et livide. Sporidies brunes. Stipe de cinq à six centimètres de hauteur, élancé, rigide, très-lisse, prenant la couleur du chapeau, excepté vers le sommet, où il reste souvent blanchâtre, aminci de haut en bas, intérieurement fistuleux. Chair peu épaisse, cassante, blanchâtre, quelquefois avec une légère teinte rose. Saveur amère. Point d'odeur particulière.

Persoon dit que le chapeau est parfois marqué de taches plus foncées, mais aucun des nombreux individus que nous avons observés ne nous a présenté ce caractère. Quoique beaucoup plus petit, l'*Agaricus Fœnisecii* rappelle, par son port, l'*Agaricus papilionaceus,* dont il est du reste facile de le distinguer.

Dans un jardin légumier, près de la pêcherie, à Gand. Août. Croît aussi, d'après les auteurs, dans les prairies grasses, après la fenaison.

64. AGARICUS (*Cortinarius*) TABULARIS Fr., *Syst.* CORTINARIUS TABULARIS Fr., *Epicr.* — Bull., *Champ.,* pl. CDXXXI, fig. 5.

Chapeau obtusément mamelonné dans sa jeunesse, convexe, s'étalant ensuite et s'aplatissant, lisse, un peu satiné, d'abord argilacé-pâle, puis brunissant, souvent humide, atteignant de six à huit centimètres de diamètre. Stipe toujours plus pâle que le chapeau, solide, ferme, plus épais à la base, légèrement fibrilleux, de quatre à six centimètres de hauteur. Hyménium d'un blanc sale avec une légère teinte bleuâtre, fugace dans le jeune âge, prenant successivement ensuite la couleur du chapeau, à lamelles rapprochées, émarginées. Cortine très-fugace. Chair ferme, blanchâtre. Odeur de reinette. Saveur désagréable. Suspect.

Cet Agaric se rapproche de l'*Agaricus araneosus,* mais il est plus grand

Digitized by Google

et se reconnaît facilement à son stipe moins grêle et à ses lamelles émarginées, non décurrentes par dents.

Croît dans les lieux gazonnés plantés de hêtres, entre autres, à Ledeberg, à l'endroit appelé *den Dries.*

65. AGARICUS (*Coprinus*) RADIANS Desm. COPRINUS RADIANS Fr., *Epicr.*— Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XVII, n° 831.

Chapeau successivement sphérique et ovoïde dans le premier âge, prenant, à mesure que le stipe se développe, une forme conique-campanulée, devenant ensuite plan, de trois à quatre centimètres de diamètre, mince, de consistance membraneuse, se fendant sur les bords, qui sont striés et qui se roulent au-dessus et se détruisent. Sa surface, dans l'âge adulte, est fauve pâle ou nankin, plus foncée vers le centre où elle est furfuracée. Lamelles postérieurement obtuses, étroites, d'abord blanches, puis d'un gris violet, finalement noires et déliquescentes, entraînant une partie du chapeau. Stipe de quatre à cinq centimètres de hauteur, nu, lisse, égal, blanc ou blanchâtre, rayonné-fibrilleux à sa base, à fibrilles blanches, puis fauves et d'un roux doré, formant un empatement étoilé et épais.

Le *Lycoperdon radiatum,* Sow., *nec* Alior., est le jeune âge de cette espèce, ainsi que l'a démontré M. Desmazières [1]. N'ayant observé notre Champignon que dans un état de développement déjà avancé, nous avons emprunté les détails qui nous manquaient à la notice à laquelle nous renvoyons.

Sur la crépissure d'un plafond humide, dans le Jardin de Gand.

66. AGARICUS (*Coprinus*) TERGIVERSANS Fr., *Syst.* COPRINUS TERGIVERSANS Fr., *Epicr.* — Sterb., *Theat. Fung.,* tab. XXII, fig. *J. K.*

Chapeau assez charnu, conique dans le jeune âge, perdant cette forme en s'étalant, se fendillant ensuite, du centre à la circonférence, en lanières qui s'enroulent en dessus : d'une couleur ferrugineuse-brunâtre, plus

[1] *Annales des sciences naturelles,* 1re série, t. XIII (1828), p. 206.

Digitized by Google

foncée vers le disque : lisse, légèrement peluché dans l'âge adulte et parsemé alors de points brillants, visibles à la loupe, mais qui ne persistent pas. Stipe concolore ou un peu plus pâle, glabre, sillonné au sommet, fistuleux. Lamelles adnées, ventrues, postérieurement larges, atténuées vers la périphérie du chapeau, d'un jaune ferrugineux qui noircit lorsqu'elles deviennent déliquescentes. Vénéneux.

Voisin à la fois de l'*Agaricus fuscescens* et de l'*Agaricus micaceus*, dont on le distingue aisément, entre autres, aux sillons du sommet du stipe. La lettre L de la planche XXII de Sterbeeck, que nous avions cru d'abord [1] représenter avec J et K une même espèce, nous paraît aujourd'hui devoir en être séparée. Il faut, d'autre part, exclure du texte du mycologue d'Anvers, comme étrangères à l'*Agaricus tergiversans*, les variétés qu'il y ramène, ainsi que la synonymie de l'Écluse. Le caractère d'avoir le chapeau non déliquescent et les lamelles déliquescentes, cité par Fries, n'a pas échappé à la sagacité de notre compatriote, qui l'indique nettement.

Croît presque partout, solitaire, dans les prairies bien fumées, entre Furnes et Adinkercke. Automne.

67. CANTHARELLUS BRACHYPODES. Chev., *Flore des environs de Paris*, tab. VII, fig. 5.

Chapeau charnu, glabre, pelucheux vers sa périphérie, brun, infundibuliforme, à bords enroulés en dessous. Hyménium d'un jaune sale, devenant brunâtre par la dessiccation, à plis lamelliformes, roides, bifides vers leur sommet, libres de toute anastomose. Stipe de la couleur de l'hyménium, solide, épais, court, ayant tout au plus un centimètre de hauteur et se confondant avec la base amincie du chapeau.

Nous regrettons de n'avoir pu constater les divers états de développement de cette espèce que Fries a admise dans son *Elenchus* et dans l'*Epicrisis*, sur la foi de Chevallier. D'après cet auteur, le chapeau commence par être déprimé, régulier, et devient légèrement sinueux. Quoiqu'un peu

[1] Voir *Esquisses sur les ouvrages de quelques anciens naturalistes belges*, II. FRANÇOIS VAN STERBEECK, p. 26.

Digitized by Google

plus petite, la figure rend bien notre échantillon, excepté que les bords n'y sont pas roulés en dessous, ce qui provient sans doute d'un âge moins avancé.

Dans les endroits boisés, aux environs de Dickele. Fin de septembre.

68. **BOLETUS CHRYSENTERON** Bull. Fr., *Epicr.* BOLETUS CHRYSENTERINUS Schum. — Bull., *Champ.*, tab. CDXC, fig. 3.

Confondu dans notre flore cryptogamique des environs de Louvain avec le *Boletus subtomentosus*, auquel Fries l'avait d'abord rapporté et dont ce mycologue, ainsi que Berkeley [1], l'ont séparé depuis. Il en diffère : 1° par son chapeau floconneux et non tomenteux, dont la chair jaune, rouge ou rougeâtre sous la peau, prend une teinte bleuâtre; 2° par son stipe fibrilleux-strié dépourvu d'aspérités; 3° par ses tubes plus petits et inégaux.

Toujours plus grand que le *Boletus subtomentosus*, en société duquel nous ne l'avons jamais rencontré. Il est d'ailleurs moins précoce. Le chapeau se fendille aussi en aréoles polygones, mais leurs interstices sont rouges. Fries en sépare encore le *Boletus pruinatus* (Bull., Tab. CCCXCIII, fig. B. C.), reconnaissable à la petitesse de ses tubes et à son chapeau poudreux.

Dans les bois d'Aeltere, de Sleydinge et de Gontrode. Milieu d'août et septembre.

69. **BOLETUS SUBTOMENTOSUS** LINN. β *sistotremoideus* Nob. (Cfr. quoad habitum Bull., *Champ.*, tab. CCCXCIII, A. *Fig. ultima dextrorsùs*).

Chapeau convexe, orbiculaire, de cinq centimètres environ de diamètre, brun, un peu tomenteux, à chair très-mince, d'un blanc sale, se fendillant en aréoles polygones, dont le milieu seul est recouvert par l'épiderme, les bords en étant formés par la chair nue, ce qui rend le chapeau marqueté. Stipe de quatre à cinq centimètres d'élévation, grêle, ayant de huit à neuf millimètres d'épaisseur, atténué et un peu courbé à la base, jaune, excepté inférieurement, où il est roussâtre, marqué de fines stries longitudinales et garni çà et là de petites aspérités qui ne sont visibles qu'à

[1] Berkeley and Broome, *Notices of. British Fungi*, n° 339.

Digitized by Google

la loupe. Hyménium jaune, épais et pulviné, offrant tout autour du stipe une dépression circulaire de près de deux centimètres de diamètre. Tubes longs, anguleux et réguliers vers la périphérie du chapeau, devenant sinueux à mesure qu'on s'en éloigne et prenant, dans la partie déprimée de l'hyménium, l'apparence de lamelles étroites et décurrentes. Sporidies d'un jaune d'ocre pâle. Chair molle, d'un blanc sale, ne changeant pas de couleur. Odeur ordinaire. Saveur désagréable. Suspect.

Nous ne pouvons donner une idée plus exacte du port général de notre plante, en ce qui concerne le chapeau et le stipe, qu'en renvoyant à la figure de Bulliard, indiquée plus haut, figure qui représente, croyons-nous, le *Boletus subtomentosus* ordinaire, bien qu'elle ne soit pas citée par Fries. Quoi qu'il en soit, nous nous sommes minutieusement assuré que le Champignon dont il s'agit appartient, sans le moindre doute, à cette espèce chez laquelle nous avons plus d'une fois observé une chair blanche ou blanchâtre et non changeante. Nous ignorons si la remarquable modification qu'offre l'hyménium a déjà été décrite. En la signalant à l'attention des mycologues, nous rappellerons que le *Boletus sistotrema* Fr., dont la structure hyméniale est analogue, fait également partie du groupe des *Subtomentosi* de Fries.

Trouvé dans les bois d'Ursele, par mon honorable collègue et ami M. le professeur Manderlier, dans une herborisation que nous y fîmes ensemble le 16 juin 1847. Croît solitaire. Nous n'avons rencontré que deux individus.

70. POLYPORUS (*Pleuropus*) SQUAMOSUS Fr.[1] Sterb., *Theatr. Fungor.*, tab. XIII et XIV.

Pour bien faire connaître le type de cette espèce polymorphe, il suffit de renvoyer à la description que nous en avons donnée ailleurs [2], et d'ajouter que le chapeau, flabelliforme et aplati, est à peine creusé au

[1] *Ubique pictus, optime prima vice*, Sterb. tab. XIII et XIV. (Fries, *Epicr.*, pag. 438.)

[2] *Flore cryptogamique des environs de Louvain*, où il faut supprimer la synonymie de Bulliard. Les dimensions que nous y avons indiquées sont fréquemment dépassées d'un tiers et plus.

Digitized by Google

centre, peu épais, à chair compacte, diminuant graduellement en épaisseur, depuis la base jusqu'au bord, lequel est toujours mince et non replié. Ce type présente, en outre, deux variations de couleur, qui nous étaient inconnues lors de la publication de notre *Flore* et que nous croyons utile d'indiquer ici, quoiqu'elles n'aient pas été observées dans les Flandres, où le vrai *Polyporus squamosus* manque, du reste, également. L'une de ces variations, déjà décrite par Fries et trouvée à Borgerhout, près d'Anvers, est fuligineuse, à écailles noires, à hyménium d'un gris cendré : l'autre, dont Persoon a fait [1] son *Polyporus flabelliformis,* et qui nous a été communiquée des environs de Bruxelles, a le chapeau d'un jaune citrin vif, avec des écailles rousses et des pores d'un jaune paille.

Tous les botanistes savent que, sous le nom de *Polyporus squamosus,* on réunit plusieurs formes qui sont loin d'être identiques et que Schumacher a même décrites anciennement comme espèces distinctes. Nous ne prétendons contester ni les rapports que ces diverses formes ont entre elles, ni le manque de caractères suffisants pour les élever au rang d'espèces; mais nous croyons que l'on a tort de les rapporter globalement au type sans les y subordonner à titre de variétés autour desquelles viendraient se grouper d'autres modifications secondaires. Parmi ces formes trop négligées, il en est, en effet, qui offrent des caractères assez importants pour les distinguer les unes des autres et ne pas les confondre avec leur souche commune. Tel est spécialement le cas des deux variétés suivantes :

β) Crassipes Nob. Boletus maximus Schum. Boletus juglandis Bull., *Champ.*, tab. XIX [2]?

Chapeau réniforme, ou obtusément cordiforme et dilaté, pulviné, légèrement déprimé vers la base, à bord longtemps replié en dessous, puis étalé. mais toujours épais. Surface d'un blanc sale ou jaunâtre, marquée de

[1] *Mycol. Europ.*, II, pag. 53. *Agaricus aureus flabelli facie Battara Arimin.* tab. XXXVII. fig. B.

[2] Cette figure représente, à proprement parler, un état intermédiaire entre le type et β, tenant au premier par son stipe écailleux dans le jeune âge, mais surtout au second par l'ensemble des caractères.

Digitized by Google

larges écailles rousses. Hyménium jaunâtre, à pores très-grands, d'abord indistinctement arrondis ou anguleux, devenant ensuite allongés et inégaux, à peine décurrents sur le sommet du stipe. Celui-ci coloré comme le chapeau, mais dépourvu d'écailles, court, très-gros, crevassé sur toute son étendue en aréoles polygones. Sporidies excessivement nombreuses, blanches, grosses, elliptiques, obtuses, renfermant deux spores.

Le chapeau mesure ordinairement quatorze centimètres de longueur, du sommet du stipe au bord opposé, sur dix-neuf à vingt de largeur. Son épaisseur atteint environ cinq centimètres, y compris l'hyménium, qui n'a jamais plus de huit millimètres. Le stipe cylindrique ou quelquefois un peu aplati en dessus, a une épaisseur de quatre centimètres sur une longueur de cinq en moyenne. Chair très-blanche, subéreuse.

γ) *Levipes* Nob. Boletus platyporus Schum.? Polyporus squamosus Grev. *Scott. crypt. Flor.*, tab. CCVII.

Chapeau transversalement oblong ou dilaté, presque plan en dessus, excepté au point d'insertion du stipe, où il est déprimé, toujours à bord mince et sinué; sale blanchâtre ou pâle argilacé, plus foncé vers le centre, couvert de nombreuses écailles d'un rouge brun. Stipe à peu près de la couleur du chapeau, cylindracé, grêle, lisse, c'est-à-dire dépourvu d'écailles et d'aréoles, jamais complétement latéral, inséré au contraire à la surface inférieure du champignon, excentrique, dressé ou recourbé dans le plan du chapeau. Hyménium blanchâtre ou tirant sur le jaune, à pores très-larges, très-irréguliers ou inégaux, décurrents et réticulant le sommet du stipe. Sporidies plus petites et moins obtuses. Chair flasque.

Les dimensions les plus fréquentes du chapeau sont de dix à onze centimètres de longueur sur dix-huit à vingt de largeur. Quelquefois, néanmoins, surtout dans les individus inférieurs d'un même groupe, le petit diamètre se développe davantage au détriment du plus grand, et il en résulte alors une forme dilatée qui n'est ni oblongue ni arrondie. Le stipe est long de cinq à six centimètres. Le *Boletus polymorphus* Bull. nous paraît être une simple déviation de cette variété.

Digitized by Google

Le type, avec ses variations de couleur, est automnal et croît sur le noyer vivant; β est printanier et se rencontre fréquemment dans les Flandres, solitaire ou en touffe, sur le noyer mort, plus rarement sur le chêne; γ est estival et croît en groupes de deux ou trois individus, dont un ou deux avortent presque toujours, sur le frêne, quelquefois sur le saule, aux environs de Leupeghem, près d'Audenarde.

71. POLYPORUS (*Resupinatus*) FERRUGINOSUS Fr. Grev., *Scott. Crypt. Flor.*, tab. CLV, fig. 1 (*Fungus juvenilis*).

Résupiné, d'abord arrondi, puis confluent et longitudinalement étendu, large de trois centimètres, d'une consistance ferme, d'une épaisseur de trois millimètres au plus, à pores de grandeur moyenne, inégaux, arrondis ou un peu allongés; d'un jaune de cannelle foncé, pâlissant par la dessiccation, et offrant alors à l'intérieur une couleur sale jaunâtre pâle.

Nous ne citons la figure de Greville que faute de mieux. Nos échantillons s'en éloignent en même temps qu'ils sont conformes à la description de Fries. Ils ne sont pas cependant complétement privés de chair, quoique la couche en soit très-mince. L'espèce se présenterait-elle peut-être, à l'instar de ce qui a lieu pour d'autres Polypores de la même catégorie, sous deux formes différentes, selon qu'elle est complétement épixyle, comme le sont nos individus, ou selon qu'elle croît, ainsi qu'elle est figurée par Greville, sur des fragments de branches et de feuilles amoncelés sur le sol?

Sur les troncs abattus de l'aune, aux environs de Vinderhaute. M. Edm. Blankaert.

72. POLYPORUS (*Resupinatus*) MUCIDUS Fr. Poria mucida Alb. et Schwein. *Consp. Fung. Niskiens.*, pag. 256.

S'étalant en larges plaques de cinq à sept millimètres d'épaisseur, entourées d'une zone byssoïde, assez fermes et sèches, d'un blanc sale prenant une légère teinte jaunâtre; à pores plus grands que dans l'espèce précédente, inégaux, arrondis ou anguleux, plus ou moins denticulés, et même lacérés dans la vieillesse.

Digitized by Google

Les auteurs, entre autres Albertini et Schweiniz, distinguent, pour cette espèce, deux états qui semblent dépendre des circonstances dans lesquelles le champignon se développe, et peut-être bien aussi de l'âge. Dans l'un de ces états, le seul que nous ayons observé, la plante est subéreuse, plus épaisse, plus ferme, plus étalée; dans l'autre, elle est molle, plus mince et plus étroite : c'est sous cette dernière forme qu'on la trouve, paraît-il, le plus souvent dans les fissures des troncs cariés du sapin.

Communiqué par M. Demey, qui l'a recueilli sur de vieilles billes de bois de chêne, à la station de Gand. Été.

73. HYDNUM SQUAMOSUM Fr., *Epicr.* HYDNUM FOETIDUM Secr. (*e Friesio*).— Schæff., *Fung.*, tab. CCLXXIII.

Chapeau charnu, arrondi, irrégulier, peu épais, déprimé, glabre, fendillé en aréoles squamiformes, irrégulières, qui le rendent quelquefois comme bosselé, d'un brun rougeâtre plus ou moins foncé, devenant noirâtre par l'âge. Hyménium gris brunâtre, les aiguillons ayant leur extrémité blanchâtre à l'état frais. Stipe excentrique, court, trapu, plus ou moins ridé dans le sens longitudinal, souvent un peu atténué de haut en bas, de la couleur du chapeau ou plus pâle. Chair blanchâtre. Odeur de crottin de cheval se dissipant par la dessiccation.

Nos échantillons n'ont sans doute pas encore atteint tout leur développement. Le chapeau n'a que quatre à cinq centimètres de diamètre, et le stipe mesure tout au plus de deux et demi à trois centimètres de hauteur.

Cette espèce ne doit pas être confondue avec le *Hydnum subsquamosum* Batsch, qui est, pour quelques botanistes, l'*Hydnum squamosum* Bull., tandis que Fries, dans son *Épicrisis,* rapporte avec plus de raison, nous paraît-il, le Champignon du mycologue français à l'*Hydnum imbricatum* Linn. C'est à ce dernier qu'il faut aussi probablement ramener l'*Hydnum squamosum* Roq., ainsi que celui de Decandolle.

Dans les sapinières, entre Aeltere et Knesselaere, où nous l'avons cueilli au commencement de septembre 1851, sans l'avoir retrouvé depuis.

Digitized by Google

74. **HYDNUM CINEREUM** Pers. excl. syn. et var. β (*non* Bull. *nec* Fries.)
Pers., *Mycol. europ.*, II, pag. 168.

Subéreux. Chapeau mince, convexe, puis plan, à peine un peu creusé par l'âge, d'un blanc grisâtre, non zoné, mais quelquefois tacheté de roux, devenant ferrugineux quand on le mouille, satiné et comme velouté au toucher, sans pubescence appréciable, même à la loupe, mesurant de trois à quatre centimètres de diamètre. Hyménium d'abord d'un gris de cendre, puis ferrugineux pâle, à aiguillons longs, subulés, décurrents sur le stipe. Celui-ci souvent excentrique, de deux à deux et demi-centimètres de hauteur, épais dans les individus qui croisent isolés, ordinairement un peu aplati, dilaté vers le haut, coloré comme l'hyménium, excepté à sa base, qui est plus pâle, tomenteuse et fortement renflée. Chair du chapeau et du stipe d'un brun pâle grisâtre. Odeur faible rappelant celle du suc de réglisse. Saveur douce, puis mucilagineuse.

N'a certainement ni les caractères de l'*Hydnum suaveolens*, comme on pourrait le croire à cause de son odeur, ni ceux de l'*Hydnum nigrum*, auquel Fries réunit le Champignon de Persoon. Il vient naturellement se placer à côté de l'*Hydnum cinereum* Bull., qui en diffère, du reste, beaucoup. Ce dernier, limité, paraît-il, à une partie de la France, n'est cité ni en Angleterre, ni en Allemagne [1], et nous doutons qu'il existe en Belgique, où il a cependant été signalé par M. Mathieu.

Croît, solitaire ou agrégé, dans les sapinières d'Aeltere. M. le docteur Ed. Martens l'a également trouvé aux environs de Louvain.

75. **HYDNUM MUCIDUM** Pers. Fries., *Epicr.* Ejusdem, *Syst. mycol.*, pag. 518.

Résupiné, diversement étalé, membraneux, d'abord blanchâtre, puis prenant une teinte jaune, velu en dessous et sur ses bords, à surface extérieure glabre ou pubescente, ainsi que les aiguillons de l'hyménium, qui sont assez longs, très-rapprochés, subulés, grêles et peu roides.

[1] Rabenhorst l'indique, il est vrai, près de Dresde; mais les détails qu'il donne sur sa plante feraient croire qu'il a eu sous les yeux une autre espèce.

Digitized by Google

Le premier développement de cette espèce ressemble à celui de certaines Téléphores. Elle acquiert quelquefois, d'après Albertini et Schweiniz, plusieurs aunes de longueur.

Recueilli, par M. Demey, sur un vieux saule, aux environs de Gand.

76. THELEPHORA ACERINA Pers. STEREUM ACERINUM Fr., *Epicr.* Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XL, n° 2162.

Voisine de la *Thelephora calcea,* également glabre, mais comme pruineuse dans sa jeunesse, d'un blanc moins mat, moins étalée, et crustacée-adnée. Je n'y ai point vu de fructification.

Sur les vieux troncs de l'*Acer campestre,* dans la campagne de M. De Smet à Rooborst. Printemps.

77. THELEPHORA OCHRACEA Fr., *Syst.* CORTICIUM OCHRACEUM Fr., *Epicr. Systematis mycologici,* pag. 563.

Étalée, agglutinée, d'une consistance molle, incomplétement glabre, sale jaunâtre dans sa jeunesse et entourée alors d'une zone byssoïde blanche : ocracée quand elle est adulte et éparpillée de papilles d'un jaune doré; devenant ensuite plus ou moins tuberculeuse.

Sur un pieu de sapin écorcé et pourri, au Jardin Botanique de Gand. Fin de l'automne.

BYSSOIDÉES.

78. TORULA PINOPHILA Chev. MONILIA PICEÆ Funck. ANTENNARIA PINOPHILA Nees. RACODIUM PITHYOPHILUM Wallr. — Corda, *Icon. Fungor.,* tom. V, tab. II, fig. 50.

Croûte fuligineuse, grumelée, inégale, formée de filaments entre-croisés, réunis sur une espèce de pseudostrome. Ces filaments sont rameux, moniliformes, composés de sporidies ovoïdes, tronquées aux deux bouts, brunâtres quand on les voit isolées et subdiaphanes.

Doit faire, selon Fries [1], le type d'un genre à placer à côté des *Torula* et qu'il propose de nommer *Antennatula*. Son développement n'a pas encore été suffisamment observé.

Sur les jeunes rameaux languissants du *Pinus picea*, dans une campagne aux environs d'Audenarde, d'où nous l'a communiquée M. Coppin.

79. STILBUM XANTHOCEPHALUM Dittm. Stilbum minimum α *nigripes* Tod.? — Sturm, *Deutschl. Flor.*, II Abth., tab. LX (*ex* Wallroth).

Stipe filiforme, rigide, atteignant jusqu'à cinq millimètres de hauteur, d'abord gris, puis noirâtre. Capitule globuleux, jaunâtre dans sa jeunesse, devenant ensuite successivement couleur de chair terne et jaune d'abricot, diaphane dans ce dernier état. Spores très-abondantes, très-petites, ovoïdes, obtuses aux deux bouts.

Les stipes sont souvent soudés sur une partie de leur longueur, ce qui les fait alors paraître rameux. Ils sont glabres, mais quelquefois couverts d'une très-petite moisissure qui leur donne au premier abord un aspect velu. Le capitule est jaune, d'après Fries, fauve d'après Wallroth.

Croît, le plus souvent réuni en touffes de trois à dix individus [2], sur les branches du *Rhamnus frangula*, servant de tuteurs, au Jardin Botanique de Gand. Octobre.

80. SPOROTRICHUM VITELLINUM Lk. Wallr., *Flor. Germ. crypt.*, t. II, pag. 278, nº 1844.

Filaments blanchâtres, hyalins, très-minces, rameux, couchés, entrelacés, formant une couche étalée couverte de sporidies globuleuses, très-petites, d'un jaune d'œuf.

Nous n'avons pas observé que les sporidies pâlissent, ainsi que le disent

[1] *Summ. veget. Scandinav.*, t. II, p. 407, en note.

[2] « *Hyphis gregariis* » dit aussi Wallroth, tandis que Fries, comparant cette espèce au *Stilbum piliforme*, dont les stipes sont fasciculés, ajoute : *sed magis sparsim nascens*.

Digitized by Google

Link et Wallroth. Cette espèce diffère du *Sporotrichum aurantiacum* [1] avec laquelle elle est souvent confondue, non-seulement par la couleur des sporidies, mais encore et surtout par ses filaments non crépus.

Sur la résine des bouchons, dans une cave, et aussi, d'après Fries, sur le bois de sapin scié.

81. SPOROTRICHUM CINNAMOMEUM Wallr. Rabenh., *Deutschl. Krypt. Flora*, I, pag. 81.

Filaments très-délicats, lâchement entrelacés, grisâtres, formant d'abord de petits groupes arrondis, assez élevés, qui s'étendent ensuite en une espèce de feutre très-délié. Sporidies très-abondantes, globuleuses, très-petites, d'un brun de cannelle.

Les auteurs que nous avons pu consulter décrivent les filaments comme ayant la couleur des sporidies. Nous nous sommes assuré du contraire.

Sur la gaîne pétiolaire des feuilles pourrissantes du dattier, au Jardin Botanique de Gand.

ALGUES.

82. LAMINARIA DIGITATA Lmx β *stenoloba* Nob. LAMINARIA STENOLOBA Delap., *Ann. des scienc. nat.*, 1re série, tom. IV (1825), pl. IX, fig. *K*.

Fronde oblongue, cunéiforme à sa base, à lanières étroites, d'un vert olivâtre, d'un port svelte, mesurant de six à huit décimètres de hauteur, dont deux ou trois pour le stipe, sur deux décimètres de largeur. Le stipe diffère de celui du type en ce qu'il est marqué de lignes longitudinales qui se prolongent, dans un de nos échantillons, sous forme de stries simples et parallèles, jusqu'à l'extrémité des segments de la fronde, presque sans interruption et en imitant des nervures. Dans un autre échantillon plus jeune, deux segments sont soudés par leur bord sur une étendue de douze centimètres, en laissant une crête qui a jusqu'à sept millimètres de largeur.

[1] Voir *Deuxième Centurie*, p. 42.

Enfin, dans un troisième individu, où le stipe est moins régulièrement rayé, la fronde, dépourvue de stries, offre de grandes bulles vésiculeuses, comme on en remarque dans la *Laminaria saccharina β bullata* [1].

Le type de l'espèce déjà indiquée dans notre *Bouquet botanique*, et dont l'aspect est bien rendu par la figure de Gmelin, a, au contraire, une fronde d'un jaune brunâtre, plus dilatée, largement flabelliforme, arrondie ou cordiforme à sa base, à lanières plus souvent larges qu'étroites. Stipe anguleux, imparfaitement arrondi ou comprimé, variant en longueur et atteignant chez nous jusqu'à cinq décimètres. La fronde varie aussi en dimension : elle est en général plus grande quand le stipe est court, plus courte lorsque ce dernier est long [2].

Nous croyons utile de faire remarquer que la *Laminaria digitata* typique a été quelquefois prise pour la *Laminaria latifolia* C. A. Agdh., dont Areschoug a fait sa *Laminaria digitata β latifolia*; mais il y a eu là évidemment erreur, puisque l'espèce d'Agardh doit avoir une fronde entière. Aussi J.-G. Agardh (*Spec. gen. et ord. Algar.*, I, 132) a-t-il rapporté cette dernière à la *Laminaria saccharina*. Il résulte de là que la distinction admise par Areschoug [3] pour la *Laminaria digitata*, qu'il divise en : *α. vera* et *β. latifolia*, est inadmissible.

La *Laminaria digitata β stenoloba* nous a été communiquée de la côte d'Ostende, où elle est rare, par M. Mac-Leod.

83. NITOPHYLLUM GMELINI Grev. SCHIZOGLOSSUM GMELINI Kütz. DELESSERIA GMELINI Lmx. *Ess.*—Desm., *Pl. crypt. de la France*, fasc. XLIII, nº 2116.

Fronde irrégulièrement arrondie, d'un beau rose, composée de segments flabelliformes, plus ou moins obliques, rétrécis à la base, ondulés sur le bord, diversement lobés ou laciniés, à extrémités obtuses ou aiguës et dépourvues de veines. Stipe court, cartilagineux, atténué de haut en

[1] Voir *Quatrième Centurie*, p. 53.

[2] Pour donner une idée de la taille que l'espèce est susceptible d'acquérir, nous rappellerons que Wahlenberg l'a vue sur les côtes de la Finnmarchie dépassant trois fois la hauteur de l'homme et avec un stipe de la grosseur du bras.

[3] *Phyceæ Scandinaviæ marinæ*, p. 122.

Digitized by Google

bas, pourvu d'une côte qui se ramifie à son sommet, chaque ramification se dirigeant vers un des segments de la fronde, où elle s'évanouit.

Appartient à la section du genre où les conceptacles sont disposés en lignes étroites marginales.

Trouvé sur l'estran, entre Nieuport et Oostdunkerke, en septembre.

84. RHODYMENIA PALMETTA β *Elisiæ* Lenorm. HALYMENIA PALMETTA β *Elisiæ* Dub. DELESERIA ELISIÆ Lenorm., *Herb.* — Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XLIII, n° 2105.

Fronde plus ou moins cunéiforme, dichotome, à segments fastigiés, allongés, étroits, atténués vers le haut et le plus souvent acuminés, quelques-uns d'entre eux s'atrophiant en filets également dichotomes et un peu aplatis. Conceptacles réunis près des sommets en une tache arrondie-oblongue peu distincte.

Intermédiaire entre le type[1], qui a les segments plus étalés, plus larges, raccourcis, obtus ou bifides, et la variété γ *Nicæensis,* Agd., *Medit.,* chez laquelle ils se terminent en un prolongement filiforme dichotome et cylindracé. La *Rhodymenia palmetta* est, du reste, une espèce polymorphe dont l'*Halymenia nicæensis* Lmx. (qu'il ne faut pas confondre avec la variété de même nom que nous venons de citer) et l'*Halymenia discocarpa* Dub., ne sont, d'après J.-G. Agardh, que de simples formes. L'Algue figurée sous la dénomination de *Rhodymenia palmetta* par Areschoug[2] pourrait bien ne pas appartenir à ce genre.

Sur les stipes des Laminaires. Ostende. Mac Leod.

85. LOMENTARIA ARTICULATA Lyngb. *excl.* var. GASTRIDIUM ARTICULATUM Grev., *Alg.* CHYLOCLADIA ARTICULATA Hook. — Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XXV, n° 1225.

Touffes de trois à six centimètres de hauteur, un peu décombantes, d'une couleur rouge sanguine, celle des jeunes rameaux rose, pâlissant et verdissant par une dessiccation trop rapide. Fronde cylindracée, étran-

[1] Voir Desm., *Pl. crypt.*, fasc. III, n° 108.
[2] *Phyceæ Scandin. marinæ*, pl. III, *B.*

Digitized by Google

glée en chapelet, dichotome, souvent trichotome vers le haut. Rameaux dressés-étalés, allongés. Mérithalles 3-5 fois plus longs que larges, les supérieurs portant des conceptacles latéraux sessiles, conoïdes, tronqués au sommet, et donnant naissance, au-dessous de leur étranglement, à des ramules raccourcis, quelquefois verticillés, où se forment, d'après J.-G. Agardh, les sphérophores.

Recueillie sur la tige des grandes Algues, entre autres, de la *Laminaria digitata*, entre Nieuport et la Panne.

86. HUTCHINSIA VIOLASCENS Kütz., *Phyc. Germ.* sub *Polysiphonia* [1].
POLYSIPHONIA VIOLACEA Kütz., *Phyc. gener.*, 421 *nec* 426.

Touffes de dix à douze centimètres de hauteur, noirâtres et un peu pourprées à l'état frais, prenant, par la dessiccation, une couleur grise-violacée. Frondes très-rameuses, à rameaux assez rigides, ridés, comme anguleux, dichotomes, distants, portant des ramules étalés. Articulations inférieures aussi longues que larges : les supérieures un peu plus longues que leur diamètre. Vingt siphons à la base. Capsule ovoïde.

Intermédiaire, pour le port, entre la *Polysiphonia violacea* Grev., et la *Polysiphonia nigrescens*. D'après Kützing, les siphons deviennent confluents et se réduisent à dix dans les parties supérieures, où ils sont, du reste, très-peu marqués.

Croissait sur un *Buccinum undulatum* couvert de serpules et jeté sur la plage, à Nieuport.

87. DASYTRICHIA SPONGIOSA Lmx. CLADOSTEPHUS SPONGIOSUS Agdh. — Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. VIII, n° 353.

Touffes de deux à cinq centimètres de hauteur, d'un vert foncé devenant noirâtre, composées de cinq à huit ramifications sortant d'une base commune, cylindracées, atténuées au sommet, généralement fourchues

[1] Nous ne conservons à ce genre le nom de *Hutchinsia*, que parce que nous l'avons adopté dans nos premières centuries.

Digitized by Google

ou bifourchues, densément couvertes, depuis la base, de nombreux ramuscules sétiformes, les uns étalés, les autres strictes, droits ou recourbés à leur sommet et disposés en verticilles confluents qui cachent complétement l'axe.

Très-rare sur la côte d'Ostende, d'où je l'ai reçue de M. Mac Leod en 1849.

88. **DASYTRICHIA VERTICILLATA** Lmx. Cladostephus verticillatus Agdh., *Syn.* Cladostephus myriophyllum Agdh., *Spec.* — Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. VIII, nº 352.

Diffère de la précédente par sa taille plus grêle, plus élancée, ses ramifications plus étalées, plus nombreuses, inférieurement dénudées, ses verticilles distincts, ses ramuscules moins étroits, non subulés, recourbés vers l'axe et portant sur leur côté extérieur, principalement dans le milieu et le bas de la fronde, de petits prolongements spinæformes qui les rendent cristés.

Cette espèce, dont le port, quand on l'examine à la loupe, n'est pas sans analogie avec celui de certaines Characées, ne se trouve pas citée dans la *Flore* de M. Mathieu, quoique nous l'ayons déjà indiquée sur nos côtes en 1837. C'est ce qui nous a engagé à donner ici les principaux caractères différentiels.

Plus commune que la précédente, mais peu abondante. D'Ostende à Nieuport.

89. **PHYCOPHILA FLACCIDA** Kütz. Elachista flaccida Aresch. Desm., *Pl. crypt. de la France,* fasc. XXXVII, nº 1804.

Au lieu d'être d'un vert ferrugineux, comme la *Phycophila ferruginea* [1], cette espèce est, au contraire, colorée en brun verdâtre qui devient d'un brun ferrugineux, terne, par la dessiccation. Filaments flasques. Mérithalles cylindriques, les inférieurs plus courts que leur diamètre transversal, les supérieurs aussi longs que larges.

[1] *Converva ferruginea* Roth. — *Première Centurie*, p. 43.

Digitized by Google

Ce genre du groupe des *Mésogloïacées* se caractérise par des filaments simples, rarement fourchus près leur base, articulés, libres, claviformes, sporidifères, entremêlés de paraphyses ou filets stériles, et naissant d'un hypothalle convexe très-petit et adné.

Sur plusieurs Fucoïdées, et surtout sur les *Fucus serratus* et *vesiculosus* de nos côtes. Hiver.

90. CLADOPHORA PATENS Kütz. Kütz., *Tabul. phycolog.*, tom. III, tab. XCVIII.

D'un vert pâle qui devient gris enfumé en se desséchant. Filaments lâches, de quinze centimètres de long, diffus, dichotomes, à ramifications distantes, solitaires, alternes, raccourcies et très-étalées. Mérithalles généralement de quatre à six fois plus longs que larges.

Tous les mérithalles n'ont pas la même longueur. Nous n'en avons pas observé qui aient moins de quatre fois leur diamètre, mais il en est qui l'ont plus de six fois, comme, du reste, la figure de Kützing le montre également.

C'est à ce genre qu'appartiennent les *Conferva* décrites dans nos précédentes *Centuries*, à l'exception toutefois de la *Conferva ferruginea*. Les Cladophores sont munies d'une racine, ont toujours des filaments rameux, composés de cellules à parois, d'abord simples, puis lamelleuses, parmi lesquelles il en est qui donnent naissance, en se gonflant, à un fruit ou bulbille elliptique et brunâtre.

Dans les eaux saumâtres, à Nieuport.

91. CLADOPHORA LYNGBYANA Kütz. CONFERVA RUPESTRIS Lyngb. *non* Linn.—Lyngb., *Hydrophytol. Danic.*, tab. LIV, fig. *B*.

Touffes vertes devenant jaunâtres. Filaments soyeux, capillaires, longs, très-rameux. Rameaux peu distants, fasciculés ou comme verticillés, généralement dichotomes, quelquefois trichotomes. Mérithalles pellucides à leur point de jonction, les supérieurs ventrus, deux fois aussi longs que larges, les inférieurs dépassant de trois à six fois leur largeur.

Digitized by Google

Moins délicate et à filaments moins minces que la *Cladophora sericea*[1], dont elle a plus ou moins l'aspect.

Recueillie à Ostende, où elle était mêlée à une masse de fucus rejetée sur la plage, par notre honorable collègue et ami M. le professeur Poelman.

92. CLADOPHORA LONGISSIMA Kütz. Kütz., *Tabul. phycolog.*, vol. IV, tab. XXXVII.

Touffes longues de plusieurs pieds, étalées, d'un vert foncé, prenant, par la dessiccation, une teinte légèrement jaunâtre. Filaments un peu atténués de bas en haut; ceux qui forment les axes primaires beaucoup plus gros que les autres, très-rameux, à derniers ramuscules raccourcis, alternes, ou quelquefois insérés plusieurs de suite du même côté. Mérithalles de quatre à huit fois plus longs que larges.

Trouvée dans l'Escaut, à Ledeberg, sur des pierres, par M. le professeur Scheidweiler.

93. CLADOPHORA OLIGOCLONA Kütz. Kütz., *Tabul. phycolog.*, vol. IV, tab. LIV.

D'un vert foncé à l'état frais, devenant d'un jaune grisâtre à l'état sec. Filaments allongés, diffus, minces, grêles, dichotomes, à dichotomies éloignées. Rameaux très-longs, plus ou moins débiles, infléchis ou courbés, portant sur leur côté externe des ramuscules très-courts et obtus. Mérithalles cylindriques, inégaux, le plus souvent de quatre à six fois aussi longs que leur diamètre transversal, rarement plus.

Dans les fossés d'eau douce, aux environs d'Ostende. M. Mac Leod.

[1] Il s'est glissé une erreur dans notre description de la *Conferva* ou *Cladophora sericea* (2e *Cent.*, p. 45). Au lieu de « rameaux étalés à angle droit », il faut y lire « rameaux étalés, insérés à angle aigu. » Nous ferons remarquer, par cette occasion, que le n° 153 de la collection de M. Desmazières, cité dans cet article, est considéré aujourd'hui par ce botaniste comme se rapportant à la *Conferva lætevirens*, publiée sous le n° 1360. Cette citation doit donc être remplacée par celle de Lyngb. *Hydrophyt. Danic.*, tab. LIII, fig. A. *Excl. var.*

Digitized by Google

94. ENTEROMORPHA PERCURSA J. Agdh., *Alg. med.* Solenia percursa C. A. Agdh., *Syst.* Schizogonium percursum Kütz. Scytosiphon compressus *γ confervoideus.* Lyngb., *Hydrophyt. Dan.*, tab. XV, B, fig. 4-6.

D'un aspect confervoïde et d'un vert gai. Frondes simples, plus ou moins capillaires, tubuleuses, parcourues par une ligne ou espèce de bandelette étroite, longitudinale, et transversalement réticulée par des stries qui la partagent en aréoles presque aussi longues que larges, renfermant chacune trois sporidies ridées.

La ligne longitudinale est due à la formation d'une troisième série d'aréoles ou de cellules, comme J. Agardh l'a déjà fait remarquer. Elle nous a paru disparaître quand la fronde est complétement développée.

Dans les eaux marines et saumâtres, aux environs d'Ostende. Printemps et Été.

95. VAUCHERIA DILLWYNII Web. et Mohr. Conferva frigida Dillw. (*non Vaucheria frigida* Agdh.). — Rœmer, *Die Algen Deutschl.*, tab. I, fig. 14.

Filaments capillaires, un peu rigides, marqués çà et là de très-fines ponctuations verruculeuses, obtus à leur sommet, irrégulièrement rameux, flexueux, couchés et entre-croisés, formant une couche assez épaisse d'un vert foncé. Conceptacles solitaires, insérés latéralement le long des filaments, sessiles et globuleux.

La *Conferva amphibia*, Linn., est considérée par Rœmer comme synonyme. La figure de Dillen, citée par le naturaliste suédois, ferait, en effet, croire qu'il s'agit bien d'une Vaucherie; mais nous pensons qu'il est impossible d'en déterminer l'espèce.

Sur les rives de la Noord-Hée, près d'Ostende, d'où nous la transmise M. Mac Leod.

96. CHÆTOPHORA ENDIVIÆFOLIA Kütz., *Tabul. phycolog.*, vol. III, tab. XXI, fig. 1*a* 1*b*.

Étalée, rameux, comme pinnatifide, et d'un beau vert. Filaments internes

Digitized by Google

de deux sortes : ceux du centre parallèles, à cellules allongées, ceux de la périphérie fasciculés en rameaux divariqués, dont les ramifications ont des cellules plus larges que hautes et le sommet longuement subulé, piliforme, hyalin.

Le type se distingue à ses rameaux élargis dès leur base. Il n'a pas été jusqu'ici indiqué en Belgique; car la description et la synonymie données par M. Mathieu, sous le nom de *Chætophora endiviæfolia*, sont évidemment celles de la variété *β. Cornu Damæ* [1], beaucoup plus commune, inférieurement cylindracée, supérieurement aplatie et dilatée.

Nous mentionnerons, en outre, les deux variétés suivantes : 1° *Chætophora endiviæfolia γ polyclados* (Kütz., *l. l.*, tab. XXI, fig. 2), à laquelle appartient la synonymie d'Agardh, citée par M. Mathieu et qui se distingue par ses ramifications plus nombreuses, raccourcies, légèrement élargies à leur sommet; 2° *Chætophora endiviæfolia δ linearis* (Kütz., *l. l.*, tab. XXI, fig. 3), reconnaissable à ses rameaux allongés, linéaires et dichotomes.

L'espèce croît dans les fossés, le long du chemin de fer de l'État, près de la station : *γ* a été trouvée par M. Mac Leod dans les polders, aux environs d'Ostende : *δ* par M. Scheidweiler, à Melle, près de Gand, où elle croissait pêle-mêle avec la variété *β*.

97. CHÆTOPHORA ELEGANS Kütz., *Phyc. German.* — Kütz., *Tabul. phycol.*, vol. III. tab. XX, fig. 1.

Globuleuse, d'un vert gai, de la taille de la *Chætophora pisiformis*, lisse comme elle. Filaments internes, homogènes, à cellules plus hautes que larges, donnant naissance à des fascicules de rameaux lâches, allongés, grêles, terminés par un prolongement filiforme très-fin, très-court, formé par la cellule apicale.

Dans un fossé, à Melle, d'où cette espèce m'a été communiquée par M. Planchon, aujourd'hui professeur de botanique à Monpellier.

[1] Le *Fucus fontanus pinguis corniculatus viridis*, Vaill., *Bot. Par.*, tab. X, fig. 3, cité par Roth et Agardh, *Syst.* pour cette variété, nous paraît être une *Jungermannia*.

Digitized by Google

98. NOSTOC LICHENOIDES Kütz., *Phyc. German.*, pag. 168. Kütz., *Tabul. phycolog.*, tom. II, tab. II, fig. 3.

C'est à tort que, dans une publication récente sur notre *Flore* [1], cette espèce se trouve encore décrite comme se présentant sous la forme d'une membrane étalée, difforme et crépue, d'un noir olivâtre, diagnose qui rend méconnaissable l'objet auquel elle s'applique. L'erreur paraît provenir de ce que Vaucher, qui attribua le premier ces caractères au *Nostoc lichenoïdes*, en avouant, toutefois, qu'il ne l'avait pas assez bien observé pour le décrire exactement [2], a pris, comme faisant partie de la plante, le thalle d'un *Collema* sur lequel il l'avait rencontrée [3].

L'Algue qui nous suggère ces réflexions croît, au contraire, sous forme de globules plus ou moins sphériques, solides, durs, dont la taille varie entre celle d'un grain de moutarde et celle d'un pois et qui sont amoncelés en petits tas ou rarement disposés en couche. Leur couleur est le vert de bouteille à l'état frais, mais elle brunit par le desséchement. Les filaments internes, lâchement entortillés et d'un vert-de-gris olivâtre, sont composés de cellules ovoïdes dépourvues de granulations et qui se désagrégent aisément.

On trouve quelquefois pêle-mêle avec l'espèce des individus isolés, mesurant jusqu'à huit millimètres, dont les filaments nous ont offert des cellules un peu plus arrondies que celles du type. C'est sans doute la variété *β vesicæforme* dont parle Rœmer [4], variété qu'il ne faut pas confondre, du reste, avec le *Nostoc vesicarium* Dec.

Abondant dans les lieux humides des dunes, à la pointe de Cnocke. Juillet et août.

[1] *Flore générale de Belgique*, t. II (1854), p. 516.

[2] Vaucher, *Hist. des Conferves d'eau douce*, p. 227.

[3] Depuis lors, quelques auteurs ont prétendu que le *Nostoc muscorum* et le *Nostoc commune*, qui ont l'un et l'autre un thalle étalé, se transforment, le premier, en *Collema melænum*, l'autre, en *Collema scotinum*.

[4] *Die Algen Deutschlands*, p. 46.

Digitized by Google

99. NOSTOC SPHÆROIDES Kütz., *Tabul. phycolog.,* tom. II, pag. 2, tab. IV, fig. 1, 2.

D'un vert foncé ou brunâtre, lenticulaire dans le jeune âge, puis un peu pezizoïde, ensuite globuleux, quelquefois légèrement oblong, toujours creux et vide à l'intérieur. Filaments internes lâchement entre-croisés, généralement renflés à l'une des extrémités et y présentant alors, dans la partie renflée, une double série de cellules latéralement contigus. Cellules globuleuses, subtilement granuleuses à l'intérieur.

Varie de quatre à douze millimètres de diamètre. Par la dessiccation la plante s'affaisse et prend la forme membraneuse.

Parmi les mousses, sur le bord des fossés, dans les enfoncements des dunes, à Heyst, où cette espèce a été découverte, au mois d'août, après une grande pluie d'orage, par M. le vicaire Eug. Coemans.

100. PROTOCOCCUS COCCOMA Kütz., *Tabul. phycolog.,* I, pag. 2, tab. II, fig. 1.

Cellules sphériques à membrane mince, intérieurement très-granuleuses, formant une couche d'un rouge de cinnabre qui passe quelquefois légèrement au vert.

Confondue d'abord par Kützing avec le *Protococcus botryoïdes,* qui est d'un rouge orangé et dont les cellules sont généralement agglomérées en forme de poire ou de massue, comme l'a déjà fait remarquer M. Desmazières (*Pl. crypt.,* 2me série, fasc. III, n° 123).

Sur la terre nue et humide, dans le bois de Knesselaere. Juin 1851.

FIN DE LA CINQUIÈME ET DERNIÈRE CENTURIE.

Digitized by Google

Digitized by Google

b 5

TABLE

DES

ESPÈCES ET DES VARIÉTÉS DÉCRITES DANS LES CINQ CENTURIES.

Actinothyrium graminis, II, 29 [1].
Æcidium adoxæ, IV, 32.
— allii, IV, 30.
— behenis, V, 26.
— convallariæ, IV, 30.
— glaucis, V, 27.
— loniceræ, IV, 31.
— orchidearum, IV, 32.
— scabiosæ, V, 27.
— thesii, V, 26.
— zonale, IV, 31.
Agaricus acutesquamosus, I, 31.
— adonis, I, 34.
— adustus, III, 36.
— æruginosus, II, 36.
— alutaceus, II, 35.
— applicatus, I, 36.
— arcuatus, IV, 43.
— arenarius, V, 36.
— austriacus, V, 37.
— Candollianus, V, 40.
— chloranthus, I, 35.
— conicus β nigricans, III, 37.
— cristatus, III, 36.
— delicus, II, 35.
— epixanthus, IV, 46.
— extinctorius, III, 39.
— fœnicesii, V, 41.
Agaricus fragilis, I, 33.
— fuscescens, IV, 47.
— inversus, V, 36.
— lupuletorum, II, 36.
— mammosus, I, 37.
— mappa, III, 35.
— nigricans, IV, 44.
— niveus, III, 38.
— ocellatus, I, 34.
— odorus, IV, 45.
— pessumdatus, I, 32.
— plumbeus, I, 32.
— polygrammus, IV, 45.
— pudicus, IV, 46.
— purus, III, 37.
— radians, V, 42.
— ramentaceus, IV, 42.
— raphanoïdes, I, 37.
— recutitus, IV, 42.
— repandus, V, 39.
— rosellus, I, 34.
— rubiginosus, V, 40.
— russula, I, 32.
— salignus, III, 37.
— — β fuscescens, V, 38.
— sanguineus, I, 33.
— septicus, I, 37.
— striatulus, I, 36.

[1] Les chiffres arabes indiquent les pages.

Digitized by Google

Agaricus tabularis, V, 41.
— tergiversans, V, 42.
— tomentosus, III, 39.
— vellereus, II, 35.
Antennaria pinophila, V, 51.
Ascophora mucedo, IV, 51.
Aspergillus griseus, IV, 49.
Aspidium lobatum, I, 5.
Aspidium filix femina β pumilum, II, 6.
Asteroma cacaliæ, V, 18.
— cratægi, II, 23.
Asterosporium Hoffmanni, III, 29.
Athyrium filix femina β pumilum, II, 6.
Auricularia tremelloïdes, I, 40.
Barbula. *Voyez* Tortula.
Bartramia ithyphylla, V, 6.
Boletus æneus, II, 38.
— chrysenteron, V, 44.
— flavus, III, 41.
— fulvidus, I, 38.
— lupinus, III, 42.
— pachypus, II, 38.
— piperatus, I, 38.
— sanguineus, II, 37.
— satanas, IV, 47.
— subtomentosus β sistotremoïdeus, V, 41.
Botrytis cinerea, IV, 51.
— effusa, IV, 52.
— fallax, III, 45; IV, 52.
— farinosa, IV, 52.
— grisea, II, 41.
— parasitica, III, 46.
Bovista plumbea, I, 24.
Bryum androgynum, II, 7.
— annotinum, II, 6.
— atropurpureum, IV, 9.
— cernuum, IV, 8.
— inclinatum, IV, 9.
— intermedium, I, 6.
— pallens, V, 7.
— uliginosum, V, 8.
Bulgaria sarcoïdes, I, 29.
Calicium hyperellum, II, 21.
— lenticulare, III, 13.
— subtile, II, 21.
— trachelinum, II, 21.
— turbinatum, IV, 18.
Cantharellus brachypodes, V, 43.
— bryophilus, II, 37.
Catharinea angustata, V, 13.
— hercynica, II, 10; V, 13.
— tenella, V, 13.
Carpobolus cyclophorus, I, 24.
— stellatus, I, 23.
Cenomyce cenotea, II, 15.
Ceramium Delongschampii, III, 50.
— rubrum, I, 44.
— — β diaphanum, III, 49.
— tetricum, III, 50.
— variabile, IV, 59.
Chænocarpus setosus, III, 14.
Chætophora elegans, V, 61.
— endiviæfolia, V, 60.
Chara. Voyez Nitella.
Cheilaria arbuti, IV, 21.
Chondrus mamillosus, III, 48.
— norwegicus, II, 44.
— polymorphus z lacerus, III, 48.
Chordaria filum, II, 44.
Cladonia glauca, I, 12.
Cladophora catenata, II, 44.
— fracta, I, 43.
— longissima, V, 59.
— Lyngbyana, V, 58.
— oligoclona, V, 59.
— patens, V, 58.
— rupestris, II, 45.
— sericea, II, 45.
Cladostephus. *Voyez* Dasytrichia.
Clavaria crispula, IV, 39.
— gracilis, I, 30.
— juncea, III, 34.
— — β gracilis, III, 34.
Collema nigrescens, IV, 17.
— sinuatum, II, 15.
Conferva. *Voyez* Cladophora et Phycophila.
Coniothecium betulinum, III, 28.
Cornicularia aculeata β muricella, V, 16.
Corticium. *Voyez* Telephora.
Coryneum disciforme, IV, 37.
Craterium leucocephalum, III, 23.
— minutum, III, 23.
Cronartium asclepiadeum, IV, 29.
Cryphæa heteromalla, I, 8.

Digitized by Google

Cryptothamnium usneæforme, III, 14.
Cystoseira fibrosa, III, 47.
Dasytrichia spongiosa, V, 56.
— verticillata, V, 57.
Delesseria alata, II, 42.
Desmaretia aculeata, IV, 55.
Dicranum cerviculatum, III, 8.
— majus, IV, 13.
— rugosum, IV, 14.
— rufescens, II, 9.
— scoparium δ fuscescens, II, 10; IV, 14.
— spurium, IV, 12.
Didymium cinereum, II, 29.
— farinaceum, IV, 29.
— nigripes, III, 25.
— xanthopus, III, 25.
Didymodon capillaceus, III, 7.
— homomallus, III, 8.
— pusillus, III, 7.
Didymosporium carpini, V, 30.
Diplodia æsculi, IV, 26.
— corchori, I, 20.
— ilicicola, II, 28.
— rudis, IV, 27.
— visci, I, 21.
— viticola, III, 20.
Dothidea betulina, III, 14.
— depazeoïdes, I, 17.
— genistalis, V, 17.
— puccinioïdes, I, 17.
— *stellaris,* I, 21.
Elachista flaccida, V, 57.
Elaphomyces granulatus, I, 24.
Encalypta streptocarpa, III, 9.
Endocarpum Hedwigii, I, 14.
Enteromorpha percursa, V, 60.
Epicoccum neglectum, III, 31.
— purpurascens, III, 31.
Equisetum capillare, IV, 5.
— variegatum, II, 5.
Erysiphe ferruginea, III, 22.
Funaria hibernica, IV, 7.
— microstoma, I, 6.
Furcellaria lumbricalis, II, 43.
Geaster fimbriatus, V, 25.
Geoglossum glutinosum, I, 30.
Grimmia apocarpa, I, 11.
Gyalecta cupularis, I, 16.
Gymnostomum fasciculare β serratum, II, 11.
Halymenia Brodiæi, IV, 56.
— palmata, III, 48.
Helmintosporium macrocarpum, II, 41.
— pyrorum, III, 45.
Helvella crispa, IV, 41.
— Ludovicæ, IV, 40.
— monacella, II, 34.
Hindersonia maculans, IV, 27.
— yuccæ, IV, 28.
Hutchinsia fastigiata, I, 45.
— nigrescens, IV, 56.
— patens, I, 45.
— Richardsoni, IV, 57 [1].
— subulata, IV, 58.
— violacea, IV, 58.
— violascens, V, 56.
Hydnum cinereum, V, 50.
— cyathiforme, I, 40.
— mucidum, V, 50.
— squamosum, V, 49.
Hyphasma thelena, II, 23.
Hypnum Blandowii, II, 8; IV, 12.
— confertum, III, 6.
— denticulatum β sylvaticum, IV, 11.
— scorpioïdes, IV, 10.
— stellatum, I, 8.
— Stokesii, V, 9.
Hypoxylum berberidis, I, 18.
— coccineum, I, 19.
— melogrammum, I, 18.
— scabrosum, I, 18.
Hysterium pinastri β juniperinum, II, 28.
— Prostii, III, 21.
— scirpinum, II, 28.
Illosporium carneum, II, 32.
Imbricaria Clementiana, II, 16.
— flavoglaucescens, I, 13.
— obscura, IV, 16.
— sinuosa, I, 13.
Jungermannia barbata, IV, 15.
— bicuspidata, III, 10.

[1] La synonymie de Desm., *Pl. crypt.*, doit y être supprimée.

Digitized by Google

Jungermannia byssacea, I, 11.
— compacta, II, 12.
— Funckii, V, 15.
— obtusifolia, V, 14.
— reptans, II, 13.
— sphagni, II, 12.
— trichomanes, V, 14.
— undulata, III, 10.
Laminaria digitata β stenoloba, V, 53.
— phyllitis, IV, 55.
— saccharina β bullata, IV, 53.
— — γ latifolia, IV, 54.
Laurencia pinnatifida, III, 49.
— — β osmunda, III, 49.
Lecanora brunnea, II, 20.
— cupularis, I, 16.
— elacista, V, 17.
Lecidea aggregata, II, 18.
— aromatica, II, 19.
— atro-alba, II, 20.
— contigua, III, 11.
— corticola, I, 15.
— dryina, II, 18.
— fuliginosa, V, 16.
— geographica, III, 12.
— glomerulosa, III, 12.
— milliaria, I, 15.
— parasema β myriocarpa, II, 19.
— pinicola, II, 19.
— rosella, IV, 17.
— sanguinaria, II, 18.
Lemanea fucina, I, 42.
Lenzites abietina, III, 41.
Leptostroma pteridis, I, 22.
Leskea attenuata, I, 7.
— polycarpa, I, 7 [1].
— subtilis, III, 5.
Lobaria perlata β cetrarioïdes, II, 16.
Lomentaria articulata, V, 55.
— opuntia, I, 45.
— pygmea, I, 45.
Lunularia vulgaris, I, 12.
Lycogala parietina, V, 25.
Lycoperdon papillatum, II, 30.
— saccatum, I, 25.
Lycopodium selago β patens, IV, 6.
Marchantia commutata, II, 13.
Melanconium bicolor, III, 28.
— microsporum, II, 31.
— ovatum, I, 26.
— sphærospermum, I, 26.
Melasmia acerina, IV, 20.
Merulius destruens, III, 39.
Micropera drupacearum, IV, 19.
Mitrula paludosa, II, 34.
Neckera heteromalla, I, 8.
Nitella flabellata, V, 6.
— intricata, V, 5.
Nitophyllum Gmelini, V, 54.
Nostoc lichenoïdes, V, 62.
— sphæroïdes, V, 63.
Oidium fructigenum, IV, 49.
Opegrapha atra β abbreviata, II, 17.
— cæsia, I, 15.
— herbarum, II, 18.
— herpetica, I, 15.
— implexa, II, 17.
— murorum, I, 14.
Orthotrichum coarctatum, V, 11.
— crispulum, I, 8.
— fallax, V, 10.
— fastigiatum, V, 10.
— obtusifolium, III, 6.
— patens, V, 10.
— phyllanthum, V, 11.
— pumilum, V, 9.
— stramineum, IV, 11.
— Sturmii, I, 9.
Parmelia. *Voyez* Imbricaria et Lobaria.
— *elacista*. *Voyez* Lecanora.
Peltigera malacea, II, 16.
Penicillium candidum, IV, 50.
— expansum β coremium, IV, 50.
Periola tomentosa, I, 27.
Pertusaria leioplaca, IV, 18.
Peziza anomala, I, 29.
— calycina, IV, 38.
— cerea, IV, 3.
— compressa, III, 33.
— erumpens, V, 35.

[1] Il a été imprimé par erreur, dans la synonymie, *Hypnum nudum* au lieu de *H. medium*.

Digitized by Google

Peziza fusco-atra, V, 33.
— hemisphærica, IV, 38.
— humosa, I, 28.
— leucoloma, V, 35.
— macropus, I, 28.
— nigrella, III, 33.
— scutellata, I, 28, 29.
— stercorea, I, 29.
— succosa, II, 33.
— vesiculosa β coriaria, II, 33.
Phacidium geographicum, V, 22.
— lacerum, II, 28.
— repandum, V, 22.
— rubi, I, 21.
Phascum crispum, III, 9.
— patens, II, 11.
Phlebia tremelloïdes, I, 40.
Phoma concentrica, IV, 19.
Phlyctena vagabunda, IV, 21.
Phycophila ferruginea, I, 43.
— flaccida, V, 57.
Phyllosticta cruenta, IV, 22.
— rhamnicola, IV, 22.
— violæ, IV, 22.
Polyporus contiguus, IV, 48.
— corticola, II, 40.
— cuticularis, II, 40.
— ferruginosus, V, 48.
— fumosus, I, 39.
— giganteus, II, 39.
— hispidus, II, 39.
— imberbis, IV, 48.
— mucidus, V, 48.
— nigripes β lobato-multifidus, III, 42.
— ribis, I, 39.
— squamosus β crassipes, V, 46.
— — γ levipes, V, 47.
Polysiphonia. *Voyez* Hutchinsia.
Polystichum lobatum, I, 5.
Polytrichum [1] juniperinum β strictum, V, 12.
Polytrincium trifolii, III, 47.
Protococcus coccoma, V, 63.
Puccinia asteris, III, 32.
— aviculariæ, IV, 35.
Puccinia clinopodii, IV, 36.
— epilobii, IV, 37.
— glechomatis, IV, 35.
— globulariæ, III, 32.
— liliacearum, III, 32.
— primulæ, IV, 36.
— prunorum, II, 32.
— Thesii, V, 29.
Ramalina prunastri β cæspitosa, III, 11.
Rhizomorpha molinaris, III, 22.
— solidiuscula, V, 23.
— subcorticalis β latissima, V, 24.
Rhizopogon albus, I, 23.
— luteolus, I, 22.
Rhodymenia palmetta β Elisiæ, V, 55.
Rhytisma stellare, I, 21.
Riccia bifurca, II, 14.
— ciliata, II, 14.
— glauca β major, II, 14.
Scleroderma cepa, III, 26.
— verrucosum β spadiceum, III, 26.
Septoria stachydis, IV, 23.
Sphacelaria cirrhosa, IV, 58.
— radicans, IV, 59.
— velutina, I, 42.
Sphæria [2] aquilina, V, 20.
— artocreas, II, 26.
— brunneola, V, 19.
— caricis, IV, 24.
— carduorum, III, 20.
— ceuthocarpa, II, 24.
— conglomerata, IV, 26.
— cruciferarum, II, 27.
— eutypa, III, 17.
— gangrena, IV, 24.
— ilicis, II, 26.
— inconspicua, IV, 25.
— junci, I, 19.
— lichenicola, IV, 25.
— macularis, III, 19.
— melæna, IV, 23.
— mucosa, V, 19.
— picea, IV, 24.
— polygramma, II, 25.

[1] Voir aussi *Catharinea*.
[2] Voir aussi, pour les espèces de ce genre, les genres *Xylaria*, *Hypoxylon*, *Hyphasma*, *Valsa*, etc.

Digitized by Google

Sphæria pruinosa, I, 20.
— pulchella, I, 20.
— — β minor, II, 25.
— pulicaris, V. 18.
— pulveracea, II, 25.
— quaternata, I, 20.
— rostrata, III, 17.
— — β tenuior, II, 25.
— rusci, III, 18.
— sepincola, II, 26.
— taxi, III, 19.
— tiliæ, III, 18.
— *visci*, I, 21.
— xylostei, V, 19.
Sphærobolus. *Voyez* Carpobolus.
Sphæronema mercurialis, III, 20.
— rhinanthi, II, 27.
Sphæropsis depressa, V, 21.
Spiloma elegans, I, 16.
Sporidesmium atrum, V, 30.
Sporotrichum aurantiacum, II, 42.
— cinnamomeum, V, 53.
— flavicans, IV, 53.
— laxum, III, 46.
— ollare, III, 46.
— rubiginosum, III, 47.
— sulfureum, II, 42.
— virescens, IV, 52.
— vitellinum, V, 52.
Stemonites fusca, III, 24.
— ovata, III, 24.
Stereum. *Voyez* Telephora.
Stilbospora angustata, II, 32.
— — β foliorum, II, 32 [1].
— macrosperma, I, 26.
— pyriformis, III, 29.
Stilbum xanthocephalum, V, 52.
Stromateria carnea, V, 31.
Telephora acerina, V, 51.
— calcea, III, 44.
— cinerea, I, 41.
— incarnata, IV, 48.
— lævis, III, 43.
— ochracea, V, 51.
Telephora polygonia, I, 41.
— rubiginosa, III, 43.
— rugosa β liquidambaris, III, 43.
— spadicea, I, 41.
Thamnomyces hippotrichoïdes, III, 14.
Thelotrema lepadinum, III, 13.
Tortula apiculata, I, 10.
— cuspidata, I, 9.
— obtusifolia, I, 10.
— revoluta, II, 9.
Torula chrysosperma, III, 44.
— epizoa β muriæ, III, 44.
— inæqualis, IV, 49.
— pinophila, V, 51.
Tremella albida, I, 27.
— foliacea β terrestris, V, 32.
— undulata β lactea, V, 33.
Trichia varia, II, 29.
Trichothecium domesticum, I, 41.
Tubercularia æsculi, IV, 38.
— confluens, III, 29, 30.
— expallens, I, 26.
— minor, III, 30.
— mutabilis, V, 30.
— vulgaris β robiniæ, III, 29.
Tulostoma mammosum, II, 30.
Urceolaria calcarea, II, 21.
— scruposa β arenaria, II, 20.
Uredo armeriæ, IV, 33.
— behenis, V, 28.
— betæ, III, 27.
— epitea, II, 31.
— hypodytes, IV, 34.
— limonii, V, 27.
— olivacea, V, 28.
— pinguis, IV, 33.
— pyrolæ, IV, 32.
— Thesii, V, 29.
— urceolorum, II, 31.
— valerianæ, IV, 34.
Valsa leiphemia, III, 15.
— leprosa, III, 16.
— stilbostoma, III, 16.
— verrucæformis, III, 15.

[1] *Pestalotia Guepini* Desm. Les filets ciliformes nous ont échappé. On ne les aperçoit au microscope, dit M. Desmazières (*Ann. des scienc. nat.*, 2e série, tom. XIII, pag. 184), qu'en diminuant la lumière d'une manière favorable.

Digitized by Google

Vaucheria cæspitosa, II, 46.
— Dillwynii, V, 60.
— geminata, III, 51.
— hamata, I, 45.
— ovata, III, 50.
Vermicularia eryngii β erythrinæ, V, 21.
— hispida, III, 21.
Verpa Krombholzii, I, 30.
Verrucaria cinerea [1], II, 24.
Verrucaria glabrata, V, 20.
— *rupestris*, I, 19.
— Schraderi, I, 19.
Volubilaria mediterranea, II, 43.
Weissia Starkeana, I, 10.
Xylaria capitata, II, 22.
— ophioglossoïdes, II, 22.
Zygnema deciminum, III, 51.
Zygodon veridissimus, IV, 12.

[1] M. Desmazières regarde cette espèce comme nouvelle et distincte de la *Verrucaria cinerea* Chev. Il l'a publiée sous le nom de *Verrucaria cinerea* Kickx. (Voir *Plant. crypt. de la France*, fasc. 39, n° 1981.)

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR

LA DIRECTION ET LA GRANDEUR DES SOULÈVEMENTS

QUI ONT AFFECTÉ LE SOL DE LA BELGIQUE;

PAR

J.-C. HOUZEAU,

ANCIEN AIDE A L'OBSERVATOIRE DE BRUXELLES.

(Présenté à la séance du 9 mai 1854.)

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR

LA DIRECTION ET LA GRANDEUR DES SOULÈVEMENTS

QUI ONT AFFECTÉ LE SOL DE LA BELGIQUE.

Nous nous proposons, dans ce travail, de déterminer, par de simples considérations hypsométriques, la direction et la grandeur des principaux soulèvements qui ont affecté le sol de la Belgique. En appliquant le calcul d'une manière empirique à la détermination des arêtes et des facettes qui appartiennent aujourd'hui à la surface du pays, nous espérons remonter à l'origine de la configuration du sol. Les accidents soufferts par cette portion de l'écorce terrestre seront alors reconnus, indépendamment de toute hypothèse.

Nos recherches ont leur origine dans le soin que nous avions pris, il y a longtemps, de porter les cotes de hauteur sur une carte géologique comprenant le nord de la France, la Belgique et les provinces du Rhin. Nous avons fini par réunir plusieurs milliers d'altitudes sur une contrée d'une étendue limitée, dont nous avons pu nous représenter très-rigoureusement le relief général. C'est cet ensemble de matériaux que nous allons mettre en usage.

Les cotes de hauteur sont empruntées, pour notre pays, aux documents publiés par le Gouvernement et par l'Académie, et, pour un certain nombre, à nos propres mesures. Lorsqu'il s'agissait de nivellements barométriques, nous avons toujours corrigé les hauteurs par les repères les plus voisins, tels que ceux-ci résultaient des meilleures déterminations à coups de

Digitized by Google

niveau. Pour la France septentrionale et pour l'Eifel, nous avons employé principalement les belles cartes du Dépôt de la guerre français, en tenant compte des corrections, d'ailleurs peu importantes, signalées dans la discussion des nivellements primordiaux, au second volume de la *Nouvelle description géométrique de la France.*

Toutes les altitudes sont ramenées au niveau *moyen* de la mer. Quant aux coordonnées horizontales, nous avons fait usage de la division sexagésimale de la circonférence, et nous avons compté les longitudes à partir du méridien de Paris. Ces coordonnées, dont l'exactitude n'est pas non plus sans importance dans des recherches de cette nature, sont tirées des triangulations connues. Lorsque, par exception, nous avons été forcé de recourir aux cartes, nous avons déterminé les latitudes et les longitudes, non pas par rapport aux lignes absolues de la carte, mais par les différences avec des points géodésiques voisins.

Nous avertissons, en outre, une fois pour toutes, que nous comptons les azimuts de 0 à 180°, à partir du nord, vers l'est et le sud.

Nos recherches s'appuient sur deux procédés de calcul un peu différents. Nous avons envisagé d'abord, de la manière la plus simple, les arêtes ou *lignes de soulèvement,* en appliquant à leur détermination l'équation d'un grand cercle de la sphère. Nous avons considéré, en second lieu, des dérangements qui affectent une certaine étendue de *surface.* Ce dernier calcul, que l'on pourrait appeler le *calcul du jeu des voussoirs,* est particulièrement applicable à nos terrains tertiaires. Si nous ne nous trompons, il est susceptible de jeter une nouvelle lumière sur l'âge de leurs diverses formations.

1. Les considérations hypsométriques sont seules capables de nous éclairer sur les plissements qui ont affecté des masses antérieurement émergées. Dans ces circonstances, en effet, nous n'avons plus, pour nous guider, ni la discordance de stratification, ni la différence de nature entre la roche découverte et la roche empâtante. Les rides postérieures à l'émersion des masses affectent d'une manière commune les terrains divers qu'elles parcourent.

Digitized by Google

Il ne nous reste alors qu'à recourir à l'hypsométrie pour reconnaître ces dernières rides; et les considérations de cet ordre, sévèrement discutées sur les chiffres, nous conduisent à mettre de nouveaux phénomènes en évidence.

Telle est la ride du système Corse qui a traversé la Lorraine, croisé l'Ardenne par Arlon, Noville et les Hautes-Fanges, pour former le faîte du pays de Herve, et mourir dans la mer pliocène auprès de Sittard.

Le tableau ci-dessous renferme les éléments principaux de cette ride, avec l'exhaussement des sommets par rapport aux plateaux environnants :

REPÈRES SUR LE FAÎTE.				ALTIT. DES PLATEAUX.		Exhaussement.	*d*, en arc de grand cercle.	
				A L'OUEST.	A L'EST.			
			m.	m.	m.	m.		
La Motte	48° 13′ N.	3° 21′ E.	508	440	440	68	+ 6′	Terrains secondaires.
Hatton-Châtel . . .	48.59	3.20	416	333	330	85	+ 6	
Tiercelet	49.27	3.31	440	380	360	70	— 1	
Hirzberg	49.40	3.27	464	400	360	84	+ 2	
Eschdorff	49.52	3.35	610	510	500	105	— 3	Terrains primaires.
Bras	49.59	3.29	666	540	540	126	+ 1	
Les Tailles	50.15	3.24	648	550	560	93	+ 4	
Botranche	50.31	3.44	689	570	580	114	— 9	
Belœil	50.41	3.35	351	270	270	81	— 3	Terrains secondaires.
Mingersbourg . . .	50.51	3.37	202	170	160	37	— 4	
Beek	50.56	3.28	97	65	70	30	+ 1	Terrains tertiaires.
MOYENNE		3.30						

Ainsi voilà une ride de 301 kilomètres de longueur entre nos repères extrêmes, qui conserve sensiblement sa diréction méridienne dans toute son étendue, et dont le relief dépasse parfois cent mètres de hauteur. Cette ride traverse des terrains de toute nature, sans que l'âge des formations géologiques paraisse en rien l'influencer. Mais elle est évidemment antérieure au système campinien, puisqu'elle s'efface, au nord, à l'entrée de ce système, qui en enveloppe le promontoire, près de Sittard, dans ses plages unies.

L'exhaussement donné dans l'avant-dernière colonne résulte de la com-

Digitized by Google

paraison entre l'altitude du faîte et la moyenne des altitudes des plateaux à l'ouest et à l'est. En général, on retrouve à peu près le même niveau des deux côtés de la ride. Toutefois, l'estimation relative à ces plateaux laisse toujours un peu d'incertitude, surtout dans le voisinage des Hautes-Fanges, où plusieurs soulèvements différents aboutissent. A Belœil, nous prenons pour plateaux de comparaison, d'un côté, celui qui se trouve entre Herve et Forêt, et de l'autre, celui de l'Aachnerwald.

Dans la dernière colonne, nous avons inséré, sous le nom de quantité *d*, la distance de chaque repère au méridien moyen de 3°30′. C'est l'erreur, sur la sphère, entre l'hypothèse et l'observation. Cette erreur restant toujours contenue dans d'étroites limites, nous pourrons dire, en nous basant uniquement sur l'état des lieux, qu'une ride méridienne a affecté le sol dans les contrées indiquées; que cette ride y forme une espèce de chapelet de protubérances; enfin, que ces protubérances dominent les plaines environnantes de cent mètres au moins, entre la frontière de France et le Limbourg.

Une circonstance frappante montre d'ailleurs que cet accident de la surface n'est pas contemporain de l'émersion des masses : c'est que dans la région des Tailles il a porté le terrain rhénan plus haut que le terrain ardennais, qui l'entoure des deux côtés et qui est plus ancien. Ainsi le plateau de la Baraque de Fraiture (650^m) est situé, comme un ancien golfe, entre les massifs ardennais de Lierneux et d'Ottré (565^m), d'une part, et ceux de Samrée et de Dochamps (550^m), d'autre part. Or, le fond du golfe est aujourd'hui de cent mètres *plus haut* que les deux promontoires qui l'embrassent.

2. Nous venons de dire que plusieurs soulèvements différents aboutissent aux Hautes-Fanges. Nous allons montrer, en effet, que l'exhaussement de cette région, qui est située en dehors de l'axe de l'Ardenne, est le résultat du croisement de deux rides postérieures à son émersion. Quand on tient compte des exhaussements produits par ces mouvements postérieurs, on reconnaît que le plateau des Höhe-Veen était à peine aussi élevé, à l'origine, que ceux de Saint-Hubert et de Bastogne. Et le véritable faîte de l'Ardenne étant restitué par ce calcul à sa direction primitive, on le verra se

Digitized by Google

diriger en droite ligne aux croupes schisteuses du Sauerland, sur l'autre rive du Rhin, et même à l'îlot primaire du Harz.

En parcourant des yeux notre carte hypsométrique, nous avons reconnu facilement l'existence d'une ride appartenant au système du Thüringerwald, dont nous allons démontrer l'existence par le calcul.

Ce faîte part du Palatinat. Il a imprimé un relief additionnel, transversal à celui des Vosges, dans les sommités de la Hardt, au N.-E. de Kaiserslautern. Il croise le Hunsrück à son point culminant, dans l'ancienne forêt sacrée de l'Idar, dont l'altitude n'aurait pas dépassé apparemment, sans cet événement postérieur, le niveau très-égal des autres parties de la croupe. Enfin, notre ride traverse l'Eifel obliquement et aboutit aux Hautes-Fanges.

En voici les éléments principaux :

				m.
Dans la Hardt. . . .	Kalmuk . . .	49° 19′N.	5° 45′E.	675
	Donnersberg. .	49.37	5.36	678
Dans le Hunsrück . .	Herbstkopf . .	49.40	4.49	821
Dans l'Eifel.	Schnee-Eifel . .	50.19	4. 5	658
	Losheimerwald .	50.25	3.58	659
Dans les Hautes-Fanges.	Botranche. . .	50.31	3.44	689

Pour assigner d'une manière générale la direction d'une pareille ride, nous aurons recours à des équations de condition de la forme

$$\text{tang } \varphi = \text{tang } \beta . \sin (l - \text{N}), \qquad (1)$$

où φ et l expriment la latitude et la longitude géographiques, et dans lesquelles β représente l'obliquité du grand cercle cherché sur l'équateur terrestre, et N la longitude du nœud ou point d'intersection. Développant, il vient

$$\text{tang } \varphi = \sin l . \text{ tang } \beta . \cos \text{N} - \cos l . \text{ tang } \beta . \sin \text{N}$$

ce qui permet de poser

$$\text{tang } \varphi = x \sin l - y \cos l, \qquad (2)$$

en prenant x et y pour inconnues auxiliaires.

Digitized by Google

Or, ces inconnues étant déterminées par la méthode des moindres carrés, il ne restera qu'à faire

$$\text{tang N} = \frac{y}{x}, \quad \text{tang } \beta = \frac{x}{\cos N} = \frac{y}{\sin N}, \qquad (3)$$

pour obtenir les valeurs des inconnues définitives.

Maintenant il est facile de voir que le triangle sphérique formé par ce grand cercle, l'équateur et le premier méridien, fournit les relations

$$\text{tang } \Phi = -\text{tang } \beta.\ \sin N = -y; \qquad \sin \alpha = -\frac{\sin \beta.\ \sin N}{\sin \Phi}, \qquad (4)$$

en désignant par α l'azimut du grand cercle à son point d'intersection avec le premier méridien choisi, et par Φ la latitude de ce point d'intersection.

Afin de rendre les comparaisons plus immédiates, nous adopterons pour premier méridien celui de 2° 0′ à l'orient de Paris, qui correspond à une minute près avec le méridien de Bruxelles, et qui passe à peu près au centre du pays. Nos arcs l seront positifs à l'est et négatifs à l'ouest.

Appliquant cette marche aux six points que nous avons compris dans le tableau qui précède, nous formons les équations de condition ci-dessous :

$$\begin{aligned}
1{,}163 &= 0{,}065\,40\ x - 0{,}997\,9\ y, \\
1{,}176 &= 0{,}062\,79\ x - 0{,}997\,9\ y, \\
1{,}184 &= 0{,}049\,14\ x - 0{,}998\,9\ y, \\
1{,}205 &= 0{,}036\,35\ x - 0{,}999\,3\ y, \\
1{,}210 &= 0{,}034\,32\ x - 0{,}999\,3\ y, \\
1{,}214 &= 0{,}030\,25\ x - 0{,}999\,5\ y,
\end{aligned}$$

qui fournissent pour équations finales

$$\begin{aligned}
1{,}186\,5 &= 0{,}050\,491\ x - 0{,}998\,18\ y, \\
1{,}192\,1 &= 0{,}046\,347\ x - 0{,}998\,82\ y,
\end{aligned}$$

et pour les valeurs des inconnues auxiliaires,

$$x = -1{,}163, \quad y = -1{,}247;$$

d'où l'on tire enfin

$$N = 47°0', \quad \beta = 120°23'; \quad \text{et} \quad \Phi = 51°17', \quad \alpha = 126°2'.$$

Digitized by Google

Cette direction de 126°, ou de N. 54° O., concorde à 3° près avec celle du système du Thüringerwald transporté en Belgique, et justifie ce que nous avons dit tout à l'heure.

3. Si nous calculons les plus courtes distances *d* de nos repères à l'arc qui vient d'être déterminé, nous trouvons pour les écarts entre le calcul et l'observation :

	DISTANCE *d*, en arc de grand cercle.
Kalmuk	+ 6′
Donnersberg	— 4
Herbstkopf	+ 6
Schnee-Eifel	— 1
Losheimerwald	— 3
Botranche	— 2

Ces différences sont peu importantes, lorsqu'on réfléchit qu'il s'agit d'un arc de 1°12′ de développement, ou de 134 kilomètres.

La file de sommets dont nous parlons ici constitue donc la trace d'un soulèvement parallèle à l'axe du Thüringerwald, et probablement contemporain de la ride qui s'est émergée, à la fin de l'époque triasique, entre Lintz sur le Danube et Paderborn. Notre ride parallèle affecte, en effet, le grès vosgien de la Hardt et les terrains primaires du Hunsrück et de l'Eifel, qui étaient formés à cette époque. Elle semble partager en deux versants les terrains plus récents qui s'étendent au sud et au nord de l'Eifel. Enfin, dans cette dernière région, elle aura soulevé les lambeaux triasiques qu'on y voit pour ainsi dire à cheval.

Au nord-ouest, la ride s'arrête après les Hautes-Fanges. Le terrain crétacé du pays de Herve en est indépendant; tandis que c'est ce ridement qui, selon toute apparence, a fait écouler l'eau des golfes triasiques de Bittburg et de Deux-Ponts. Au sud-est, nous apercevons quelques traces de son prolongement sur le plateau keuprique du Würtemberg; mais il n'en existe certainement plus aucun indice, au croisement de notre ligne avec le Rauhe-Alb jurassique. D'où l'on peut conclure, avec beaucoup de probabilités, que ce plissement s'est opéré entre le trias et le jura.

Digitized by Google

Il ne paraît pas que la faille du Rhin, de Bingen à Cologne, doive être rapportée à la même époque, car elle nous donne :

Cologne.... 50°57′ N.... 4°37′ E.; Bingen.... 49°54′ N.... 5°32′ E.... $\alpha = 151°$.

On reconnaîtrait plutôt, dans ce chiffre, le système du Mont-Viso. Cependant la direction générale, prise depuis Mayence jusqu'à Bonn, fournit :

Bonn..... 50°44′ N.... 4°46′ E.; Mayence.. 50°0′ N..... 5°56′ E.... $\alpha = 135°$.

Quant au relief de la ride dont nous avons parlé, nous prendrons, comme nous l'avons fait précédemment, l'altitude des plateaux voisins qui appartiennent aux mêmes formations, et nous en composerons le tableau suivant :

REPÈRES.		Altitude des plateaux.		EXHAUSSEMENT.
		AU MIDI.	AU NORD.	
	m.	m.	m.	m.
Kalmuk.	675	500	460	195
Donnersberg	678	460	430	233
Herbstkopf.	821	650	640	176
Schnee-Eifel	658	440	500	188
Losheimerwald	659	?	?	?
Botranche	689	570	350	229

Il est difficile de déterminer l'altitude des plateaux qui entourent le Schnee-Eifel et le Losheimerwald, à cause du voisinage des deux soulèvements qui se croisent à Botranche. On est, de plus, dans la proximité de l'ancien faîte de l'Ardenne. Nous avons pris, d'un côté, les hautes plaines entre Manderscheid et Nürburg, et, de l'autre, le plateau qui est au delà de Blankenheim. A Botranche, nous comparons, d'une part, les croupes qui bordent la rive droite de l'Amblève, de Stavelot à Stoumont, et, de l'autre, les plus hauts sommets du nord de la Vesdre, à Henri-Chapelle.

Digitized by Google

La moyenne des altitudes prises ainsi des deux côtés, et à des distances égales, doit peu s'écarter de l'altitude sous le faîte même, lorsqu'on fait abstraction du soulèvement. On remarquera, dans notre dernier tableau, que l'exhaussement est assez uniformément de deux cents mètres environ, dans toute l'étendue de la ride.

Si l'on admet les résultats qui précèdent, on trouvera que les Hautes-Fanges ont subi deux exhaussements considérables, postérieurs à leur émersion, dont la somme atteint probablement 300 mètres; et si l'on rabaisse, en conséquence, de cette quantité, leur altitude actuelle, il en résultera que cette partie de l'Ardenne n'aura plus 400 mètres de hauteur, et se trouvera inférieure aux plateaux de Paliseul et de Recogne, de S[t]-Hubert, de Bastogne et de l'Eifel.

4. Du moment où l'Ardenne est débarrassée de cette bosselure postérieure, qui ne l'affectait pas à l'époque de son émersion, il devient facile de déterminer la direction de son propre faîte. Cette direction se rapproche alors du système du Westmoreland et du Hunsrück, dont le massif paraît aujourd'hui s'écarter. Elle prend son parallélisme avec le faîte du Hunsrück et du Taunus. Enfin, elle conduit directement à l'îlot du Harz, comme à une de ces îles prolongatrices qui terminent les péninsules allongées et les chaînes qui meurent dans la mer.

Nous allons appuyer ces faits par un calcul rigoureux. Laissons de côté les deux rides que nous venons de considérer. Joignons aux points culminants de la Croix-Scaille et de S[t]-Hubert, la plus haute cote de l'Eifel, le sommet le plus élevé du Sauerland (région qui prolonge la zone ardoisière sur la rive droite du Rhin), enfin le Broken, envisagé comme point géographique. Cet ensemble de sommets ou repères nous fournit :

				DISTANCE d, en arc de grand cercle.
			m.	
Croix-Scaille.	49° 57′ N.	2° 30′ E.	504	— 7′
S[t]-Hubert (signal)	50. 2	3. 5	594	0
Hohe-Acht	50.23	4.43	721	+ 12
Astenberg	51.12	6.12	818	— 3
Broken	51.48	8.16	1138	— 1

De ces données on tire les équations suivantes :

$$1{,}190 = 0{,}008\,72\,x - 1{,}000\,0\,y,$$
$$1{,}193 = 0{,}018\,91\,x - 0{,}999\,8\,y,$$
$$1{,}208 = 0{,}047\,40\,x - 0{,}998\,9\,y,$$
$$1{,}244 = 0{,}073\,23\,x - 0{,}997\,3\,y,$$
$$1{,}271 = 0{,}109\,14\,x - 0{,}994\,0\,y,$$

qui conduisent, par l'application du procédé des moindres carrés, aux équations finales,

$$1{,}243\,2 = 0{,}077\,525\,x - 0{,}996\,46\,y,$$
$$1{,}221\,0 = 0{,}051\,401\,x - 0{,}997\,95\,y,$$

lesquelles donnent

$$x = 0{,}918\,5,\quad y = -\,1{,}176;$$

et par les mêmes formules que précédemment,

$$N = -\,52°1',\quad \beta = 56°10';\quad \text{et } \Phi = 49°38',\quad \alpha = 59°15'.$$

Nous avons porté les distances *d*, en arc de grand cercle, dans la dernière colonne du tableau précédent. Le repère du Hohe-Acht est le seul qui s'écarte d'une quantité un peu importante de l'arc terrestre déterminé. La différence aurait disparu en grande partie, si nous nous étions permis d'y substituer les croupes de grauwacke qui avoisinent Ahrenberg, le long de la rive gauche de l'Ahr, et qui sont presque aussi élevées.

Même avec nos données, l'accord de l'angle α avec la valeur attribuée par M. Élie de Beaumont au système du Westmoreland et du Hunsrück [1], nous semble véritablement remarquable.

5. Un fait que nous pouvons mettre immédiatement en évidence, c'est la faible élévation des premières rides de la surface terrestre, relativement aux mers contemporaines. Les îles les plus anciennes de la période primaire ne formaient que des terres basses, qui dominaient seulement d'une petite quantité les eaux d'alentour.

[1] Au Binger-Loch, $\alpha = 58°30'$.

Digitized by Google

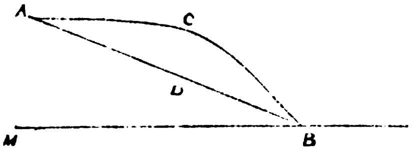
Vérifions d'abord cette proposition sur la grande île ardennaise de Stavelot.

Nous avons déterminé l'altitude actuelle de ses contours, en différents points, au moyen de cotes de hauteur prises dans le voisinage de la ligne périmétrique, et se rapportant, bien entendu, aux croupes et non aux vallées. Nous avons formé de cette manière le tableau suivant :

Sur le demi-périmètre occidental.				*Sur le demi-périmètre oriental.*			
REPÈRES.	En dehors.	En dedans.	Altitude admise pour la ligne périmétrique.	REPÈRES.	En dehors.	En dedans.	Altitude admise pour la ligne périmétrique.
Benasse	»	m. 545	m. 540	Benasse	»	m. 545	m. 540
Bois Magoster	m. 486	»	475	Bibain	»	570	
Arbres de Werbomont	»	469		Colanhan	»	557	
Haut-Regard (élévation)	401	»	400	Entre Deiffelt et Durler	m. 549	»	550
Barrière de la Sauvenière	»	383		Rosistère, près Arbre-Fontaine	»	559	
Tige au Sart	371	»	380	Entre St-Vith et Recht	521	»	
Jalhay	379	»		Strée, près Stavelot	»	563	560
Eupen	271	»		Xermodong	538	»	
Cornély-Münster	245	»	270	Sourbrodt	»	575	575
Drey-Augen	»	270		Schöneseifel	580	»	
				Fringshof	»	559	560
				Drey-Augen	»	270	270

On voit qu'aujourd'hui ce massif ardennais penche vers le N.-E., depuis Benasse jusqu'au signal des Drey-Augen, mais avec le bord oriental constamment plus élevé que l'autre. La table qui précède va nous permettre d'interpoler, avec une exactitude suffisante, les hauteurs de la ligne périmétrique dans les points que nous voudrons comparer au faîte.

Mais les deux bords d'un même terrain ne sont plus aujourd'hui à un même niveau BM. Nous sommes forcé, par conséquent, de recourir à une méthode de correction. Le procédé le plus simple consistera à joindre par



Digitized by Google

une droite les deux points de comparaison A, B, pris sur le périmètre, et à adopter la cote D, déterminée par l'intersection de cette droite avec la verticale du repère C situé dans le faîte. C'est ainsi qu'on a formé, dans le tableau ci-dessous, les cotes actuelles de l'ancienne surface de niveau, intitulées : *Altitudes admises sous le repère.*

REPÈRES SUR LE FAÎTE.		Altitude de la ligne périmétrique, à l'ouest.	Altitude de la ligne périmétrique, à l'est.	Altitude admise sous le repère.	Excès de l'altitude du faîte.	Surexhaussement postérieur.	Altitude originelle du faîte.
Stoumont (au signal) . . .	m. 549	m. 430	m. 550	m. 490	m. 59	»	m. 59
Botranche.	689	380	575	510	179	m. 114	65
Baraque-Michel	674	380	575	480	194	114	80
Grande-Croix	642	380	575	450	192	114	78

Le repère de Stoumont, qui est en dehors des lignes de soulèvement postérieures, nous fournit immédiatement le relief originel de l'île. Les trois autres repères sont dans les Hautes-Fanges. Nous leur appliquons la correction obtenue n° 1 pour l'effet de la ride du système Corse. Nous n'y ajoutons pas l'effet du plissement qui appartient au système du Thüringerwald. On peut admettre, en effet, que cette dernière ride, transversale à notre faîte, a affecté d'une manière commune les points du périmètre et les points correspondants de l'axe. Dans tous les cas, les trois derniers nombres de la dernière colonne peuvent être considérés comme une limite supérieure, que l'élévation de la crête de cette première île n'a pas pu dépasser dans l'acte de son émersion.

On voit donc que le relief originel du massif ardennais de Stavelot, par rapport à la mer environnante, n'a probablement dépassé ni même atteint nulle part 80^m, chiffre bien peu important pour une surface d'une pareille étendue, et bien différent de celui que l'on serait tenté de lui assigner *à priori*, d'après l'aspect actuel des lieux.

L'île de Rocroy conduit d'une manière plus nette encore à un résultat peu différent. Les contours de cette île conservent en général un niveau

Digitized by Google

plus égal, et subissent des variations moins rapides. Il est plus facile d'en déterminer la cote, et les altitudes admises sous le faîte sont moins sujettes à contestation. Les points culminants de la crête nous fournissent d'une manière analogue :

REPÈRES SUR LE FAÎTE.		Altitude de la ligne périmétrique,		Altitude admise	Altitude origi-
		AU NORD.	AU SUD.	SOUS LE REPÈRE.	NELLE DU FAÎTE.
Gedinne.	m. 410	m. 410	m. 410	m. 410	m. 0
Croix-Scaille	504	390	400	395	109
Grande-Croix	490	380	390	385	105
Rocroy	390	360	320	340	50
Trou du Sable. . . .	354	320	310?	315	39
Hirson	240	240	240	240	0

Voilà donc le nivellement longitudinal de ce faîte, restitué tel qu'il existait à l'origine; et l'on reconnaît que la saillie de l'arête dépassait à peine 100^m sur l'Océan contemporain.

L'île, plus petite, de Givonne fournit un résultat encore analogue. On trouve, en effet, à son point culminant, 425^m, et à ses deux extrémités, en dehors du terrain ardennais,

	m.
Au Pragnou de Pussemange.	389
A Florenville (plateau).	364
Dont la moyenne	377

conduirait à attribuer seulement 48^m de relief à l'île primitive.

6. Le terrain rhénan, qui constitue la grande masse de l'Ardenne, n'a pas pris lui-même, dans son émersion, une saillie proportionnellement plus considérable. Nous nous sommes livré à cet égard au même genre de travail. Après avoir déterminé, par un très-grand nombre de cotes, les altitudes actuelles des différents points du contour, nous avons comparé comme suit l'ancienne surface de niveau dessinée par ce contour, avec l'élévation de la ligne de faîte.

Digitized by Google

REPÈRES.	Rivage nord.	Rivage sud.	Altitude admise sous le repère.	Altitude actuelle du faîte.	Altitude originelle.
	m.	m.	m.	m.	m.
Hirson	240	240	240	240	0
Gedinne	350	330	340	410	70
Plateaux de Bouillon	350	300	310	400	90
Entre Saint-Hubert et Neufchâteau	350	450	400	580	180
Plateau de Bastogne et de Noville	350	550	450	570	120
Langue d'Eschdorff.	460	510	485	610	125
Bras	»	550	550	666	116
Les Tailles	»	570	570	648	78
Drey-Augen	270	270	270	270	0

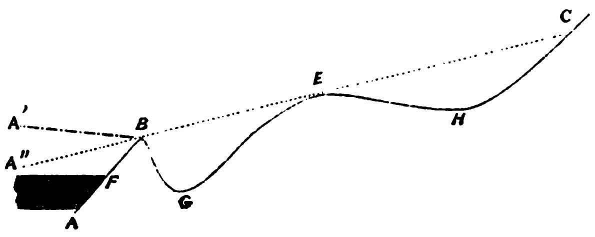
D'où l'on voit que l'arête ardennaise atteignait sa plus grande élévation, qui était à peine de 200 mètres, vers le signal de Saint-Hubert, c'est-à-dire à peu près au milieu de sa longueur. A partir de ce point, le relief de l'île décroissait assez régulièrement, vers Hirson et vers Aix-la-Chapelle. Ainsi se confirme encore la légitimité de l'exclusion à laquelle nous avons soumis les Hautes-Fanges, dans le calcul de la véritable direction du faîte de l'Ardenne (nº 4).

Si nous réunissons les soulèvements dont nous venons de parler, nous pourrons nous représenter de la manière suivante le relief qui en était résulté, pour le premier noyau du pays :

REPÈRES.	EXHAUSSEMENT produit dans l'émersion des terrains		SOMME, ou altitude sur la mer dévonienne.
	ARDENNAIS.	RHÉNANS.	
	m.	m.	m.
Hirson.	0	0	0
Croix-Scaille.	109	70	179
Bouillon	0	90	90
Saint-Hubert (signal)	0	180	180
Noville	0	120	120
Les Tailles	0	78	78
Stoumont.	59	70	129
Botranche	65	40	105
Drey-Augen	0	0	0

Digitized by Google

L'exhaussement produit à Stoumont et à Botranche, dans l'émersion des terrains rhénans, est déduit, par interpolation, de ceux des Tailles et des Drey-Augen. Il n'est certainement pas à l'abri de toute objection, mais il ne peut pas non plus être entaché d'une grande erreur.



7. Avant de quitter le noyau primaire du pays, essayons de faire apercevoir la liaison géométrique qui existe, selon nous, entre le massif rhénan du Brabant et celui de l'Ardenne. Le système total de nos terrains rhénans peut être représenté par une double cuve CHEGB, dans laquelle reposent les terrains anthraxifères. Le seuil intermédiaire E est constitué par la bande rhénane que la Meuse traverse à Dave. Au nord, la masse forme un versant doucement incliné BA, qui s'enfonce bientôt en F, sous les dépôts secondaires et tertiaires.

Si l'on coupe le masif général par des sections méridiennes, telles que celle de la figure ci-jointe, on trouve que le versant BA est considérablement plus rapide que la surface aujourd'hui inclinée CB. En sorte que le niveau prolongé BA″ de la mer anthraxifère aurait passé également au-dessus des terrains rhénans, dans le Brabant, si l'angle saillant CBA eût existé dès cette époque.

Joignant la rive B du Brabant à celle C de l'Ardenne, nous obtenons :

LIEUX.	Altitude.	Latitude.	Différence de latitude.	Différence d'altitude.	Pente par minute de latitude.	Pente par kilomèt. du segment BC.
Ath	m. 60	50°38′	40′	m. 180	m. 4,5	m. 2,5
Hirson	240	49 58				
Gembloux	180	50 34	32	170	5,3	2,8
Chestion.	350	50 2				
Bodegnée	190	50 36	28	160	5,7	3,0
Nassogne	350	50 8				
Hozémont	180	50 38	26	170	6,5	3,5
Hodistère	350	50 12				

Digitized by Google

Ces chiffres suivent une loi très-régulière.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer en passant que la droite CB, qui joint (correction faite de la courbure de la terre) les deux rivages anthraxifères opposés, est tangente à fort peu près au sommet de la langue intermédiaire E. Si nous calculons, en effet, l'altitude de la crête E, supposée dans la ligne CB, nous trouvons, d'après les chiffres qui précèdent :

Sous 50°24′ N,	et le méridien	de Genappe. . . .	200m	pour l'altitude de la bande rhénane	au bois	de Châtelet,
— 50.25	—	de Huy.	210	—	—	près Wierde,
— 50.29	—	de Vinalmont. . .	201	—	—	près Huy.

Or, ces cotes diffèrent très-faiblement de la réalité, d'où l'on peut conclure que le point E se trouve effectivement fort près de l'alignement CB de la surface anthraxifère primitive.

Maintenant si l'on considère le versant septentrional BA, on détermine comme suit son inclinaison dans le sens des méridiens :

LIEUX.	Altitude.	Latitude.	Différence de latitude.	Différence d'altitude.	Pente par minute de latitude.	Pente par kilogm. du segment BA.
Braine-le-Comte (forage) . . .	m. + 57	50°37′N.	7′	m. 112	m. 16,0	m. 8,7
Hal (forage)	— 55	50 44				
Marbais.	+180	50 33	9	140	15,6	8,5
Wavre	40	50 42				
Gembloux	170	50 34	9	110	12,2	6,6
Jodoigne	60	50 43				
Erezée	350	50 18	20	190	9,5	5,2
Hollogne-aux-Pierres	160?	50 38				

L'allure de ces chiffres est également très-régulière. C'est dans le méridien d'Hollogne-aux-Pierres que la division du bassin en deux portions, par un seuil intermédiaire, s'efface; et c'est aussi vers ce méridien que les injections porphyriques semblent s'arrêter. Dans cet endroit, le segment BA de la ligne brisée se rapproche de la direction de l'autre segment BC.

Digitized by Google

On pourrait donc prétendre que l'unité géométrique du massif a été rompue par l'accident même qui a ouvert les filons.

Mais quelle a été l'époque géologique de la rupture en B de la droite CA? Il est extrêmement probable que si l'angle B eût été un angle saillant, comme il l'est aujourd'hui, à l'époque où les matériaux des terrains dévoniens et houillers se déposaient au-dessous de la surface BC, ces mêmes matériaux auraient également recouvert le versant BA. Par conséquent, l'angle B était, jusqu'à la fin de l'époque houillère, ou rentrant comme CBA′, ou tout au plus nul comme CBA″. Ces remarques appuieraient l'hypothèse dans laquelle on regarde l'ouverture des filons comme contemporaine du grand phénomène du contournement des couches, et comme la révolution finale de la période de la houille.

8. Sur le flanc BA du massif du Brabant reposent des couches tertiaires que nous suivons à découvert jusqu'au bord de la mer. Ces couches se superposent et s'élèvent dans la série géologique à mesure qu'on avance. Les dernières croupes, comme la Campine et les bruyères de Thielt, forment des surfaces unies qui paraissent pencher doucement vers le nord ou le nord-ouest.

Nous ne prétendons pas décider si les sables campiniens appartiennent à l'étage pléistocène ou à l'étage pliocène. Mais nous espérons montrer que la croupe de la Campine a pris son relief dans le soulèvement des Alpes principales. Donc la couche qui, sur cette croupe, est immédiatement inférieure au diluvium, appartient à l'étage *pliocène,* soit qu'elle se trouve formée de véritables sables campiniens, ou de quelque système plus ancien.

Les célèbres auteurs de la carte géologique de France ont colorié comme pliocène une zone de terrain qui s'élève progressivement, depuis le Pas-de-Calais, à travers la Flandre française et la Picardie. Ce terrain, d'un côté, et la croupe campinoise, de l'autre, encadrent notre pays au couchant et au nord. Menons des arcs de grand cercle entre les points qui présentent aujourd'hui la même altitude dans ces deux régions. Ces lignes horizontales nous donneraient la direction du soulèvement qui aurait entraîné ces masses, dans l'hypothèse où celles-ci auraient été affectées d'un mouvement commun.

Digitized by Google

INDICES.	ALTIT.	Repère occidental.			Repère oriental.			AZIMUT α au MILIEU DE L'ARC de jonction.
A.	m. 0	Calais	50°58′N.	0°29′ O.	Santvliet.	51°22′N.	1°58′ E.	75°,4
B.	25	Ypres	50 51	0 33 E.	Arendonck	51 19	2 44	71,2
C.	35	Lille	50 38	0 44	Baelen.	51 11	2 50	67,4
D.	70	Bouchain	50 17	0 58	Asch.	51 1	3 15	63,2
E.	140	Saint-Quentin. . .	49 51	0 57	Düren	50 49	4 6	64,3
						Moyenne.		68,3

On voit que ces arcs de direction concordent assez bien avec le système des Alpes principales transporté en Belgique. La crevasse de la Sambre et de la Meuse nous fournirait de même :

Charleroi. . . . 50°26′ N. . . 2°9′ E; Liége. . . . 50°39′ N. . . 3°15′ E; $\alpha = 72°,8$.

Mais cette concordance ne suffit pas pour affirmer que les deux zones considérées ont été soulevées en même temps. Il faut encore montrer : 1° qu'elles appartiennent sensiblement à une même surface; 2° que cette surface prolongée va coïncider avec celle marquée par d'autres terrains soulevés dans l'accident des grandes Alpes.

Faisons partir du Mont-Blanc (45°50′ N, 4°32′ E) un grand cercle dirigé, sur l'horizon du lieu, dans l'azimut de 160°. Ce cercle viendra couper à peu près normalement les arcs de jonction que nous venons de tracer à travers la Belgique. Si, pour abréger, nous nommons *apothème* la longueur comprise sur le grand cercle, entre le Mont-Blanc et nos différents arcs, nous pourrons former le tableau suivant, qui exprimera la distance de chaque transversale au faîte du versant :

Arcs de jonction.	Longueur de l'apothème.	Altitude observée.	Altitude calculée.	Différence.
A.	5°58′	m. 0	m. 0	m. 0
B.	5 48	25	19	— 6
C.	5 37	35	39	+ 4
D.	5 19	70	73	+ 3
E.	4 55	140	118	—22
. . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
Plaines suisses. . . .	0 50	580	580	0

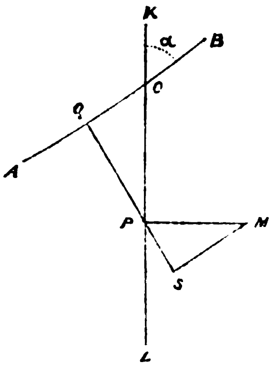
L'altitude donnée pour les plaines suisses, qui terminent le versant vers les grandes Alpes, est la hauteur des plateaux de Berne et de Lausanne. En supposant une pente uniforme, depuis ces plaines jusqu'à la mer, on a calculé les nombres de la quatrième colonne, qui s'accordent, dans des limites assez étroites, avec les nombres observés.

L'accord continuerait, dans le même ordre d'approximation, à travers les plateaux de la Lorraine, qui occupent l'espace intermédiaire. Mais comme il n'est pas possible de déduire l'exhaussement de ces plateaux d'une comparaison immédiate avec les terrains pliocènes, attendu que ceux-ci font défaut dans le voisinage, nous ne pourrions pas entrer dans les détails d'une mesure indirecte sans nous écarter trop longtemps de notre sujet, et nous avons supprimé cette partie du tableau. Il reste toutefois établi que, dans l'étendue de la Belgique, on peut représenter, par une inclinaison uniforme de $3' \, 29''$ vers N. 20°O, le résultat du dernier mouvement du sol.

9. Pour mettre plus de rigueur dans ces considérations, nous chercherons l'équation de la nouvelle surface résultant du dérangement du terrain, et un peu différente de la surface de la mer moyenne. D'une manière générale, on pourrait faire varier le rayon et les coordonnées du centre de la sphère. Mais comme il s'agit seulement d'embrasser des mouvements d'une petite étendue, considérés comme une dislocation partielle de la croûte du globe, on se contentera de supposer que la portion dérangée de la surface ait tourné autour d'un arc de grand cercle comme charnière, en prenant une très-petite inclinaison k. Cet arc de grand cercle, qui coupe le premier méridien dans la latitude Φ et sous l'azimut α, est la trace de la surface soulevée. L'écart linéaire entre les deux surfaces, c'est-à-dire la *cote de soulèvement,* croît sensiblement, dans le voisinage de la trace, comme la distance des points de la surface soulevée à cette trace même.

Il importe donc de former une expression simple de la distance λ à la trace. Nommons φ et l la latitude et la longitude géographiques d'un point quelconque M; et pour éviter les triangles sphériques d'une grande étendue, faisons passer notre premier méridien à travers la contrée que

Digitized by Google



nous considérons. Soient KL ce premier méridien, AB la trace dont l'azimut est α, et P un point du premier méridien situé sous la même latitude avec M. On pourra projeter les arcs OP et PM sur l'arc SQ normal à AB; et la somme des deux parties QP et PS représentera sensiblement la distance cherchée λ. Cette marche revient, en effet, à négliger les excès sphériques des deux triangles PQO et PSM, négligence qui sera sans importance pour notre objet dans une contrée peu étendue comme la Belgique. Pour des traces et des points situés d'une manière quelconque dans notre territoire, les arcs λ calculés par cette méthode approchée seront communément exacts à $0^{\circ}1'$, et n'atteindront jamais $0^{\circ}2'$ d'erreur.

On tire de la simple inspection de la figure, en remplaçant les sinus des petits arcs par les arcs mêmes,

$$\lambda = (\Phi - \varphi) \sin \alpha + l. \cos \varphi. \cos \alpha, \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

ou, en développant,

$$\lambda = \Phi \sin \alpha - \varphi \sin \alpha + l. \cos \varphi. \cos \alpha.$$

Or, comme la *cote de soulèvement* h est sensiblement proportionnelle à λ,

$$h = k\Phi \sin \alpha - k\varphi \sin \alpha + kl. \cos \varphi \cos \alpha;$$

et si l'on pose

$$\left.\begin{aligned} x &= k\Phi \sin \alpha \\ y &= k. \sin \alpha \\ z &= k. \cos \alpha \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

on aura pour chaque cote observée une équation de condition de la forme

$$h = x - \varphi.y + l. \cos \varphi.z \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

On pourra donc déterminer les inconnues auxiliaires x, y, z, par autant de points qu'on le voudra, au moyen de la méthode des moindres carrés.

Digitized by Google

Puis on en déduira les éléments définitifs de la surface variée par les équations (6), qui fournissent

$$\text{tang}\ \alpha = \frac{y}{z};\quad \Phi = \frac{x}{y};\quad k = \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{z}{\cos \alpha}\ \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Pour plus de facilité, nous prendrons la minute pour unité d'arc; et afin d'éviter d'introduire de trop grands nombres dans nos équations de condition, nous ne chercherons pas Φ directement, mais $\Phi - 49^\circ$ ou $\Phi - 2940'$. Il en résultera que nous n'aurons à prendre pour φ, dans le deuxième terme du second membre de l'équation (7), que son excès sur 49° ou $2940'$.

Nous prendrons encore pour premier méridien celui de $2^\circ 0'$ à l'orient de Paris, et nous compterons les arcs l positifs à l'est et négatifs à l'ouest.

10. En appliquant ces formules aux dix points précédemment indiqués, on forme les équations de condition suivantes :

Calais	$0 = x - 118\ y - 94\ z$,
Santvliet	$0 = x - 142\ y - 1\ z$,
Ypres	$25 = x - 111\ y - 57\ z$,
Arendonck	$25 = x - 139\ y + 26\ z$,
Lille	$35 = x - 98\ y - 50\ z$,
Baelen.	$35 = x - 131\ y + 31\ z$,
Bouchain	$70 = x - 77\ y - 39\ z$,
Asch	$70 = x - 121\ y + 47\ z$,
St-Quentin	$140 = x - 51\ y - 40\ z$,
Düren.	$140 = x - 109\ y + 80\ z$.

D'où l'on tire les équations finales

$$\begin{aligned} 54{,}00 &= x - 109{,}70\ y - 9{,}70\ z, \\ 46{,}03 &= x - 116{,}19\ y - 4{,}95\ z, \\ -48{,}57 &= x - 55{,}95\ y - 288{,}12\ z; \end{aligned}$$

et, pour les valeurs des inconnues auxiliaires,

$$x = +252{,}1,\quad y = +1{,}744,\quad z = +0{,}705.$$

Il en résulte

$$\alpha = 67^\circ 59';\quad \Phi = 51^\circ 25';\quad k = 1{,}880.$$

Digitized by Google

Le nombre k exprime la pente en mètres par minute de grand cercle. On la convertirait aisément dans la pente par kilomètre, ou dans l'inclinaison angulaire : on aurait pour celle-ci

$$i = 0°3'29'',$$

en admettant la minute de grand cercle de 1856^m.

On remarquera immédiatement que l'azimut α et l'inclinaison i diffèrent peu ou point des résultats obtenus au n° 8, par la moyenne des directions et par la cote éloignée des plaines suisses.

Examinons comment la surface que nous venons de déterminer représente les observations. Calculant, à cet effet, les altitudes par la formule (7), nous formons le tableau suivant, dans lequel nous avons ajouté la cote relative à la partie la plus profonde du Pas-de-Calais (51° 5' N., 0° 50' O.) :

REPÈRE.	Altitude observée.	Altitude calculée.	Différence.
	m.	m.	m.
Pas-de-Calais	— 60	— 41	+ 19
Calais	0	— 20	— 20
Ypres	+ 25	+ 18	— 7
Lille	35	46	+ 11
Bouchain	70	91	+ 21
Saint-Quentin	140	135	— 5
Santvliet	0	3	+ 3
Arendonck	25	27	+ 2
Baelen	35	45	+ 10
Asch	70	74	+ 4
Düren	140	118	— 22

La croupe de la Campine satisfait très-bien à notre hypothèse; la plus grande différence n'y surpasse pas 10^m. Pour Calais, on pourrait soutenir que la cote devait être effectivement négative, puisque les terrains pliocènes s'y trouvent déjà cachés par les alluvions.

Digitized by Google

Il nous semble donc permis de conclure que la surface doucement inclinée de la Campine et du pays de Juliers coïncide avec celle des terrains pliocènes du nord de la France, et que sa direction, comme son inclinaison, rapporte cette surface unique au soulèvement des Alpes principales. Ces vérités admises, les conséquences géognostiques sont faciles à tirer.

11. Nous partirons maintenant de la surface dont nous venons de déterminer les éléments, pour rechercher le relief que les terrains tertiaires antérieurs présentaient, avant ce soulèvement, par rapport à la mer correspondante.

A cet effet, nous allons réunir les altitudes de nos plateaux tertiaires, et nous retrancherons de chacune d'elles la cote de soulèvement qui résulte des déterminations précédentes, savoir :

$$h = 252{,}1 - 1{,}744\ \varphi + 0{,}705\ l.\cos\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

φ et l étant comptés en minutes d'arc, de la manière indiquée plus haut. Le reste exprimera le relief que les terrains émergés offraient sur l'Océan de ce temps.

Dans l'ignorance où nous sommes *à priori* des surfaces que ces terrains présentent, et afin d'écarter toute hypothèse préconçue, nous divisons nos points de repères en deux groupes, l'un au couchant et l'autre au levant. Nous recherchons ensuite la surface que chacun de ces groupes représente, au moyen des formules du n° 9. Mais il est clair que les surfaces ainsi calculées ne s'accorderont avec les observations qu'autant que celles-ci satisferont à une loi physique, et dans la partie seulement qui a été soumise à une même loi de dérangement.

Les points situés au centre du pays, sur la limite commune des deux groupes, pourront être employés simultanément dans la détermination des deux équations.

Digitized by Google

LIEUX.	Latitude.	Longitude.	Altitude actuelle.	Cote de SOULÈVEMENT. — Syst. des Alpes principales.	Hauteur au-dessus du niveau de la mer pliocène.
Repères du premier groupe.					
			m.	m.	m.
Rolleghem	50° 46′ N.	0° 56′ E.	46	38	8
Saint-Quentin	49.51	0.57	140	135	5
Prémont	50. 1	1. 3	163	121	42
Leuze	50.36	1.17	70	64	6
Le Quesnoy	50.15	1.18	132	102	30
Flobecq	50.45	1.27	70	54	16
Bavay	50.18	1.27	150	101	49
Jurbise	50.32	1.35	80	80	0
La Bouteille	49.52	1.38	218	151	67
Grand-Reng	50.20	1.44	162	105	57
Rœulx	50.30	1.46	137	89	48
Braine-le-Comte	50.37	1.48	108	77	31
Repères communs aux deux groupes.					
Momignies	50. 2	1.50	270	140	130
Assche	50.55	1.52	82	47	35
Itterbeek	50.50	1.55	74	58	16
Fontaine-l'Évêque	50.25	1.59	189	103	86
Nivelles	50.36	2. 0	152	84	68
Repères du deuxième groupe.					
Notre-Dame-aux-Bois	50.49	2. 9	115	66	49
Gembloux (au nord)	50.35	2.21	167	95	72
Rouxmiroir	50.43	2.27	140	84	56
Perwez	50.37	2.29	160	95	65
Tirlemont	50.48	2.36	75	80	— 5
Glabbeek	50.52	2.37	70	74	— 4
Burdinnes	50.35	2.44	170	106	64
Landen	50.45	2.45	90	89	1
Hannut	50.40	2.45	152	97	55
Waremme	50.41	2.56	125	101	24
Bodegnée	50.36	2.59	180	111	69
Rocourt	50.41	3.13	193	108	85
Fexhe	50.44	3.14	130	103	27
Maestricht (Saint-Pierre)	50.50	3.21	105	96	9
Weisweiler (au S.-O.)	50.49	3.57	205	114	91

Digitized by Google

Les hauteurs négatives qui se présentent vers la rive gauche du Démer, indiquent manifestement les dénudations qui forment la grande concavité de cette vallée; toutefois, comme elles sont peu considérables, nous n'avons pas cru nécessaire de les supprimer.

On posera donc les équations de condition ci-dessous :

Pour la recherche de la Ire surface :

$$\begin{aligned}
8 &= x - 106\,y - 41\,z,\\
5 &= x - 51\,y - 40\,z,\\
42 &= x - 61\,y - 36\,z,\\
6 &= x - 96\,y - 28\,z,\\
30 &= x - 75\,y - 27\,z,\\
16 &= x - 105\,y - 21\,z,\\
49 &= x - 78\,y - 21\,z,\\
0 &= x - 92\,y - 16\,z,\\
67 &= x - 52\,y - 14\,z,\\
57 &= x - 80\,y - 10\,z,\\
48 &= x - 90\,y - 9\,z,\\
31 &= x - 97\,y - 7\,z,\\
130 &= x - 62\,y - 6\,z,\\
35 &= x - 115\,y - 5\,z,\\
16 &= x - 110\,y - 3\,z,\\
86 &= x - 85\,y - 1\,z,\\
68 &= x - 96\,y - 0\,z;
\end{aligned}$$

Pour la recherche de la IIme surface :

$$\begin{aligned}
130 &= x - 62\,y - 6\,z,\\
35 &= x - 115\,y - 5\,z,\\
16 &= x - 110\,y - 3\,z,\\
86 &= x - 85\,y - 1\,z,\\
68 &= x - 96\,y - 0\,z,\\
49 &= x - 109\,y + 5\,z,\\
72 &= x - 95\,y + 13\,z,\\
56 &= x - 103\,y + 17\,z,\\
65 &= x - 97\,y + 18\,z,\\
-5 &= x - 108\,y + 23\,z,\\
-4 &= x - 112\,y + 24\,z,\\
64 &= x - 95\,y + 28\,z,\\
1 &= x - 105\,y + 29\,z,\\
55 &= x - 100\,y + 29\,z,\\
24 &= x - 101\,y + 36\,z,\\
69 &= x - 96\,y + 38\,z,\\
85 &= x - 101\,y + 46\,z,\\
27 &= x - 104\,y + 47\,z,\\
9 &= x - 110\,y + 51\,z,\\
91 &= x - 109\,y + 74\,z.
\end{aligned}$$

Ce qui fournit les deux groupes d'équations finales :

$$\begin{aligned}
40{,}83 &= x - 85{,}37\,y - 16{,}77\,z, & 49{,}65 &= x - 100{,}65\,y + 23{,}15\,z,\\
37{,}91 &= x - 89{,}68\,y - 15{,}84\,z, & 41{,}70 &= x - 101{,}88\,y + 25{,}93\,z,\\
26{,}76 &= x - 80{,}65\,y - 27{,}12\,z; & 45{,}94 &= x - 104{,}02\,y + 42{,}33\,z;
\end{aligned}$$

lesquels résultent de la combinaison de 17 équations, d'une part, et de 20 de l'autre.

Ces relations fournissent respectivement :

$$\begin{aligned}
x &= +\ 163{,}6, & x &= +\ 737{,}9,\\
y &= +\ 1{,}074, & y &= +\ 7{,}080,\\
z &= +\ 1{,}849; & z &= +\ 1{,}050;
\end{aligned}$$

Digitized by Google

d'où l'on tire, pour la première surface :

$$\alpha = 30°9', \quad \Phi = 51°32'; \quad k = + 2{,}139; \quad i = 0°3'58'';$$

et pour la seconde :

$$\alpha = 81°34'; \quad \Phi = 50°44'; \quad k = + 7{,}157; \quad i = 0°13'15''.$$

Les observations sont représentées par ces éléments de la manière suivante :

I.				II.			
Repères.	Cote observée.	Cote calculée.	Différ. Δ	Repères.	Cote observée.	Cote calculée.	Différ. Δ
	m.	m.	m.		m.	m.	m.
Rolleghem	8	—26	— 34	Momignies	130	293	+163
Saint-Quentin . . .	5	35	+ 30	Assche	35	— 82	—117
Prémont	42	32	— 10	Itterbeek.	16	— 43	— 59
Leuze.	6	9	+ 3	Fontaine-l'Évêque. .	86	127	+ 41
Le Quesnoy	30	33	+ 3	Nivelles	68	59	— 9
Flobecq	16	12	— 4	Notre-Dame-aux-Bois.	49	— 28	— 77
Bavay.	49	41	— 8				
Jurbise	0	35	+ 35	Gembloux	72	79	+ 7
La Bouteille. . . .	67	82	+ 15	Rouxmiroir	56	27	— 29
Grand-Reng. . . .	57	60	+ 3	Perwez	65	70	+ 5
Rœulx.	48	50	+ 2	Tirlemont	— 5	— 2	+ 3
Braine-le-Comte . .	31	47	+ 16	Glabbeek.	— 4	— 30	— 26
Momignies	130	87	— 43	Burdinnes	64	94	+ 30
Assche	35	31	— 4	Landen	1	26	+ 25
Itterbeek.	16	40	+ 24	Hannut	55	61	+ 6
Fontaine-l'Évêque. .	86	71	— 15	Waremme	24	61	+ 37
Nivelles	68	61	— 7	Bodegnée	69	99	+ 30
				Rocourt	85	71	— 14
				Fexhe.	27	50	+ 23
				Maestricht	9	14	+ 5
				Weisweiler	91	45	— 46

12. Plusieurs conséquences ressortent de ces faits. La première c'est que l'on représente d'une manière assez satisfaisante l'altitude de tous les plateaux éocènes de l'ouest, par notre surface n° I. Cette surface s'étend même jusqu'à la Dyle et peut-être jusqu'à la Geete, car elle représente

Digitized by Google

encore très-convenablement les cotes des quatre premiers points du tableau suivant, tandis qu'elle s'écarte fort rapidement des observations lorsqu'on s'avance plus à l'est :

REPÈRES.	Cote observée.	Cote calculée.	Différ. Δ
	m.	m.	m.
Notre-Dame-aux-Bois. .	49	56	+ 7
Gembloux	72	86	+ 14
Rouxmiroir	56	84	+ 28
Perwez	65	93	+ 28
Tirlemont	— 5	90	+ 95
Glabbeek.	— 4	88	+ 92
Burdinnes	64	114	+ 50

On peut donc attribuer à une inclinaison de 3′ ou 4′, vers le N.60°O, le jeu de cette grande pièce de l'écorce terrestre limitée par S^t-Quentin, Chimay, Jodoigne et Courtray. Les petites différences Δ qui subsistent, dans cette étendue, entre le calcul et l'observation, n'indiquent aucune déformation considérable de ce voussoir. Il faut se rappeler, en effet, qu'il s'agit d'une surface de dix mille kilomètres carrés. Les plus grandes différences *positives* s'expliquent même, dans plusieurs cas, par la dénudation que les plateaux ont éprouvée, comme à S^t-Quentin, où ils sont lavés jusqu'à la craie blanche, et à Jurbise, où ils n'existent plus qu'en lambeaux.

Ainsi nous pourrons regarder le dérangement des terrains éocènes, au couchant du méridien de Gembloux, comme un simple jeu par inclinaison, d'une immense pièce quadrilatère de l'écorce du globe.

Afin de nous assurer encore davantage de la réalité de cette hypothèse, nous avons repris la résolution des mêmes équations, en supprimant celles de Rolleghem, S^t-Quentin et Jurbise, dont les écarts paraissent tenir à des causes étrangères, et nous avons obtenu par les 14 relations restantes, toujours au moyen des moindres carrés :

$$\alpha = 27°0', \quad i = 0°2'58'',$$

Digitized by Google

valeurs qui représentent les observations avec des erreurs du même ordre. Nous nous en tiendrons, par conséquent, à nos premiers résultats; mais nous demeurerons assuré que les différentes combinaisons que l'on pourrait faire d'observations partielles, prises au couchant de la Geete ou de la Dyle, nous ramèneraient toujours à peu près aux mêmes chiffres, principalement en ce qui concerne la direction α.

A l'orient de la Dyle, les observations sont représentées d'une manière tolérable par notre surface n° II, qu'il n'est pas permis d'étendre plus loin vers l'ouest. L'équation de cette surface s'applique à l'espace triangulaire marqué par Gembloux, Tirlemont et Juliers. Il y a plusieurs années que nous avions cherché à représenter par une expression empirique les altitudes de la Hesbaie. Notre recherche, basée sur dix cotes de plateaux, était limitée au versant partiel Gembloux, Tirlemont, Ans. En prenant Perwez pour l'origine des coordonnées rectangulaires; en comptant les x sur la perpendiculaire de ce lieu, positifs à l'orient, et les y sur la méridienne, positifs au nord; enfin, en exprimant les x et les y en kilomètres et les z ou altitudes en mètres; nous avions trouvé que la formule

$$x - 4,8\, y - 0,95\, z + 151 = 0,$$

satisfait à nos données. Les observations étaient représentées de la manière suivante :

REPÈRES.	x.	y.	Altitude observée.	Altitude calculée.	Différ. Δ
Ans	m. + 53	m. + 7	m. 193	179	— 14
Souxhant	+ 42	+ 3	204	188	— 16
Fumal	+ 25	— 2	181	195	+ 14
Warisoux	+ 4	— 8	189	202	+ 13
Ernage	— 8	— 4	169	171	+ 2
Rosoux	+ 27	+ 13	127	122	— 5
Perwez	0	0	161	159	— 2
Overwinden	+ 17	+ 17	83	91	+ 8
Brusthem	+ 28	+ 25	62	62	0
Wilmersom	+ 8	+ 20	69	66	— 3

Digitized by Google

Or, cette équation empirique fournirait

$$\alpha = 78°,2, \quad i = 0° \, 17' \, 45'',$$

chiffres peu différents de ceux auxquels nous sommes parvenu tout à l'heure par une recherche tout à fait indépendante. Ceux-là se rapportaient d'ailleurs à la mer pliocène; et, réduits à la mer actuelle par les formules du numéro qui suit, ils nous eussent donné

$$\alpha = 78°,8, \quad i = 0° \, 16' \, 40''.$$

Il sera donc légitime de considérer notre surface n° II comme celle des terrains tertiaires recouverts du limon de la Hesbaie, à l'est du méridien de Gembloux.

13. Il est à remarquer que, par suite de la petitesse des inclinaisons mutuelles des surfaces, on peut représenter les altitudes actuelles en faisant simplement la somme des cotes de soulèvement, dues à tous les mouvements qui ont affecté successivement le sol. Ainsi, lorsqu'on a déterminé les valeurs de x', y', z'; x'' y'' z'', etc., pour les soulèvements particuliers, à l'aide des équations de condition de la forme (7), on obtiendra l'altitude totale du terrain par l'expression

$$H = X - \varphi . Y + l. \cos \varphi . Z, \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

dans laquelle il suffit de poser

$$X = x' + x'' + \ldots, \quad Y = y' + y'' + \ldots, \quad Z = z' + z'' + \ldots$$

Et l'on aurait de même pour la trace de la facette considérée sur la surface actuelle de la mer :

$$\text{tang } A = \frac{Y}{Z}, \quad F = \frac{X}{Y}, \quad K = \frac{Y}{\sin A} = \frac{Z}{\cos A}, \quad I = \frac{K}{m} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Dans ces formules, A, F, K, I désignent, dans le nouveau système de coordonnées, ce que nous avions appelé précédemment α, Φ, k, i. La

Digitized by Google

quantité m est le nombre de mètres contenu dans l'unité d'arc employée.

De même, s'il s'agissait de déterminer l'intersection de deux facettes et leur inclinaison mutuelle, on poserait

$$X' = x'' - x', \quad Y' = y'' - y', \quad Z' = z'' - z'; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

puis on en déduirait les éléments, comme précédemment,

$$\text{tang } A' = \frac{Y'}{Z'}, \quad F' = \frac{X'}{Y'}, \quad K' = \frac{Y'}{\sin A'} = \frac{Z'}{\cos A'}, \quad I' = \frac{K'}{m}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Dans ces dernières équations, A′ est l'azimut de l'arc d'intersection, F′ la latitude du point où cet arc coupe le premier méridien, et I′ l'incidence mutuelle des deux surfaces.

Réunissant les valeurs des constantes que nous avons calculées tout à l'heure, nous trouverons, pour exprimer les altitudes actuelles des terrains qui ont participé aux soulèvements considérés (n^{os} **10** et **11**) :

$$h = 415{,}7 - 2{,}818\,\varphi + 2{,}554\; l.\cos\varphi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

dans l'espace à l'occident du méridien de Gembloux, et

$$h = 990{,}0 - 8{,}824\,\varphi + 1{,}755\; l.\cos\varphi, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

à l'orient du même méridien.

On trouverait également pour le système des deux surfaces I et II du n° **11** :

$$A' = 97°35', \quad F' = 50°36', \quad I' = 0°11'13'';$$

d'où l'on voit que Nivelles occupe le sommet même de l'angle dièdre.

Mais, au nord de ce point, l'arête relevée du quadrilatère du couchant passe au-dessus de l'autre surface, et s'étend au delà de son intersection avec le versant hesbayen. Cette disposition explique la saillie du terrain dans le prolongement de l'arête supérieure. Celle-ci marque apparemment la rive gauche de la Dyle; et si le relèvement s'est opéré en échelons, une autre arête parallèle aura marqué la rive gauche de la grande Geete.

Digitized by Google

Ces faits s'accordent avec la disposition des couches signalée par M. Dumont dans les vallées de la Hesbaie. Nous avons trouvé pour l'arête de notre quadrilatère $\alpha = 30^\circ 9'$, d'où l'on serait fondé à rapporter le jeu de ce voussoir au système des Alpes occidentales. Telle est aussi, à peu de choses près, la direction des dislocations en travers qui coupent le versant de la Hesbaie et que M. d'Omalius d'Halloy rattache au même système. On obtient, en effet, pour les directions des failles principales qui ont donné leur origine aux vallées de la basse Belgique :

							Azimut α au milieu de l'arc de jonction.
Escaut	Pecq	50°42′ N.,	1° 0′ E.;	Gand	51° 3′ N,	1°23′ E.	34,7
Dendre	Ath	50.38	1.26 ;	Termonde	21. 2	1.46	27,9
Senne	Soignies	50.35	1.44 ;	Vilvorde	50.56	2. 5	32,3
Dyle	Houtain-le-Mont	50.35	2. 5 ;	Louvain	50.53	2.22	30,8
Grande Geete	Glimes	50.41	2.30 ;	Tirlemont	50.49	2.36	25,4
Petite Geete	Folx-les-Caves	50.40	2.36 ;	Léau	50.50	2.46	32,3
					Moyenne		30,6

La moyenne de ces directions concorde, par conséquent, avec le relèvement du pan de l'écorce terrestre marqué par St-Quentin, Chimay, Jodoigne et Courtray.

14. Quant au redressement du versant de la Hesbaie, la direction α, suivant laquelle il s'est opéré, le rattache au système du Tatra et de l'île de Wight. Cette direction est, selon le n° **11**,

$$\alpha = 81^\circ 34';$$

or, le système du Tatra donne, d'après les éléments de M. Élie de Beaumont, en le transportant du Pic de Lomnitz au méridien de Bruxelles,

$$\alpha = 82^\circ 48'.$$

Il y a entre ces deux nombres une remarquable coïncidence.

Il est, par conséquent, difficile de douter qu'une bande de terrain, située au pied et au nord du noyau primaire de la Belgique, ait subi l'in-

Digitized by Google

fluence de ce système; et cette influence semble même s'être étendue au pays de Juliers. L'inclinaison acquise est la plus considérable de toutes nos pentes tertiaires. Ce mouvement est donc nettement accusé sur le terrain.

On sait d'ailleurs que le système de l'île de Wight se place entre le grès de Fontainebleau et le calcaire de la Beauce, et qu'il vient clore la section inférieure des terrains miocènes. Il sera donc parfaitement logique, abstraction faite de toute autre considération, de ranger dans cette section les systèmes tongrien, rupélien et boldérien de M. Dumont.

En admettant, comme les cotes générales du terrain l'annoncent, que le mouvement se soit étendu à l'orient de la Meuse, on serait également fondé à rapporter à la même section les lignites miocènes de la Prusse rhénane.

Dans cette hypothèse, l'accident a dû affecter l'arête méridienne déjà existante du pays de Herve (n° 1). Cette arête constituait alors un véritable cap, que l'on reconnaît encore parfaitement à l'aspect des lieux. Ce n'est pas, au reste, le seul promontoire que le voyageur rencontre, en se rendant d'Aix-la-Chapelle à la côte d'Ostende. On franchit d'abord, comme nous venons de le dire, l'arête dorsale du pays de Herve, qui croise l'Ardenne en s'étendant au loin vers le sud. On descend ensuite dans l'anse miocène de la Hesbaie, où les eaux fluviatiles, arrêtées par les sables dans des plages peu profondes, se sont partagées avec les eaux marines. Puis on trouve, au delà de Bruxelles, la croupe, peu saillante, il est vrai, de Lennick et d'Assche, parcourue par la voie romaine. Placé à la chapelle de Meysse (65^{m}), on domine encore, comme du haut d'un cap avancé, les plaines indéfinies de Malines et de Termonde.

C'était donc entre ces deux arêtes méridiennes que se trouvait principalement limité le bassin miocène de Belgique.

15. Les considérations qui précèdent reçoivent un nouvel appui de l'examen des protubérances de sables de Diest, qui s'étendent soit en dehors des voussoirs que nous avons considérés tout à l'heure, soit même sur leur surface. Ces collines alignées courent depuis Montaigu jusqu'au Mont-Cassel, sur une longueur totale de 176 kilomètres. Les monticules du Hageland appartiennent à cette ligne. On peut y rapporter à quelques

Digitized by Google

égards les sables de Groenendael. La file de collines qui va de Lessines et de Grammont à Renaix, poursuit le même alignement. Enfin les éminences du Kemmelberg et de Cassel, réunies par une sorte de massif allongé, terminent la ride vers le couchant.

Voici la situation et l'altitude des principaux repères de cette ligne. Nous y joignons l'altitude calculée par la formule (**14**). Les différences Δ montrent au premier coup d'œil une allure régulière :

REPÈRES.			Altitude observée.	Altitude calculée.	Différ. Δ
			m.	m.	m.
Cassel	50°48'N.	0° 9'E.	159	− 67	− 226
Kemmelberg	50.47	0.29	154	− 33	− 187
Mont de l'Inclus	50.46	1. 9	135	+ 35	− 100
Groenendael	50.49	2. 4	95	116	+ 21
Pellenberg	50.52	2.27	101	143	+ 42
Montaigu	50.59	2.39	65	143	+ 78

En traitant ces données par les formules du n° 2, nous formons les équations de condition ci-dessous :

$$1{,}226 = 0{,}002\,62\,x - 1{,}000\,0\,y,$$
$$1{,}225 = 0{,}008\,44\,x - 1{,}000\,0\,y,$$
$$1{,}225 = 0{,}020\,07\,x - 0{,}999\,8\,y,$$
$$1{,}227 = 0{,}036\,07\,x - 0{,}999\,3\,y,$$
$$1{,}229 = 0{,}042\,75\,x - 0{,}999\,1\,y,$$
$$1{,}234 = 0{,}046\,24\,x - 0{,}998\,9\,y,$$

qui fournissent pour équations finales.

$$1{,}229\,1 = 0{,}036\,787\,x - 0{,}999\,08\,y,$$
$$1{,}227\,8 = 0{,}026\,026\,x - 0{,}999\,54\,y;$$

d'où l'on tire

$$x = +\,0{,}184\,5, \qquad y = -\,1{,}225\,5;$$

et enfin

$$N = -81°25', \quad \beta = 51°3'; \quad \text{et} \quad \phi = 50°52', \quad \alpha = 84°56'.$$

Digitized by Google

Lorsqu'on examine comment ces éléments représentent les faits observés, on trouve pour les plus courtes distances d de nos repères à l'arc ainsi déterminé, exprimées en minutes de grand cercle :

	d		d
Cassel.	+ 5′	Groenendael.	— 3′
Kemmelberg . . .	+ 2	Pellenberg	— 2
Mont de l'Inclus . .	— 3	Montaigu.	+ 5.

Ces différences sont peu importantes, relativement à la longueur de l'arc considéré. Elles montrent une tendance véritable à l'alignement, dans les amas de sables dont il s'agit.

La direction rappelle évidemment encore le système du Tatra, comme M. d'Omalius d'Halloy l'a déjà fait remarquer. Les deux constantes Φ et α sont remarquablement voisines de celles que l'on a trouvées (nº 11) pour le versant de la Hesbaie; d'où l'on serait tenté de conclure qu'à part les petites différences accidentelles, le redressement de la Hesbaie et l'ouverture de la faille sableuse ne sont qu'un seul et même accident.

Il y a plus encore. D'après nos éléments, la faille prolongée va passer dans l'île de Wight elle-même et ranger la côte de Dorsetshire. En sorte qu'il existerait une véritable unité entre les révolutions qui ont laissé leurs traces à travers ces contrées, depuis le rivage méridional de l'Angleterre jusqu'aux couches miocènes de Juliers.

16. Il nous sera facile de montrer, en outre, par les considérations hypsométriques, que l'éjaculation des sables de Diest est antérieure non-seulement au système des Alpes principales, mais aussi à celui des Alpes occidentales.

Nous avons déjà appelé l'attention sur l'allure régulière des cotes Δ (nº 15). Cette régularité ne paraît nullement dans les altitudes actuelles; mais elle se montre de la manière la plus remarquable dans la colonne des différences Δ, lorsqu'on a affecté le terrain, par le calcul, de l'effet des deux soulèvements qui ont agi sur ces masses. Il ne reste plus alors que l'accident particulier qui a déterminé les protubérances.

Si nous coupons le globe terrestre par le plan vertical dont nous avons

Digitized by Google

déterminé la trace tout à l'heure, et si nous projetons les sommets de toutes les protubérances sur ce plan, nous trouverons les sommets des cotes Δ situés presque exactement sous un arc de grand cercle, faiblement incliné à la surface terrestre. Nommons, en effet, p l'arc compris, sur la surface du globe, entre Cassel et chacun des repères suivants, nous trouverons que la différence Δ du tableau varie à peu près proportionnellement à p, en sorte qu'on aurait, sans erreur considérable :

$$\Delta = ep + q.$$

Les valeurs

$$e = + 3{,}18, \qquad q = - 223{,}6,$$

satisfont le mieux aux observations. Notre hypothèse représente alors, comme suit, les données :

LIEUX.	Arc p.	Différences Δ observées.	Différences Δ calculées.	Erreurs de l'hypothèse.
		m.	m.	m.
Cassel.	0'	— 226	— 224	+ 2
Kemmelberg	12	— 187	— 185	+ 2
Mont de l'Inclus	38	— 100	— 103	— 3
Groenendael	73	+ 21	+ 9	—12
Pellenberg	87	+ 42	+ 53	+11
Montaigu	95	+ 78	+ 78	0

Cette concordance nous paraît digne d'attention. Elle indique d'abord que les protubérances des sables de Diest se sont produites dans une surface sensiblement de niveau à cette époque, mais inclinée de 5'53" sur celle du voussoir S^t-Quentin, Chimay, Gembloux, Courtray. Elle montre ensuite que leur formation est antérieure aux deux redressements que nous avons déterminés plus haut, aux deux systèmes des Alpes, puisqu'on ne ramène les sommets sous une même surface qu'en déduisant préalablement les effets de ces deux mouvements.

17. Si nous essayons de résumer les faits développés dans ce mémoire, nous pourrons énumérer les points suivants :

Digitized by Google

Il existe, depuis la Lorraine jusqu'à l'extrémité septentrionale du pays de Herve, une chaîne de protubérances qui appartient au système sardo-corse.

Il existe, depuis le Palatinat jusqu'au pays de Liége, une ride du système du Thüringerwald, qui traverse obliquement la Hardt, le Hunsrück et l'Eifel, et vient croiser la ride précédente aux Hautes-Fanges.

Les Hautes-Fanges ont subi, du fait de ces deux soulèvements *postérieurs,* un surexhaussement de 300 mètres. Déduction faite de ce surexhaussement, cette région, qui est en dehors de l'axe de figure de l'Ardenne, n'appartenait pas à la ligne de faîte de l'île primitive.

Cette ligne de faîte passait, au contraire, considérablement au midi des Hautes-Fanges, et présentait très-exactement la direction assignée, par M. Élie de Beaumont, au système du Westmoreland et du Hunsrück.

L'inégalité d'inclinaison aux flancs septentrionaux des massifs rhénans de l'Ardenne et du Brabant, va en se développant à mesure qu'on avance vers l'ouest. Elle semble naître dans le méridien d'Hozémont, avec les injections porphyriques.

L'origine de cette inégalité (ou rupture de la pente, précédemment continue) est postérieure à l'époque de la houille. D'où l'on pourrait conclure que les éruptions porphyriques le sont aussi.

La surface déterminée par la Campine et le pays de Juliers s'est émergée dans le système des Alpes principales; elle ne forme qu'une même surface avec les terrains pliocènes de la Flandre française et de la Picardie; prolongée, elle va passer par les plateaux de Berne et Lausanne.

Le quadrilatère S^t-Quentin, Chimay, Gembloux, Courtray a subi un jeu de voussoir, sans déformation notable, dans le système des Alpes occidentales.

Le versant de la Hesbaie, traité de différentes manières, soit isolément, soit avec les terrains miocènes de la Prusse rhénane, atteste une forte inclinaison, et se dirige à un degré près dans le système de l'île de Wight et du Tatra. Les terrains miocènes du bassin de Tongres s'arrêteraient donc à l'horizon géognostique du grès de Fontainebleau.

La crevasse d'éjaculation des sables de Diest appartient, comme on le

Digitized by Google

savait déjà, au même système du Tatra; elle s'accorde presque identiquement avec la trace du versant hesbayen déterminé plus haut; prolongée, elle passe par l'île de Wight elle-même et la côte du Dorsetshire. Elle est antérieure, comme on devait s'y attendre, au jeu du voussoir St-Quentin, Chimay, Gembloux, Courtray.

Tels sont les résultats que nous ne prétendons pas affirmer, mais proposer, pour ainsi dire, et sur lesquels nous serions heureux d'appeler une sérieuse investigation.

FIN.

Digitized by Google

OBSERVATIONS

DES

PHÉNOMÈNES PÉRIODIQUES.

Digitized by Google

Digitized by Google

OBSERVATIONS

DES

PHÉNOMÈNES PÉRIODIQUES.

I. — *Météorologie et physique du globe.*

Les observations météorologiques, dont on trouve ici les résumés, se font sous les auspices du Gouvernement, et la publication a lieu par les soins de l'Observatoire royal de Bruxelles. Tous les instruments ont été comparés à ceux de l'Observatoire, et appartiennent aux collections de l'État; ceux de St-Trond font seuls exception.

L'organisation de ces travaux repose sur les dispositions suivantes :

1° Un arrêté royal, du 15 mai 1851, a créé, à l'Observatoire royal de Bruxelles, un dépôt spécial d'instruments pour favoriser la culture des sciences. Les observateurs qui y empruntent des instruments de météorologie doivent envoyer leurs travaux au Directeur de cet établissement en vue d'établir un système d'observations complet pour la climatologie du royaume;

2° Une lettre du Département de l'intérieur (août 1850) porte que les instruments nécessaires à des observations météorologiques régulières seront fournis aux *Écoles d'agriculture*, et une seconde lettre (4 décembre 1851) prescrit que les observations seront transmises au Directeur de l'Observatoire;

3° Une autre lettre du Département de l'intérieur (19 mai 1854) désigne

Digitized by Google

le Directeur de l'Observatoire pour coordonner les journaux météorologiques tenus à bord des vaisseaux belges, et qui lui seront adressés par le Département des affaires étrangères ensuite de la résolution adoptée par la Conférence maritime tenue à Bruxelles en 1853.

Il y a donc trois sources distinctes de travaux, comprenant un ensemble de recherches climatologiques sur terre et sur mer, dont le siége est établi à l'Observatoire royal de Bruxelles, qui y prend directement part. Les stations sont :

1° Gand, Liége, Stavelot, Namur, Capryk, Ostende, dont les instruments appartiennent, en tout ou en partie, au dépôt de Bruxelles (il faut joindre à ces stations celle de Bastogne, qui sera bientôt munie aussi d'instruments comparés) ;

2° Les Écoles d'agriculture de Tirlemont, Verviers, la Trapperie, Ostin, Chimay, Leuze et Thourout;

3° Les vaisseaux de l'État ou de la marine marchande [1].

De tous les travaux reçus jusqu'à ce jour, il n'a été publié que les résumés annuels, calculés en grande partie à l'Observatoire royal. Il est à regretter, dans l'intérêt de la science, que les observations mêmes n'aient pu être livrées à la publicité, comme cela se pratique dans plusieurs autres pays. Cet état de choses tient à ce que le bureau météorologique créé près de l'Observatoire n'a pas encore reçu d'organisation définitive.

Les observations dont je présente ici les résultats généraux pour 1853 sont :

1° *Observations sur la météorologie, ainsi que sur l'électricité et le magnétisme de la terre*, faites à l'Observatoire royal de Bruxelles;

2° *Observations météorologiques*, faites à Gand, par M. le professeur Duprez, membre de l'Académie ;

3° *Observations météorologiques*, faites à Liége, par M. le professeur D. Leclercq, directeur de l'École industrielle;

4° *Observations météorologiques*, faites à Stavelot par M. G. Dewalque, correspondant de l'Académie;

(1) Aucuns registres n'ont été produits jusqu'aujourd'hui.

Digitized by Google

5° *Observations météorologiques,* faites à St-Trond, par M. le professeur J.-H. Van Oyen;

6° *Observations météorologiques,* faites à Namur, par M. le professeur Ch. Montigny;

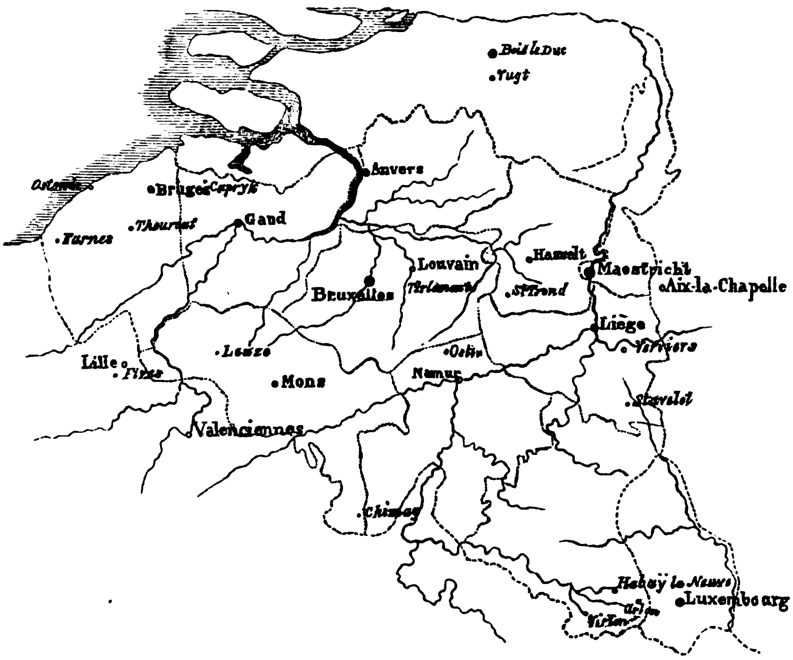
7° *Observations météorologiques,* faites à Furnes, par M. A. De Hoon, ingénieur des wateringues;

8° *Observations météorologiques,* faites dans les Écoles d'agriculture :

a. de Tirlemont, par M. le professeur F. Vanden Berghe;
b. de Verviers, par M. le professeur Phocas Lejeune;
c. d'Ostin, près de Namur, par le directeur M. F. Bertrand;
d. de Leuze, par M. le professeur Ch. Amand;
e. de Chimay, par M. le professeur F. De Perre;

9° *Observations météorologiques,* faites à Munich, sous la direction de M. de Martius.

Le plan ci-joint pourra donner une idée de la disposition des différentes stations météorologiques du royaume.



Digitized by Google

II. — *Observations botaniques et zoologiques.*

Les observations relatives aux phénomènes périodiques de la végétation ont commencé à être faites, en 1839, dans le jardin de l'Observatoire de Bruxelles. Dans sa séance du 15 janvier 1842, la classe des sciences a bien voulu me permettre de publier, sous ses auspices, des *Instructions pour l'observation des phénomènes périodiques*, lesquelles ont été traduites dans presque toutes les langues. Ce genre d'observations se trouve aujourd'hui à peu près universellement répandu dans les différents pays qui publient, chacun, les résultats qui leur sont propres. On ne trouvera dans les tableaux suivants que les résumés des observations qui nous ont été directement transmis. Les stations sont au nombre de seize, savoir :

a. Observations botaniques.

1. *Bruxelles*, dans le jardin de l'Observatoire, par M. A. Quetelet.
2. » » d'horticulture, par M. Schram.
3. *Gand*, » de l'Université, par M. J. Donkelaer. (Communiquées par M. le professeur Kickx.)
4. *Ostende*, par M. Mac-Leod.
5. *Anvers*, dans le Jardin des Plantes, par M. le docteur Sommé.
6. *Waremme*, par MM. le baron Edm. de Selys-Longchamps et Michel Ghaye.
7. *Liége*, par MM. le baron Edm. de Selys-Longchamps et G. Dewalque.
8. *Stavelot*, par M. G. Dewalque.
9. *Namur*, par M. le professeur Aug. Bellynck.
10. *Jemeppe-sur-Meuse*, par M. Alph. De Borre.
11. *Grammont*, par M. Alph. De Borre.
12. *Ostin*, près de Namur, par M. le professeur F. Bertrand.
13. *Verviers*, par M. le professeur Phocas Lejeune.
14. *Munich*, dans le Jardin des Plantes, sous la direction de M. de Martius.)
15. *Vienne*, par M. le professeur Fritsch.
16. *Venise*, dans le Jardin Botanique, sous la direction de M. Zantedeschi.

Digitized by Google

So fulier 2 bis

b. Observations zoologiques.

1. *Bruxelles,* par M. Vincent.
2. *Waremme*, par MM. le baron de Selys-Longchamps et Michel Ghaye.
3. *Stavelot,* par M. G. Dewalque.
4. *Ostende*, par M. Mac-Leod.
5. *Namur*, par M. A. Bellynck.
6. *Vienne*, par M. Ch. Fritsch.

Si nous jetons maintenant un coup d'œil sur les tableaux généraux, nous trouverons que la température de 1853 a été comparativement assez froide. L'année avait commencé cependant par un mois de janvier très-doux et par une végétation précoce. Le 21 janvier, un poirier était en fleur dans le jardin de l'Observatoire, et ce phénomène de précocité se remarquait également à Gand et dans d'autres villes (1). Des gelées survinrent ensuite, et, sans être excessives, elles se prolongèrent jusqu'au commencement de mars. Ce fut vers le 9 de ce mois que la végétation recommença à se manifester, mais quelques jours plus tard de nouveaux froids survinrent et en avril seulement la température reprit sa marche normale. La floraison se trouvait considérablement retardée : le lilas, *Seringa vulgaris,* qui fleurit ordinairement à la fin d'avril, n'était en fleur que le 18 mai, à Namur; le 19 à l'Observatoire de Bruxelles, le 23, dans le Jardin Botanique de la même ville, et à Ostende; le 26, à Waremme; et du 29 au 31 seulement à Stavelot, à Gand et à Verviers.

La fraise, qui mûrit à Bruxelles le 5 juin, dans des temps ordinaires, ne donnait ses fruits, à Bruxelles, que vers le milieu du mois, et, à Gand et à Ostende, du 22 au 25 juin.

(1) Voyez, sur ce sujet, des observations de M. Dewalque, dans le tome XXVIII des *Mémoires de l'Académie*, p. 96, ainsi que deux notices de M. Quetelet, dans la 1re partie du t. XX des *Bulletins,* pp. 9 et 151; puis une troisième notice par le même, sur les effets des froids excessifs qui ont commencé le 5 février (p. 473). On trouve aussi, pp. 160 et 477 du t. XX, deux notices de MM. Ch. Morren et Edm. de Selys-Longchamps sur le même hiver de 1852-1853.

Digitized by Google

Pour permettre de juger plus facilement de la température dans toute l'étendue du royaume, j'ai réuni dans le tableau suivant les résultats pour chaque mois, d'après les extrêmes diurnes observés dans les différentes stations.

MOIS.	Bruxelles.	Gand.	Furnes.	Leuze.	Namur (²).	Ostin.	Tirlemont.	S^t-Trond.	Liége.	Verviers.	Stavelot.	Chimai.	MOYENNE 20 ans.
Janvier	5°,6	5°,2	6°,5	6°,1	4°,9	3°,9	5°,1	5°,3	5°,3	5°,8	4°,6	5°,0	2°,0
Février.	0,5	0,6	1,1	1,7	0,0	0,1	0,4	-0,1	0,3	0,1	-1,0	-0,4	3,8
Mars	1,9	1,8	»	3,8	0,5	0,7	2,6	0,8	1,3	1,2	-0,6	0,9	5,5
Avril	8,5	9,3	9,1	9,2	7,8	7,2	8,5	7,7	8,2	7,8	7,1	5,7	9,0
Mai.	13,2	13,7	12,8	14,5	13,1	11,8	12,8	13,0	13,0	12,6	13,4	11,9	13,5
Juin	17,3	18,3	16,1	18,0	18,3	16,3	16,9	17,1	16,9	16,8	16,0	16,0	17,2
Juillet.	18,9	20,0	18,1	(¹)19,5	19,2	18,2	18,8	19,1	19,3	19,3	18,1	18,2	18,2
Août	17,6	18,6	17,4	»	17,9	16,6	17,5	17,6	17,7	17,5	16,6	16,4	17,8
Septembre . . .	14,9	15,7	»	»	14,0	14,1	14,3	14,8	15,3	14,6	13,6	»	14,8
Octobre	12,0	11,6	12,1	»	11,1	10,6	10,9	11,5	11,3	11,6	10,3	»	10,7
Novembre. . . .	4,7	4,6	5,9	»	3,5	4,3	3,6	4,1	4,2	4,6	3,2	-0,2	6,6
Décembre. . . .	-2,4	-2,4	-0,6	»	-3,1	»	-3,2	-2,9	-2,7	-0,8	-4,0	-4,1	3,6
L'ANNÉE	9,4	9,7	»	»	9,4	»	9,0	9,0	9,2	9,3	8,1	»	10,2

(¹) Première quinzaine. (²) D'après les observations faites à 9 heures.

On voit que la marche de la température a été à peu près uniforme dans toute l'étendue du royaume. La température de janvier s'est élevée partout au-dessus de la moyenne ordinaire 2°,0 cent. Les moyennes de février et de mars se sont maintenues, au contraire, de beaucoup au-dessous des moyennes 3°,8 et 5°,5 obtenues pour les vingt années précédentes. La marche normale du thermomètre, rétablie vers le commencement d'avril, s'est régulièrement maintenue jusqu'aux mois de novembre et de décembre, époque où elle s'est sensiblement abaissée de nouveau.

Bruxelles, le 28 mai 1855.

A. QUETELET.

Digitized by Google

5

RÉSUMÉ

DES

OBSERVATIONS SUR LA MÉTÉOROLOGIE ET SUR LE MAGNÉTISME TERRESTRE,

Faites à l'Observatoire royal de Bruxelles, en 1853, et communiquées par le directeur, A. QUETELET.

Pression atmosphérique. — Le baromètre n° 120 d'Ernst, qui a servi aux observations, est à niveau constant; il a été placé, en 1842, dans une salle spacieuse, dont les fenêtres sont dirigées vers le nord et dont la température est fort égale.

Par 33 comparaisons faites à Paris, de novembre 1841 à décembre 1842, avec son baromètre-type de Fortin, M. le commandant Delcros a trouvé :

Barom. 120 Ernst = hauteur absolue — $0^{mm},386$;

M. Mauvais, par 12 comparaisons faites en décembre 1841, avec le baromètre Fortin de l'Observatoire de Paris, dont l'équation, d'après MM. Bravais et Martins, est — $0^{mm},13$, a trouvé :

Barom. 120 Ernst = hauteur absolue — $0^{mm},547$.

D'après le baromètre à siphon du même établissement, qui donne à quelques centièmes près la hauteur absolue, il a obtenu :

Barom. 120 Ernst = hauteur absolue — $0^{mm},453$.

En prenant la moyenne, on aurait, par conséquent :

Barom. 120 Ernst = hauteur absolue — $0^{mm},462$.

Digitized by Google

Les nombres des tableaux sont tels qu'ils ont été obtenus par l'observation, après avoir subi toutefois la correction pour être ramenés à 0° de température centigrade. Pour rapporter les observations de Bruxelles à la hauteur absolue, il faudra donc ajouter 0^{mm},46 aux nombres donnés dans nos tableaux. Cette correction totale renferme la dépression due à la capillarité, l'erreur du zéro du thermomètre et celles qui pourraient provenir d'autres imperfections de l'instrument.

Dans les publications précédentes, nous avons donné l'altitude de la cuvette du baromètre d'après un nivellement particulier exécuté, en 1833, par M. Masui, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, et qui se rattachait au nivellement général fait le long de l'Escaut; en voici les éléments :

Hauteur du zéro de la jauge du canal au-dessus de l'unité de hauteur de la mer du Nord	m. 13,148
Hauteur du sol de l'Observatoire au-dessus de la jauge du canal . . .	43,371
— du rez-de-chaussée au-dessus du sol	1,880
— de la cuvette au-dessus du rez-de-chaussée (1)	1,180
L'altitude de la cuvette du baromètre au-dessus de *l'unité de hauteur de la mer du Nord* serait, d'après M. Masui, de	59^{m},579

Le nivellement exécuté antérieurement par l'ingénieur Craan, auteur du *Plan géométrique de la ville de Bruxelles,* fournit un résultat un peu plus faible; les cotes n'ont été données par lui qu'en nombre ronds :

Hauteur des eaux du canal au-dessus de l'unité de hauteur ou le zéro de la mer du Nord	m. 15
Hauteur de la tablette du mur du grand bassin du canal au-dessus des eaux.	2
— du rez-de-chaussée de l'Observatoire au-dessus de la tablette du mur du grand bassin	41
Hauteur de la cuvette au-dessus du rez-de-chaussée	1,18
L'altitude de la cuvette du baromètre au-dessus de *l'unité de hauteur ou le zéro de la mer du Nord* serait, d'après Craan, de	59^{m},18

D'après le *Nivellement général du royaume* se rattachant à celui des chemins de fer,

(1) La cuvette du baromètre de Luxembourg, observé en 1833, ne se trouvait qu'à 0^{m},75 au-dessus du plancher; cette hauteur, pour le baromètre de Maestricht, employé de 1834 à 1840, était de 1^{m},23 et pour le baromètre de Luxembourg, qui a servi en 1841, de 1^{m},18; la cuvette du baromètre d'Ernst, placé en 1842, est restée depuis à 1^{m},18 au-dessus du rez-de-chaussée.

Digitized by Google

exécuté par l'administration des Ponts et Chaussées et publié en 9 cartes par le département des Travaux Publics :

	m.
La cote dans l'angle du boulevard de l'Observatoire, par rapport au plan de comparaison qui passe à la hauteur de la basse mer moyenne des vives eaux d'Ostende, formant le zéro du port, est de.	55,20
La hauteur du rez-de-chaussée de l'Observatoire au-dessus du trottoir dans l'angle du boulevard, mesurée directement, est de	2,59
Celle de la cuvette au-dessus du rez-de-chaussée, de	1,18
L'altitude de la cuvette du baromètre au-dessus de *la basse mer moyenne des vives eaux d'Ostende, formant le zéro du port* est, d'après la carte du Nivellement général du royaume, de	58^{m},97

Enfin, d'après M. l'ingénieur Le Hardy de Beaulieu, qui a été chargé du *Nivellement général de la ville de Bruxelles*, exécuté tout récemment :

	m.
La hauteur de la tablette du pont Léopold, au grand bassin (qui a servi de base à ses opérations), au-dessus du niveau moyen de la mer, serait, d'après les renseignements qui lui ont été fournis par le Département de la Guerre, de	16,81
La plaque de repère scellée à l'angle du boulevard, en face de l'Observatoire, accuse une hauteur au-dessus de la tablette du pont Léopold, de .	38,03
La hauteur du rez-de-chaussée de l'Observatoire au-dessus du bord supérieur de cette plaque, mesurée directement, est de	2,97
Celle de la cuvette au-dessus du rez-de-chaussée, de	1,18
L'altitude de la cuvette du baromètre au-dessus *du niveau moyen de la mer* est, d'après M. Le Hardy de Beaulieu, de	58^{m},99

Ces deux derniers résultats, on le voit, sont plus faibles encore que ceux obtenus par MM. Craan et Masui, mais ils s'accordent très-bien entre eux, quoique se rattachant l'un au nivellement des chemins de fer, l'autre à celui des cours d'eau; leur point de jonction à la porte de Cologne est coté presque identiquement : la carte du Nivellement général donne au boulevard, en face de la porte, 20^{m},10 d'altitude, tandis que la plaque du Nivellement de Bruxelles (scellée à l'angle du boulevard et de la rue Neuve), dont le bord supérieur est un peu plus élevé que le pavé, accuse 20^{m},22.

La surface de départ, il est vrai, n'est pas la même : le plan de comparaison du Nivellement général du royaume passe à la hauteur de la *basse mer moyenne* des vives eaux d'Ostende, formant le zéro du port, tandis que M. Le Hardy de Beaulieu suppose le

Digitized by Google

le nivellement du canal appuyé sur la *mer moyenne;* c'est évidemment une erreur, et cette erreur est commune à presque tous les nivellements opérés en Belgique. Pour éviter les cotes négatives, nos ingénieurs sont partis généralement de la *basse mer moyenne;* mais cette surface de départ présente un grave inconvénient, car l'*unité de hauteur* ou la quantité dont la mer s'abaisse ou s'élève relativement au niveau moyen n'étant pas la même pour les différents ports, il n'est pas possible de comparer entre eux les divers nivellements, à moins de connaître à quel endroit ils se rapportent.

Le plan de comparaison du Nivellement général du royaume passant à la hauteur de la *basse mer moyenne* des vives eaux d'Ostende, formant le zéro du port, et la cote de la *haute mer moyenne* indiquée sur le même plan étant de $4^m,85$, on obtient $2^m,42$ pour la *mer moyenne;* en sorte qu'il faut diminuer le nombre obtenu d'après le Nivellement général de cette quantité. Admettons les trois autres nivellements comme se rapportant au même point, le zéro du port d'Ostende; on aura pour altitude de la cuvette du baromètre au-dessus de la *mer moyenne :*

D'après M. Masui	$57^m,15$
— l'ingénieur Craan.	$56^m,76$
— M. Le Hardy de Beaulieu	$56^m,57$
— l'administration des Travaux Publics	$56^m,55$

Si les trois premiers nivellements se rapportaient, au contraire, à la basse mer à Anvers, comme se rattachant à celui de l'Escaut, on obtiendrait, d'après M. Masui, $57^m,66$, d'après Craan, $57^m,26$ et d'après M. Le Hardy de Beaulieu, $57^m,07$, en admettant toutefois que l'*unité de hauteur* du port d'Anvers = $1^m,92$ (d'après l'*Annuaire de l'Observatoire*). L'accord serait alors moins satisfaisant.

Température de l'air. — La température de l'air a été déterminée par un thermomètre centigrade de Bunten, qui donnait des indications trop basses de $0°,3$; en sorte que les nombres du tableau doivent tous être augmentés de cette valeur, car c'est le même thermomètre qui marque les *maxima* et les *minima* de température, au moyen d'index, que l'on descend chaque jour, à midi.

Pour les *minima,* il y a une autre correction à faire préalablement, afin de rapporter les nombres observés à l'échelle de la colonne des *maxima* (c'est à cette dernière colonne que l'on observe les températures ordinaires). Pour la partie positive de l'échelle, la correction est de — $0°,1$; pour la partie négative, la correction est plus forte et croît à peu près graduellement jusqu'à + $0°,8$ pour 18 à 19 degrés au-dessous du zéro de l'échelle.

Le thermomètre est suspendu librement au nord et à l'ombre, sans avoir de communication ni avec les murs ni avec les fenêtres, à la hauteur de 3 mètres environ au-dessus du sol.

Humidité de l'air. — L'état hygrométrique de l'air a été observé au moyen du psychromètre d'August. Les observations ont été calculées d'après les tables de Stierlin, et l'on en a

Digitized by Google

déduit la tension de la vapeur d'eau contenue dans l'air et l'humidité relative; on a donné en même temps le tableau original des valeurs observées aux thermomètres à boule sèche et à boule humide.

Pluie, neige, grêle, gelée, tonnerre, etc. — Deux udomètres sont placés sur la terrasse; dans l'un, la partie supérieure est en forme d'entonnoir; dans l'autre, l'entonnoir conique est surmonté d'un cylindre, afin d'éviter les pertes quand il neige ou qu'il grêle. La quantité d'eau recueillie a été mesurée d'un midi à l'autre; on a distingué celle provenant de la fusion de la neige, et lorsqu'il était tombé à la fois de la pluie et la neige, l'eau a été attribuée par moitié à l'un et à l'autre. Le nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau a été distingué du nombre de jours de pluie; parmi ces derniers sont compris tous les jours où il est tombé de la pluie, même quand celle-ci était trop faible pour pouvoir être mesurée. Enfin, les jours où il est tombé de la pluie et de la neige, ou de la pluie et de la grêle, sont comptés à la fois parmi les jours de pluie et de neige, ou de pluie et de grêle.

État du ciel, degré de sérénité, forme des nuages. — Outre la forme des nuages, d'après la classification d'Howard, on a annoté encore, pour les différentes heures des observations, le chiffre qui marque le degré de sérénité du ciel : zéro correspond à un ciel entièrement couvert, et le chiffre 10 représente un ciel entièrement serein. Les nombres compris entre 0 et 10 expriment, selon leurs valeurs, tous les états intermédiaires.

Direction et force du vent. — Les courants supérieurs ont été observés trois fois par jour (à 9 heures du matin, à midi et à 3 heures du soir); toutefois il arrive fréquemment que l'absence de nuages, un ciel uniformément couvert, ou bien un brouillard épais, empêchent de déterminer leur direction. — Les courants inférieurs sont donnés d'après l'anémomètre d'Osler, qui enregistre lui-même mécaniquement leur direction et leur force d'une manière continue. Les indications ont été relevées de 2 en 2 heures. La direction marquée est celle qu'avait le vent à l'heure même de l'annotation. L'intensité est exprimée en kilogrammes et représente l'action, sur une plaque carrée d'un pied anglais du côté, du plus fort coup de vent arrivé pendant l'heure qui précède et l'heure qui suit celle marquée, dans le tableau, en tête de chaque colonne.

Électricité de l'air. — Les observations ont été faites chaque jour, à midi, au moyen de l'électromètre de Peltier, placé toujours à la même hauteur, au sommet de la tourelle orientale de l'Observatoire. Le tableau présente, d'une part, les moyennes mensuelles des degrés donnés immédiatement par l'électromètre, et, de l'autre, les moyennes des degrés ramenés à une même échelle, c'est-à-dire en nombre proportionnels.

N. B. Les indications pour la pression atmosphérique, les températures, la force et la direction des vents sont données, de deux en deux heures, dans les *Annales de l'Observatoire*.

Digitized by Google

Pression atmosphérique à Bruxelles, en 1853.

MOIS.	HAUTEURS MOYENNES DU BAROMÈTRE par mois. 9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	DIFFÉRENCE.	DATE du *maximum* absolu.	DATE du *minimum* absolu.
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.		
Janvier	751,62	751,48	751,16	751,19	764,03	733,79	30,24	le 1er	le 17
Février	747,43	747,23	746,91	747,33	763,00	732,36	30,64	le 1er	le 9
Mars	756,01	755,80	755,33	755,75	764,82	740,67	24,15	le 10	le 2
Avril	753,20	753,28	753,14	753,93	764,21	736,07	28,14	le 9	le 25
Mai.	754,00	753,81	753,42	753,82	760,71	742,21	18,50	le 11	le 8
Juin	754,03	753,97	753,67	753,89	760,39	746,49	13,90	le 8	le 23
Juillet	756,06	755,87	755,73	756,10	764,17	743,72	20,45	le 3	le 14
Août	756,44	756,34	755,99	756,25	765,53	744,31	21,22	le 10	le 26
Septembre . . .	756,31	756,37	756,02	756,35	765,27	739,30	25,97	le 5	le 25
Octobre	751,89	751,74	751,47	752,17	764,10	737,08	27,02	le 23	le 20
Novembre. . . .	760,49	760,20	759,91	760,28	770,42	748,94	21,48	le 9	le 16
Décembre. . . .	755,34	754,93	754,71	755,17	766,75	735,71	31,04	le 9	le 15
MOYENNE. . .	754,40	754,25	753,96	754,35	764,45	740,05	24,39	le 9 novembre.	le 9 février.

Température centigrade de l'air à Bruxelles, en 1853.

MOIS.	TEMPÉRATURE MOYENNE PAR MOIS. 9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.	*Maximum* moyen par mois.	*Minimum* moyen par mois.	MOYENNE par mois.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	DATE du *maximum* absolu.	DATE du *minimum* absolu.
Janvier	4°,87	6°,39	6°,42	5°,33	7°,21	3°,96	5°,59	10°,4	— 1°,2	le 11	le 28
Février	— 0,40	1,18	1,80	— 0,46	2,63	— 1,59	0,52	6,5	— 8,3	le 1er	le 19
Mars	1,41	3,96	4,61	1,11	5,33	— 1,52	1,91	13,6	— 6,7	le 13	le 19
Avril	8,13	10,05	10,69	7,06	12,01	5,00	8,51	16,8	0,1	le 29	le 14
Mai	13,39	15,81	17,31	12,35	18,17	8,15	13,16	26,3	0,8	le 26	le 8
Juin	17,76	19,88	20,58	15,83	22,24	12,43	17,34	28,0	7,3	le 28	le 4
Juillet	19,46	21,29	22,14	17,27	23,48	14,30	18,89	30,5	10,3	le 8	le 2
Août	17,70	20,35	21,00	16,44	22,09	13,16	17,63	26,4	10,2	le 20	le 29
Septembre . . .	14,70	16,94	17,42	13,39	18,43	11,43	14,93	22,6	6,1	le 13	le 27
Octobre	11,09	13,98	13,92	10,32	15,64	8,35	12,00	18,5	3,4	le 27	le 4
Novembre . . .	3,45	5,94	6,19	3,55	7,44	2,03	4,74	15,8	— 2,7	le 2	le 23
Décembre . . .	— 3,03	—1,28	— 1,17	— 3,12	0,36	— 5,09	— 2,37	7,2	—16,1	le 13	le 26
MOYENNE . .	9,04	11,21	11,74	8,26	12,92	5,88	9,40	18,55	0,27	le 8 juill.	le 26 déc.

TEMPÉRATURE MOYENNE DE L'ANNÉE.

D'après les *maxima* et *minima* moyens	9°,40
» » » absolus mensuels .	9,41
» les observations de 9 heures du matin . .	9,04
» la température moyenne du mois d'octobre.	12,00

EXTRÊMES DE L'ANNÉE.

Maximum	30°,5
Minimum	—16,1
Intervalle de l'échelle parcouru . . .	46,6

Digitized by Google

Psychromètre d'August à Bruxelles, en 1853.

MOIS.	9 H. DU MATIN.		MIDI.		3 H. DU SOIR.		9 H. DU SOIR.	
	Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	Thermomètre sec.	Thermomètre humide.
Janvier	5°,28	4°,74	6°,78	5°,80	6°,82	5°,72	5°,71	5°,00
Février	— 0,39	— 0,50	1,28	0,72	1,95	1,15	— 0,19	— 0,35
Mars	1,48	0,87	4,00	2,36	4,62	2,93	1,08	0,60
Avril	8,80	7,61	10,38	8,19	10,50	8,41	7,44	6,51
Mai	14,11	11,34	15,60	12,43	17,86	13,22	13,07	11,01
Juin	17,96	15,20	20,04	16,24	20,73	16,61	16,14	14,63
Juillet	20,04	17,36	21,92	18,15	22,55	18,33	17,75	16,05
Août	17,89	15,70	20,00	16,82	21,00	17,19	16,68	15,12
Septembre	15,02	13,88	17,12	14,93	17,54	15,07	13,64	12,86
Octobre	11,63	10,73	14,44	12,59	14,26	12,51	11,10	10,34
Novembre	3,48	3,26	5,92	5,32	6,10	5,34	3,52	3,36
Décembre	— 2,90	— 3,00	— 1,14	— 1,44	— 0,90	— 1,24	— 2,53	— 2,69
MOYENNE	9,36	8,10	11,36	9,34	11,91	9,60	8,61	7,70

État hygrométrique de l'air à Bruxelles, en 1853.

MOIS.	TENSION DE LA VAPEUR D'EAU contenue dans l'air.				HUMIDITÉ RELATIVE DE L'AIR.			
	9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.	9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.
	mm.	mm.	mm.	mm.				
Janvier	6,47	6,71	6,61	6,53	91,4	86,3	85,0	89,6
Février	4,84	4,93	4,99	4,82	98,2	89,7	87,3	96,6
Mars	5,00	4,94	5,07	4,96	89,8	75,8	74,9	91,3
Avril	7,46	7,17	7,33	7,09	84,7	73,8	75,1	87,9
Mai	8,59	9,07	8,74	8,82	70,7	68,2	57,3	77,1
Juin	11,46	11,53	11,69	11,64	74,6	66,7	64,9	84,9
Juillet	13,27	13,18	13,09	12,70	76,8	68,3	65,1	83,7
Août	12,08	12,39	12,38	11,96	79,1	69,6	67,6	84,2
Septembre	11,36	11,45	11,49	10,90	88,5	78,6	77,1	92,4
Octobre	9,35	10,03	9,98	9,17	89,5	81,0	81,1	90,5
Novembre	6,12	6,72	6,71	6,22	96,8	91,4	90,2	98,4
Décembre	4,11	4,45	4,50	4,13	97,9	94,5	94,1	95,8
MOYENNE	8,34	8,55	8,55	8,25	86,5	78,7	76,6	89,4

Digitized by Google

Quantité de pluie et de neige; nombre de jours de pluie, de grêle, de neige, etc., à Bruxelles, en 1853.

MOIS.	Quantité de pluie.	Quantité de neige.	Quantité d'eau recueillie par mois, en millimètres.	Nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau.	NOMBRE DE JOURS DE							
					Pluie.	Grêle.	Neige.	Gelée.	Tonnerre.	Brouill.	Ciel entièrem' couvert.	Ciel sans nuages.
	mm.	mm.	mm.									
Janvier	69,01	10,88	79,89	20	23	2	2	2	0	3	8	0
Février	2,24	37,32	39,56	21	2	0	24	21	0	1	7	0
Mars	7,59	8,08	15,67	14	5	0	9	20	0	4	4	2
Avril	83,82	4,90	88,72	25	25	6	3	0	0	0	5	0
Mai	24,56	13,56	38,12	12	14	1	1	0	1	3	3	0
Juin	99,14	»	99,14	16	13	2	0	0	4	1	2	0
Juillet.	52,07	»	52,07	20	16	0	0	0	7	0	0	0
Août	75,62	»	75,62	13	13	0	0	0	3	0	1	0
Septembre	85,24	»	85,24	20	16	0	0	0	0	6	2	0
Octobre	51,34	»	51,34	20	18	0	0	0	1	1	0	0
Novembre	7,57	0,38	7,95	12	6	0	1	10	0	18	5	1
Décembre	6,82	21,60	28,42	15	3	0	9	28	0	13	7	3
Année . . .	565,02	96,72	661,74	208	154	11	49	81	16	50	44	6

État du ciel à Bruxelles, en 1853.

MOIS.	SÉRÉNITÉ DU CIEL.					INDICATIONS DE L'ÉTAT DES NUAGES ET DU CIEL, d'après les observations faites à 9 h. du matin, midi, 3 h. et 9 h. du soir.									
	9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.	Moyenne	Ciel serein.	Cirrhus.	Cirrho-cumul.	Cumulus.	Cirrho-stratus.	Cumulo-stratus.	Stratus.	Nimbus.	Éclaircies.	Ciel couvert.
Janvier	1,1	2,1	4,0	1,5	2,2	3	0	7	34	3	37	22	0	29	61
Février	1,5	2,7	2,4	2,0	2,1	5	3	7	17	3	11	15	0	8	56
Mars	3,9	4,3	4,1	5,6	4,5	34	7	9	27	4	14	4	0	15	35
Avril	1,4	1,9	2,2	4,0	2,4	5	1	3	32	5	28	28	12	18	55
Mai	5,1	4,7	4,0	4,4	4,5	9	8	8	47	10	32	20	3	12	26
Juin	3,2	3,7	3,8	5,3	4,0	13	4	5	55	3	25	19	2	15	32
Juillet	2,7	3,4	2,8	3,9	3,2	9	5	15	51	6	62	26	1	26	23
Août	3,9	3,0	3,7	5,9	4,1	15	5	14	38	2	35	28	0	15	24
Septembre	4,2	2,6	2,9	4,8	3,6	14	6	9	35	5	22	20	0	16	33
Octobre	4,2	3,9	3,4	4,8	4,1	17	9	9	37	7	20	27	0	19	31
Novembre	2,3	3,8	4,0	5,6	3,9	24	8	6	17	2	14	18	0	20	44
Décembre	3,3	3,8	3,9	3,9	3,7	30	7	10	13	2	10	12	0	5	56
Année . . .	3,1	3,3	3,4	4,3	3,5	178	63	102	403	52	310	239	18	196	476

Digitized by Google

Nombre d'indications de chaque vent à Bruxelles, en 1853.

(D'après la direction des nuages, observée 3 fois par jour, à 9 heures du matin, midi et 3 h. du soir.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.
Janvier	1	2	1	1	7	7	11	0	0	20	26	17	7	10	0	1
Février	2	2	4	16	3	4	0	0	0	1	0	6	1	4	0	12
Mars	1	12	7	11	3	5	0	2	1	11	6	6	0	4	0	3
Avril	1	6	1	3	0	0	0	11	1	3	19	17	8	13	14	4
Mai	1	8	7	9	16	5	8	3	1	6	2	14	11	8	3	2
Juin	2	6	7	3	3	3	0	4	1	4	4	30	9	3	8	9
Juillet	0	0	0	0	1	0	0	0	2	17	18	57	12	8	0	0
Août	3	9	12	7	3	1	0	2	1	7	10	36	3	9	1	1
Septembre	1	4	5	14	2	12	0	4	0	6	5	13	14	7	5	5
Octobre	0	2	0	0	0	2	0	1	5	28	19	19	10	4	1	2
Novembre	0	9	1	2	1	6	3	0	3	11	5	4	1	3	2	8
Décembre	1	3	1	7	2	5	0	3	2	4	2	6	1	2	0	4
Année	13	63	46	73	41	50	22	30	17	98	116	225	77	65	34	51

Nombre d'indications de chaque vent à Bruxelles, en 1853.

(D'après les résultats fournis, de 2 en 2 heures, par l'appareil d'Osler.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.
Janvier	2	8	4	8	19	8	31	5	16	89	119	15	8	7	20	13
Février	18	5	9	72	23	32	8	8	2	15	28	46	7	17	33	13
Mars	6	56	24	36	32	34	12	34	14	43	59	12	3	3	1	3
Avril	3	17	11	0	0	15	0	3	3	30	69	79	20	46	31	27
Mai	16	31	22	33	53	72	13	14	3	16	26	23	7	22	14	7
Juin	1	31	21	6	16	23	16	11	5	16	32	65	15	41	37	24
Juillet	3	0	2	3	3	7	5	9	4	54	97	136	17	27	0	5
Août	7	21	46	53	9	21	1	9	10	68	21	74	11	4	3	14
Septembre	0	47	19	31	1	3	11	2	1	33	27	118	8	30	14	14
Octobre	0	0	0	0	0	0	1	9	58	205	49	41	0	8	1	0
Novembre	0	0	0	0	0	78	7	99	27	71	19	32	9	17	0	1
Décembre	4	8	20	51	31	80	18	38	12	39	31	14	5	3	7	11
Année	60	224	178	294	187	373	123	241	155	685	577	655	110	225	161	132

Digitized by Google

Intensité totale du vent à Bruxelles, en 1853.

(D'après l'appareil d'Osler.)

MOIS.	MINUIT.	MATIN. 2 H.	MATIN. 4 H.	MATIN. 6 H.	MATIN. 8 H.	MATIN. 10 H.	MIDI.	SOIR. 2 H.	SOIR. 4 H.	SOIR. 6 H.	SOIR. 8 H.	SOIR. 10 H.	INTENSITÉ totale.
	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.
Janvier . . .	12,55	11,10	14,07	7,81	6,54	8,41	12,07	12,26	8,40	8,78	14,00	15,99	131,98
Février . . .	4,19	4,45	3,59	3,09	4,83	4,66	5,69	4,03	3,72	3,85	3,70	4,66	50,46
Mars	1,33	0,87	1,03	1,16	1,76	2,95	2,68	2,92	1,80	1,23	0,91	1,05	19,72
Avril	3,06	3,07	2,85	3,52	6,06	10,00	8,56	10,96	9,52	6,97	4,00	3,37	71,94
Mai	0,77	0,64	0,84	2,93	6,32	7,66	7,31	7,88	7,78	5,65	1,16	0,57	49,51
Juin	1,37	1,10	2,16	2,90	4,72	5,63	6,66	8,73	6,11	2,71	0,70	11,48	54,27
Juillet . . .	1,77	2,38	1,14	1,85	4,28	7,91	10,51	15,97	9,60	7,95	2,37	1,82	67,55
Août	1,39	3,31	2,38	2,61	5,09	6,45	6,42	6,68	3,55	1,71	0,80	1,29	41,68
Septembre . .	4,50	4,43	6,23	6,25	5,68	8,80	11,57	10,59	7,97	3,85	2,90	2,56	75,33
Octobre . . .	1,24	1,56	2,02	1,94	1,55	5,46	5,65	6,22	3,48	2,52	4,02	1,53	37,19
Novembre . .	0,97	0,75	0,56	0,49	0,60	0,53	0,47	0,56	0,74	0,47	0,72	0,64	7,48
Décembre . .	1,44	1,45	1,20	1,72	2,15	2,90	3,80	3,31	2,63	2,18	1,59	2,00	26,37
Année. . .	34,58	35,09	30,07	36,27	49,58	71,36	81,39	90,11	65,30	47,87	36,90	36,96	622,48

Intensité moyenne du vent à Bruxelles, en 1853.

(D'après l'appareil d'Osler.)

MOIS.	MINUIT.	MATIN. 2 H.	MATIN. 4 H.	MATIN. 6 H.	MATIN. 8 H.	MATIN. 10 H.	MIDI.	SOIR. 2 H.	SOIR. 4 H.	SOIR. 6 H.	SOIR. 8 H.	SOIR. 10 H.	INTENSITÉ moyenne.
	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.	k.
Janvier . . .	0,433	0,383	0,485	0,269	0,225	0,290	0,416	0,423	0,303	0,302	0,483	0,551	0,308
Février . . .	0,150	0,159	0,128	0,110	0,172	0,166	0,203	0,144	0,133	0,137	0,132	0,166	0,150
Mars	0,043	0,028	0,033	0,037	0,057	0,095	0,086	0,094	0,058	0,040	0,030	0,034	0,053
Avril	0,102	0,102	0,092	0,117	0,202	0,333	0,285	0,365	0,317	0,232	0,103	0,112	0,197
Mai	0,025	0,021	0,027	0,094	0,204	0,247	0,236	0,254	0,251	0,182	0,037	0,018	0,133
Juin	0,045	0,036	0,070	0,094	0,155	0,187	0,222	0,291	0,204	0,090	0,024	0,396	0,151
Juillet . . .	0,057	0,077	0,037	0,060	0,138	0,258	0,339	0,515	0,390	0,257	0,077	0,059	0,189
Août	0,048	0,114	0,082	0,090	0,175	0,222	0,214	0,223	0,122	0,059	0,038	0,044	0,119
Septembre . .	0,150	0,147	0,208	0,208	0,187	0,293	0,386	0,353	0,266	0,128	0,097	0,085	0,209
Octobre . . .	0,040	0,050	0,065	0,062	0,050	0,176	0,182	0,201	0,112	0,081	0,130	0,049	0,100
Novembre . .	0,032	0,024	0,019	0,016	0,020	0,018	0,016	0,019	0,025	0,016	0,024	0,021	0,021
Décembre . .	0,050	0,050	0,041	0,059	0,074	0,100	0,131	0,114	0,091	0,075	0,055	0,069	0,075
Moyenne . .	0,098	0,099	0,107	0,101	0,138	0,199	0,226	0,250	0,189	0,133	0,103	0,134	0,148

Digitized by Google

Déclinaison magnétique à Bruxelles, en 1853.

MOIS.	ÉCHELLE ARBITRAIRE. 9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.	MOYENNE du MOIS.	VALEUR ANGULAIRE. 9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.	MOYENNE du MOIS.
Janvier	51,89	50,78	50,77	52,14	51,40	20° 8′25″	20°10′59″	20°11′ 0″	20° 7′50″	20° 9′34″
Février	52,71	51,45	51,42	52,60	52,05	6 31	9 26	9 30	6 46	8 3
Mars	53,60	51,34	51,64	53,72	52,58	4 27	9 41	8 59	4 10	6 49
Avril	54,58	52,29	52,26	54,37	53,38	2 11	7 29	7 33	2 40	4 58
Mai	54,94	52,84	53,13	54,87	53,95	1 21	6 23	5 32	1 30	3 42
Juin	55,78	53,16	53,07	55,16	54,29	19 59 24	5 28	5 41	0 50	2 51
Juillet	56,11	53,65	53,68	55,68	54,78	58 38	4 20	4 16	19 59 38	1 43
Août	56,18	53,86	54,12	55,71	54,97	58 28	3 51	3 15	59 34	1 17
Septembre . . .	55,74	53,92	55,00	56,31	55,24	59 29	3 42	1 12	57 30	0 28
Octobre	57,37	54,05	55,53	57,47	56,11	55 43	3 24	19 59 59	55 29	19°58 39
Novembre . . .	57,27	56,03	56,33	57,67	56,83	55 57	19 58 49	58 7	55 1	56 59
Décembre . . .	57,22	56,43	56,56	57,42	56,91	55 24	57 54	57 36	55 36	56 37
MOYENNE. . .	55,28	53,32	55,63	55,26	54,37	20° 0′30″	20° 5′ 7″	20° 4′23″	20° 0′33″	20° 2′38″

NB. La déclinaison *absolue* était de 20°6′26″,5, le 21 avril, entre 10 h. et midi; une seconde détermination a donné le 28 avril, entre midi et 1 h., 20°5′33″,9; la moyenne de ces deux valeurs est 2°6′0″,2. Les nombres donnés dans le tableau ne représentent que les déclinaisons *relatives*, obtenues au moyen du magnétomètre placé à l'intérieur du bâtiment, dont le but de constater les variations diurnes.

Électricité de l'air à Bruxelles, de 1845 à 1853 (1).

MOIS.	MOYENNE des degrés observés à l'électromètre. 1845.	1846.	1847.	1848.	1849.	1850.	1851.	1852.	1853.	MOY.	MOYENNE des nombres proportionnels. 1845.	1846.	1847.	1848.	1849.	1850.	1851.	1852.	1853.	MOY.
Janvier .	50	50	63	50	38	50	50	34*	44	48	471	562	957	487	184	518	446	193*	238	451
Février .	55	45	45	44	36	40	51	21*	50	44	548	256	413	295	163	188	470	121*	353	323
Mars . .	44	26	47	36	29	32	28	27*	41	34	262	95	282	164	100	173	106	89*	248	169
Avril . .	27	23	30	27	18	17	27	21	32	25	93	94	221	155	39	40	95	52	118	101
Mai . .	26	19	21	18	16	19	21	10	18	19	163	49	67	59	32	145	53	16	40	69
Juin . .	18	18	18	18	13	14	19	14	22	17	51	39	47	48	27	25	45	24	59	41
Juillet . .	21	14	18	22	14	12	20	14	21	17	58	33	43	61	25	22	50	30	54	42
Août . .	27	22	6	24	20	22	21	24	24	21	89	57	11	64	47	84	53	64	65	59
Sept. . .	29	23	17	24	24	28	24	28	27	25	95	62	39	63	69	96	65	85	84	73
Octobre .	42	26	30	32	33	36	29	26	30	32	299	98	107	120	130	153	104	90	108	134
Novembre.	44	41	35	36	43	35	50	39	43	41	334	274	160	152	298	162	395	208	231	245
Décembre.	53	57	48	45	38	45	36*	45	55	47	742	799	356	281	303	272	201*	280	694	436
MOYENNE.	36	30	31	31	27	29	31	26	34	31	267	202	225	162	118	156	174	105	199	179
										Degrés équiv.	49°	44°	46°	39°	34°	38°	41°	22°	43°	41°

(1) Les nombres négatifs n'ont pas été compris dans les moyennes de toute la période. En outre, depuis 1849, on n'a plus fait entrer dans le calcul des moyennes les observations faites pendant les temps d'anomalies, tels que les orages, les pluies, les grêles, les neiges et les brouillards. Dans tous les cas où l'électromètre dépassait 72 degrés, on n'a fait entrer dans le calcul des moyennes des nombres proportionnels que le nombre 2000, qui correspond à 72°,5.

* Pendant le mois de décembre 1851 et le 1er trimestre de 1852, les observations ont été faites par M. Dutilleul; elles sont peu sûres, l'observateur, par sa taille, était à la hauteur de l'instrument.

Digitized by Google

RÉSUMÉ

Des observations météorologiques, faites à Gand, en 1853,

PAR M. F. DUPREZ, correspondant de l'Académie.

Les observations ont été faites dans l'endroit de la ville nommé la Cour du Prince ([1]).

Pression atmosphérique. — Le baromètre employé pour déterminer la pression atmosphérique est le même que celui qui a servi pendant les années antérieures : c'est un baromètre de *Lion,* pourvu des moyens nécessaires pour assurer sa verticalité. Cet instrument a une monture en bois, et son échelle, en laiton, s'étend jusqu'à la cuvette; il est placé dans une chambre dont la température ne varie que peu en vingt-quatre heures, et sa cuvette est élevée de 8 mètres au-dessus du sol ([1]). Les nombres relatifs aux observations sont corrigés des effets de la capillarité; ils ont été ramenés à zéro degré de température, à l'aide des tables de réduction insérées dans l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles.* Une table calculée d'après le rapport connu entre le diamètre intérieur du tube et le diamètre intérieur de la cuvette, a donné la correction nécessitée par le changement du niveau du mercure dans la cuvette; les nombres ont également subi cette correction ([2]).

Température. — Les observations qui se rapportent à la température sont exprimées en degrés centigrades. Les températures *maxima* et *minima* sont comptées d'un midi à l'autre, et ont été données par deux thermomètres, l'un à mercure, et l'autre à esprit de vin, munis chacun d'un indicateur. Ces instruments sont placés au nord et à l'ombre, à $4^m,8$ au-dessus du sol; leur vérification a fait connaître que le zéro de l'échelle du premier était trop bas de sept dixièmes de degré, et celui du second trop haut de neuf dixièmes; les nombres ont été corrigés de ces erreurs.

([1]) Il serait à désirer que l'on déterminât la différence de hauteur entre le sol de la Cour et le repère du Nivellement général du royaume. Le bord supérieur de ce repère scellé dans la tourelle de l'angle de l'hôtel de ville, se trouve à 13 mètres au-dessus de la *basse mer moyenne* des vives eaux d'Ostende, formant le zéro du port, soit à $10^m,58$ au-dessus de la *mer moyenne.*

([2]) Les observations de M. Duprez, qui embrassent une période de 17 ans, forment une des plus longues séries faites en Belgique; il est à regretter que son baromètre n'ait pas été comparé, car, d'après le calcul des différences de niveau par les tables d'Oltmanns, il paraît présenter une assez grande équation, qui mériterait d'être indiquée.

Digitized by Google

Humidité. — L'état hygrométrique de l'air a été observé au moyen du psychromètre d'August ; la tension de la vapeur d'eau contenue dans l'air et l'humidité relative ont été calculées d'après les tables de Stierlin.

Pluie, neige, grêle, etc. — La quantité d'eau recueillie a été mesurée d'un midi à l'autre, et comprend aussi celle qui est provenue de la fusion de la neige et de la grêle. Le nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau a été distingué du nombre de jours de pluie; parmi ces derniers sont compris tous les jours où il est tombé de la pluie, même quand celle-ci était trop faible pour pouvoir être mesurée; les jours où il est tombé de la pluie et de la neige, ou de la pluie et de la grêle, sont comptés à la fois parmi les jours de pluie et de neige, ou de pluie et de grêle.

Sérénité. — Pour obtenir les nombres rapportés dans le tableau relatif à la sérénité du ciel, on a représenté par 0 un ciel entièrement couvert, par 10 un ciel entièrement serein, et par les nombres compris entre 0 et 10 les états intermédiaires.

Vents. — La direction des vents a été déterminée d'après la girouette fixée au sommet de la tour de l'église de S^t^-Jacques.

Pression atmosphérique à Gand, en 1853.

MOIS.	HAUTEURS MOYENNES DU BAROMÈTRE par mois.				*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	DIFFÉRENCE ou VARIATION mensuelle	DATE du *maximum*.	DATE du *minimum*.
	9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.					
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.		
Janvier	754,38	754,16	753,60	753,90	766,65	736,27	30,38	le 1	le 17
Février	750,55	750,50	750,13	750,70	766,22	735,06	31,16	le 1	le 26
Mars	759,02	758,85	758,09	758,86	767,76	742,80	24,96	le 10	le 2
Avril	756,16	756,26	755,91	756,87	767,50	739,35	28,15	le 9	le 25
Mai	757,02	756,95	756,40	757,18	763,77	746,39	17,38	le 11	le 8
Juin	757,12	757,12	757,00	757,08	763,50	749,58	13,92	le 8	le 20
Juillet	758,80	758,70	758,55	758,95	767,26	745,55	21,71	le 3	le 14
Août	759,40	759,45	759,02	759.44	768,24	746,37	21,87	le 10	le 26 et le 27
Septembre	759,53	759,44	758,78	759,43	768,67	738,78	29,89	le 5	le 25
Octobre	754,56	754,48	754,36	755,00	766,82	739,38	27,44	le 23	le 20
Novembre	763,60	763,34	763,15	763,42	773,79	751,58	22,21	le 9	le 16
Décembre	758,26	758,13	757,51	758,32	770,55	739,16	31,39	le 9	le 15
MOYENNE	757,37	757,28	756,87	757,43	767,56	742,52	25,04		

	mm.
Hauteur moyenne de l'année	757,24
Différence à 9 heures du matin	+0,13
— à midi	+0,04
— à 3 heures du soir	—0,37
— à 9 heures du soir	+0,09

		mm.
Extrêmes de l'année.	*Maximum*	773,79
	Minimum	735,06
Intervalle de l'échelle parcouru.		38,73

Digitized by Google

Température centigrade de l'air à Gand, en 1853.

MOIS.	TEMPÉRATURE MOYENNE PAR MOIS. 9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.	*Maximum* moyen par mois.	*Minimum* moyen par mois.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	DATE du *maximum* absolu.	DATE du *minimum* absolu.	Moyenne par mois.
Janvier	4°,4	6°,2	6°,2	4°,9	7°,4	3°,1	10°,4	— 1°,4	le 12	26 au 27	5°,2
Février	0,2	1,8	1,9	— 0,8	3,7	— 2,4	6,6	— 7,9	le 24	19 au 20	0,6
Mars	2,6	3,9	4,7	1,6	5,9	— 2,2	12,6	— 7,2	le 12 et le 13	18 au 19	1,8
Avril	9,6	11,9	11,7	6,4	14,5	4,1	19,1	— 1,2	le 19	13-14, 14-15	9,3
Mai	15,4	16,7	17,7	12,1	19,7	7,8	28,2	0,0	le 26	7 au 8	13,7
Juin	19,5	21,5	21,6	14,7	24,0	12,6	29,6	6,1	le 18	3 au 4	18,3
Juillet	22,7	23,6	23,6	16,6	26,1	13,9	31,6	10,0	le 8	2-3, 15-16	20,0
Août	19,5	20,9	21,6	15,2	24,2	13,0	31,0	9,2	le 20	5 au 6	18,6
Septembre	15,5	18,3	17,8	12,8	20,3	11,1	24,9	4,6	le 13	26 au 27	15,7
Octobre	11,3	14,2	13,9	9,7	15,9	7,3	19,7	0,0	le 1	3 au 4	11,6
Novembre	3,4	5,7	5,9	3,2	7,4	1,8	14,5	— 3,5	le 3	22 au 23	4,6
Décembre	—3,1	—1,4	—1,2	— 2,6	0,5	—5,3	6,4	— 15,4	le 13	25 au 26	— 2,4
MOYENNE	10,1	11,9	12,1	7,8	14,1	5,4	19,5	— 0,5			9,7

TEMPÉRATURE MOYENNE DE L'ANNÉE.

D'après les *maxima* et les *minima* moyens	9°,7
— — — absolus mensuels	9,5
— les observations de 9 heures du matin	10,1
— la température moy. du mois d'octobre	11,6

EXTRÊMES DE L'ANNÉE.

Maximum	31°,6
Minimum	—15,4
Intervalle de l'échelle parcouru	47,0

Psychromètre d'August à Gand, en 1853.

MOIS.	9 H. DU MATIN. Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	MIDI. Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	3 H. DU SOIR. Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	9 H. DU SOIR. Thermomètre sec.	Thermomètre humide.
Janvier	4°,71	4°,17	6°,15	5°,31	6°,22	5°,18	5°,18	4°,52
Février	0,23	— 0,04	1,35	0,86	1,27	0,53	— 0,31	— 0,90
Mars	2,35	1,12	4,10	2,18	4,33	2,46	2,11	0,96
Avril	8,90	7,36	10,46	8,19	10,59	7,92	6,76	5,60
Mai	14,57	10,91	15,72	11,46	16,72	12,09	12,27	9,88
Juin	18,02	15,15	19,85	15,72	20,05	16,21	14,81	13,25
Juillet.	20,72	17,16	21,43	17,20	21,61	17,05	16,77	14,41
Août	18,44	15,46	20,04	15,91	20,05	15,80	15,39	13,51
Septembre	14,97	13,31	16,99	14,49	16,80	14,15	13,10	11,56
Octobre	11,41	9,83	14,00	11,95	13,53	11,65	10,41	9,31
Novemhre	3,63	2,86	5,95	4,78	6,25	5,06	3,87	3,15
Décembre	— 2,89	— 3,60	— 0,89	— 1,98	— 0,55	— 1,72	— 1,85	— 2,77
MOYENNE.	9,58	7,81	11,26	8,84	11,40	8,86	8,21	6,87

Digitized by Google

État hygrométrique de l'air à Gand, en 1853.

MOIS.	TENSION DE LA VAPEUR D'EAU contenue dans l'air.				HUMIDITÉ RELATIVE DE L'AIR.			
	9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.	9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.
	mm.	mm.	mm.	mm.				
Janvier	6,17	6,58	6,41	6,35	90,5	88,2	85,5	90,4
Février	4,94	5,06	4,80	4,47	96,2	91,7	87,4	90,1
Mars	4,70	4,67	4,80	4,70	85,3	71,2	72,1	81,2
Avril	7,14	7,13	6,75	6,53	80,6	73,1	68,7	84,2
Mai	7,85	7,84	8,03	7,99	62,7	58,5	56,4	73,4
Juin	11,25	10,96	11,53	10,63	73,2	64,0	66,5	83,7
Juillet	12,49	12,13	11,80	10,99	69,3	64,6	62,2	77,1
Août	11,42	11,10	10,94	10,62	72,5	64,1	63,1	80,7
Septembre	10,61	10,96	11,21	9,51	82,8	75,9	78,4	83,0
Octobre	8,44	9,46	9,36	8,44	81,7	78,3	79,6	86,8
Novembre	5,61	6,15	6,26	5,75	88,0	83,5	83,4	88,9
Décembre	3,64	3,88	3,92	3,75	86,6	81,3	80,1	83,5
MOYENNE	7,85	7,99	7,98	7,48	80,8	74,5	73,6	83,6

Quantité d'eau recueillie; nombre de jours de pluie, de grêle, de neige, etc., à Gand, en 1853.

MOIS.	Quantité d'eau recueillie par mois, en millimètres.	Nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau.	NOMBRE DE JOURS DE							
			Pluie.	Grêle.	Neige.	Gelée.	Tonnerre.	Brouillard.	Ciel entièrement couvert.	Ciel sans nuages.
	mm.									
Janvier	84,47	18	19	1	1	3	0	5	5	0
Février	61,53	14	2	0	16	22	0	3	8	0
Mars	21,78	10	4	0	8	19	0	6	6	3
Avril	93,70	24	24	7	3	3	0	1	5	0
Mai	67,57	9	16	1	1	0	2	1	4	1
Juin	115,38	11	15	1	0	0	4	3	5	0
Juillet	47,12	13	16	0	0	0	7	1	1	0
Août	70,86	11	15	1	0	0	2	3	0	0
Septembre	81,09	13	16	0	0	0	0	5	2	0
Octobre	52,50	16	20	1	0	0	1	2	1	0
Novembre	6,36	3	6	0	1	12	0	16	6	0
Décembre	35,78	9	3	0	8	28	0	10	5	2
ANNÉE	738,14	151	156	12	38	87	16	56	48	6

Digitized by Google

État du ciel à Gand, en 1853.

MOIS.	SÉRÉNITÉ DU CIEL.					INDICATIONS DE L'ÉTAT DES NUAGES ET DU CIEL, d'après les observations faites à 9 h. du matin, midi, 3 h. et 9 h. du soir.									
	9 heures du matin.	midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.	Moyenne.	Ciel serein.	Cirrhus.	Cirrho-cumul.	Cumulus.	Cirrho-stratus.	Cumulo-stratus.	Stratus.	Nimbus.	Éclaircies.	Ciel couvert.
Janvier . .	1,1	1,4	1,4	1,6	1,4	2	1	6	2	2	25	36	2	29	65
Février . .	2,6	1,8	1,4	2,4	2,0	3	1	7	2	10	21	35	0	17	58
Mars . . .	4,5	5,5	4,9	6,1	5,2	28	4	1	12	6	17	6	1	15	34
Avril . . .	1,5	1,0	1,3	4,1	2,0	3	2	2	23	3	41	17	7	22	55
Mai . . .	5,5	4,7	3,5	5,6	4,8	10	7	5	17	11	29	9	3	12	36
Juin . . .	3,4	3,4	3,5	4,6	3,7	15	3	4	30	1	29	19	5	23	37
Juillet. . .	2,2	1,7	1,9	3,8	2,4	5	3	8	35	2	11	23	9	38	30
Août . . .	4,0	3,4	2,7	5,4	3,9	10	9	6	29	7	9	18	6	31	22
Septembre .	3,3	2,6	2,5	5,3	3,4	10	8	7	19	5	11	15	8	22	36
Octobre . .	4,0	3,5	3,3	4,5	3,8	8	7	8	11	9	23	26	3	32	29
Novembre .	2,3	3,1	3,0	4,7	3,3	15	1	6	3	12	8	25	0	20	49
Décembre. .	3,5	4,4	4,6	5,0	4,4	25	2	5	2	3	5	25	0	12	49
Année . .	3,1	3,0	2,8	4,4	3,3	134	48	65	185	71	229	254	44	273	500

Nombre d'indications de chaque vent à Gand, en 1853.

(D'après les observations faites 3 fois par jour, à 9 h. du matin, midi et 3 h. du soir.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.
Janvier.	5	1	3	2	8	2	3	0	31	6	13	5	2	1	4	2
Février	11	5	14	7	8	0	1	1	4	1	3	8	7	1	4	7
Mars.	11	3	14	8	8	1	7	4	14	4	6	2	3	1	1	0
Avril	8	2	1	1	3	1	1	0	4	5	12	8	17	5	11	7
Mai	7	8	12	15	16	2	3	1	1	3	4	3	6	2	8	0
Juin.	12	3	1	2	6	0	2	0	3	2	18	9	12	4	5	8
Juillet	1	1	0	1	3	0	0	1	9	13	24	13	16	5	1	1
Août.	15	14	8	3	2	0	0	1	6	5	15	7	4	3	5	1
Septembre.	6	7	6	2	3	0	0	0	5	4	8	9	8	8	4	7
Octobre	2	0	0	0	0	3	6	11	19	13	16	5	5	7	2	1
Novembre	2	4	7	4	15	3	4	6	21	1	2	2	5	0	7	3
Décembre	3	8	16	8	10	4	9	5	11	2	3	0	3	1	3	1
Année.	83	56	82	53	82	16	36	30	128	59	124	71	88	38	55	38

Digitized by Google

RÉSUMÉ

Des observations météorologiques, faites à Liége, en 1853,

Par M. D. LECLERCQ,

Agrégé à l'Université, directeur de l'École industrielle de Liége.

Le lieu d'observation est situé dans l'intérieur de la ville. Les instruments sont les mêmes que ceux qui ont été employés pendant les années précédentes.

Pression atmosphérique. — Le baromètre, construit d'après le système Fortin, modifié par Delcros, porte le n° 243 d'Ernst.

Des comparaisons, faites en décembre 1846, à l'Observatoire royal de Bruxelles, ont montré que ses indications exigent une correction additive de $0^{mm},45$ pour exprimer des hauteurs absolues. Les nombres obtenus par l'observation ont été ramenés à zéro de température, à l'aide des tables insérées dans l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles*, et ils ont subi ensuite cette correction totale qui renferme la dépression due à la capillarité, l'erreur du zéro du thermomètre et celles qui pourraient provenir d'autres imperfections de l'instrument [1].

La cuvette du baromètre se trouve à 6 mètres au-dessus du zéro de l'échelle du pont

[1] Le baromètre de Liége présentait, depuis 1852, une dépression énorme, près de 5^{mm} par rapport aux baromètres de Bruxelles et de S^t-Trond, placés presque identiquement au même niveau et dont l'accord est excellent. Voici ce que M. Leclercq écrit à ce sujet, en date du 3 août 1854 : « J'avais remarqué depuis longtemps cette dépression; elle date de 1851. A cette époque, elle n'était pas aussi sensible, quoiqu'elle allât en augmentant pour atteindre son *maximum*, qui est de $4^{mm},70$. M. Jaspar ayant examiné cet instrument, et m'ayant assuré qu'il était en bon état, j'ai continué les observations comme par le passé. M'étant rendu, à la suite de votre lettre du 22 juillet, à l'Université pour y prendre la hauteur à l'un des baromètres de cet établissement, placé dans les mêmes conditions que le mien, j'ai trouvé cette hauteur de $4^{mm},70$ plus élevée. Cette circonstance m'a indiqué que mon instrument était dérangé. En le vérifiant moi-même, je me suis assuré qu'il avait une bulle d'air logée à la partie supérieure, et je l'ai expulsée en suivant les instructions annexées à vos tableaux. Comment cet air s'est-il introduit, comment s'est-il développé successivement? là-dessus je ne saurais vous communiquer aucun renseignement. En somme, je crois qu'on pourrait prendre $4^{mm},70$ pour correction des hauteurs de 1852, 1853 et le premier semestre de 1854. » Il est à remarquer, cependant que cette dépression a dû varier pour des hauteurs barométriques différentes.

Digitized by Google

des Arches. D'après les ingénieurs des Ponts et Chaussées, l'élévation de ce repère, par rapport au *niveau moyen de la mer du Nord*, est de $54^m,7$; l'altitude se trouve donc de $60^m,7$ (1).

Température. — Le thermométrographe de Six, perfectionné par Bellani, a continué à indiquer les différentes températures du jour et les extrêmes; sa marche était constamment comparée avec celle d'autres thermomètres, dont le zéro avait été déterminé au commencement de l'année; les nombres inscrits dans les tablesux ont subi les corrections qui les concernent.

Pluie et vents. — L'udomètre, semblable à celui de l'Observatoire royal de Bruxelles, est placé au milieu d'un vaste jardin; il se trouve éloigné des bâtiments et des arbres, afin que la pluie puisse y tomber librement de toutes parts; la quantité d'eau recueillie a été mesurée d'un midi à l'autre.

La direction des vents supérieurs est prise d'après la direction du mouvement des nuages; celle des vents inférieurs est observé d'après une girouette parfaitement mobile et la direction que suit la fumée des plus hautes cheminées de machines à vapeur.

Pression atmosphérique à Liége, en 1853.

MOIS.	HAUTEURS MOY. DU BAROMÈTRE par mois. 9 heures du matin.	Midi.	*Maxima* absolus par mois.	*Minima* absolus par mois.	DIFFÉRENCES ou VARIATIONS mensuelles.	DATES des *maxima*.	DATES des *minima*.
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.		
Janvier	748,47	747,94	760,97	731,25	29,72	le 1	le 17
Février	743,91	743,58	759,13	729,51	29,62	le 1	le 10
Mars	752,26	752,17	761,22	742,05	19,17	le 10	le 2
Avril	749,87	749,66	757,30	736,44	20,86	le 9	le 25
Mai	750,29	749,74	757,15	736,51	20,64	le 11	le 8
Juin	750,34	750,45	755,91	742,36	13,55	le 9	le 23
Juillet	753,65	752,27	760,15	742,51	18,64	le 3	le 14
Août	752,86	752,42	760,63	743,21	17,42	le 10	le 27
Septembre	753,01	752,84	760,29	739,10	21,19	le 19	le 26
Octobre	749,12	748,82	759,56	734,42	25,14	le 23	le 20
Novembre	757,09	756,58	765,12	745,52	20,60	le 9	le 16
Décembre	751,96	751,39	761,51	732,45	29,06	le 9	le 15
MOYENNE	751,06	750,65	759,91	737,44	22,13		

		mm.
Extrêmes de l'année	*Maximum*, le 9 novembre	765,12
	Minimum, le 10 février	729,51
	Intervalle de l'échelle parcouru	35,61

(1) Il s'agit probablement encore de la *basse mer moyennne*, comme pour tous les nivellements opérés par le génie civil (voyez pages 7 et 8). En admettant que cette cote se rapporte au zéro du port d'Ostende, on n'aurait plus que $58^m,3$ au-dessus de la *mer moyenne*. — Cette altitude pourrait être vérifiée en rattachant la cuvette au repère du Nivellement général du royaume : le talon ménagé dans l'encadrement inférieur de la pierre de repère, scellée sur la façade latérale (sud) de la remise aux locomotives de la station du chemin de fer, se trouve à 68^m au-dessus de la *basse mer moyenne* des vives eaux d'Ostende, formant le zéro du port, soit $65^m,58$ au-dessus de la *mer moyenne*.

Digitized by Google

Température centigrade de l'air à Liége, en 1853.

MOIS.	MOYENNES PAR MOIS. 9 heures du matin.	Midi.	MOYENNES PAR MOIS des *maxima* diurnes.	des *minima* diurnes.	DEMI-SOMMES ou températures moy. par mois.	DIFFÉRENCES ou variations diurnes.	*Maxima* absolus par mois.	*Minima* absolus par mois.	DIFFÉRENCES ou variations mensuelles.	DATES des *maxima* absolus.	DATES des *minima* absolus.
Janvier	5°,04	6°,58	7°,39	3°,21	5°,30	4°,18	10°,6	— 1°,3	11°,9	le 12	le 28
Février	0,13	1,70	2,60	—1,92	0,34	4,52	6,0	— 7,1	13,1	le 9	le 26
Mars	0,36	3,48	4,90	— 2,27	1,31	7,17	11,2	—11,2	22,4	les 13 et 31	le 2
Avril	8,25	10,20	11,55	4,75	8,15	6,80	17,3	— 0,4	17,7	le 29	le 14
Mai	12,58	15,57	17,73	8,25	12,99	8,48	24,2	1,2	23,0	le 25	le 11
Juin	16,58	19,29	21,21	12,51	16,86	9,70	26,4	8,0	18,4	le 28	le 4
Juillet	19,15	21,92	24,03	14,68	19,35	9,35	31,3	10,6	20,7	le 9	le 2
Août	17,42	20,67	22,42	12,99	17,70	9,43	28,3	9,3	19,0	le 23	le 29
Septembre	15,09	17,52	18,99	11,53	15,26	7,46	22,9	5,6	17,3	le 14	le 27
Octobre	11,33	14,07	14,82	7,85	11,33	6,97	19,4	1,6	17,8	le 28	le 4
Novembre	3,52	5,28	6,85	1,59	4,22	5,26	14,0	— 4,3	18,3	le 2	le 29
Décembre	—3,32	— 1,42	— 0,53	— 4,82	—2,67	4,29	4,8	— 19,2	24,0	le 13	le 26
MOYENNE.	8,84	11,24	12,66	5,70	9,18	6,97	18,03	— 0,60	18,63		

TEMPÉRATURES MOYENNES DE L'ANNÉE.

D'après les *maxima* et *minima* moyens	9°,18
— — — absolus mensuels	8,72
— les observations de 9 heures du matin	8,84
— la températ. moy. du mois d'octobre	11,33

EXTRÊMES DE L'ANNÉE.

Maximum, le 9 juillet	31°,3
Minimum, le 26 décembre	— 19,2
Intervalle de l'échelle parcouru	50,5

Quantité d'eau recueillie; nombre de jours de pluie, de grêle, de neige, etc., à Liége, en 1853.

MOIS.	Nombre de jours de pluie, de neige ou de grêle.	Quantité d'eau tombée par mois, en millimèt. de hauteur.	Hauteur moy. de l'eau tombée par chaque jour de pluie, de neige ou de grêle.	NOMBRE DE JOURS DE Pluie.	Grêle.	Neige.	Brouillard.	Gelée.	Tonnerre.
		mm.	mm.						
Janvier	24	69,90	2,91	24	1	1	11	2	0
Février	17	29,16	1,71	4	0	16	4	22	0
Mars	11	18,72	1,70	5	0	8	12	22	0
Avril	26	114,46	4,77	26	6	3	1	1	0
Mai	16	65,32	4,08	16	0	1	6	0	2
Juin	16	105,68	6,60	16	0	0	6	0	3
Juillet	20	53,73	2,69	20	3	0	3	0	5
Août	16	57,55	3,60	16	0	0	12	0	2
Septembre	13	113,06	8,70	13	0	0	5	0	0
Octobre	18	51,57	2,86	18	0	0	15	0	2
Novembre	4	11,20	2,80	4	0	0	29	8	0
Décembre	12	33,62	2,80	0	1	11	25	28	1
ANNÉE	193	723,97	3,75	162	11	40	129	83	15

Digitized by Google

Nombre d'indications de chaque vent à Liége, en 1853.

(D'après les observations faites chaque jour, à midi.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.
Janvier	1	0	4	1	0	0	1	1	3	0	11	4	3	0	4	0
Février	3	1	8	0	0	0	0	0	0	1	2	1	2	0	5	7
Mars	2	1	9	2	2	1	4	0	3	1	3	1	0	0	3	2
Avril	3	0	2	0	0	0	1	0	0	0	3	7	10	1	2	2
Mai	3	0	7	3	6	0	2	0	0	0	5	0	4	0	2	0
Juin	2	0	4	2	4	0	0	1	1	0	2	3	7	2	5	1
Juillet	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	11	10	8	0	4	0
Août	3	0	8	0	0	0	4	1	4	0	3	6	6	0	0	2
Septembre	2	1	2	1	0	2	1	1	1	0	8	5	6	0	4	2
Octobre	0	0	0	0	0	0	4	3	14	0	6	2	11	0	2	0
Novembre	4	0	4	2	3	0	6	1	3	0	2	0	1	0	6	4
Décembre	3	1	7	10	2	0	1	0	1	1	4	0	1	0	1	2
Année	26	4	55	21	17	3	24	9	32	4	60	39	59	3	38	22

État du ciel à Liége, en 1853.

MOIS.	Sérénité du ciel, à midi.	Indications de l'état du ciel et des nuages, d'après les observations faites chaque jour, à midi.								
		Ciel serein.	Cirrhus.	Cirr.-cumul.	Cumulus.	Cirr.-strat.	Cum.-strat.	Stratus.	Nimbus.	Ciel couvert.
Janvier	1,71	1	6	0	18	2	12	14	6	18
Février	1,46	2	5	2	11	4	6	13	3	18
Mars	1,37	1	3	0	18	2	14	16	12	17
Avril	3,35	5	5	2	11	4	6	13	5	15
Mai	2,71	0	7	0	21	4	15	11	6	11
Juin	3,14	2	0	0	19	0	16	9	7	12
Juillet	2,61	1	7	0	22	4	22	7	4	9
Août	2,64	0	6	3	24	6	20	9	6	11
Septembre	2,77	4	4	3	18	2	15	10	5	12
Octobre	2,80	3	5	1	21	3	14	14	4	12
Novembre	4,47	6	7	4	10	3	2	10	1	11
Décembre	3,58	9	3	1	5	2	3	16	4	18
Année	2,72	34	58	16	198	36	145	142	63	164

Digitized by Google

RÉSUMÉ

Des observations météorologiques faites à Stavelot, en 1853;

Par M. G. DEWALQUE.

Pression atmosphérique. — Le baromètre qui a servi à ces observations est à niveau constant, et porte le n° 284 d'Ernst. De nombreuses comparaisons faites à l'Observatoire royal de Bruxelles ont montré que ses indications exigent une correction additive de $0^{mm},405$, pour donner des hauteurs absolues. Les nombres contenus dans le tableau, après avoir été ramenés à la température 0°, ont subi cette correction, qui renferme la dépression due à la capillarité, l'erreur possible du zéro du thermomètre et celles qui pourraient provenir d'autres imperfections de l'instrument.

Ce baromètre est suspendu dans une chambre dont les variations diurnes de température sont peu étendues. Sa hauteur au-dessus du niveau de la mer est d'environ 316 mètres, en adoptant pour l'altitude du lit de l'Amblève, au pont de Stavelot, $311^m,425$, chiffre donné par l'ingénieur Fumière (1).

(1) En discutant les divers nivellements opérés en Belgique, M. Houzeau, ancien aide à l'Observatoire, a été amené à vérifier cette cote : « Je pense, dit-il, que M. Dewalque a été induit en erreur sur l'altitude de sa station, par M. l'ingénieur Fumière. Voici les données que j'ai à cet égard :

« Je pars du zéro du pont des Arches, à Liége, qui est un des meilleurs repères de la Belgique, connu certainement à un demi-mètre près. L'altitude de ce repère est, en nombres ronds, 55 mètres. Je trouve d'abord un nivellement barométrique dû aux officiers hollandais qui s'occupaient du levé de la carte. Par une comparaison faite entre le pont des Arches, à Liége, et l'hôtel d'Orange, à Stavelot, ce dernier point était situé 232^m plus haut, ou par l'altitude de 287^m; et si l'on compte 6^m entre l'étage (?) de l'hôtel d'Orange et la rivière, on obtiendrait, pour la cote de l'eau courante, 281 mètres (*).

» En discutant le profil longitudinal de la rivière, au moyen d'un certain nombre de cotes, en amont et en aval de Stavelot, j'avais adopté, dans mon travail sur les cours d'eau, 285^m. On ne peut guère adopter de chiffre plus fort. En effet, les mêmes officiers hollandais dont j'ai parlé, ont exécuté un nivellement barométrique, par stations, entre Stavelot (l'Amblève, au pont) et La Roche (l'Ourthe). Ce dernier point est parfaitement rattaché au pont des Arches, dans le nivellement à coup de niveau de De Puydt (projet de canal de Meuse et Moselle). J'ajoute que cet excellent nivellement de De Puydt a été postérieurement confirmé par la cote de Trèves, que les ingénieurs prussiens ont trouvée en venant du Rhin. Ainsi, la cote 211^m de l'Ourthe à La Roche n'a pas une erreur probable d'un mètre.

» D'après les officiers hollandais, on monte de 330^m de La Roche jusqu'au signal géodésique de Benasse, qui aurait ainsi 541^m, et l'on descend ensuite du signal jusqu'à Stavelot (l'Amblève) de 280^m. D'où la rivière

(*) Ce serait 260^m seulement en prenant pour différence de hauteur, entre l'hôtel et la rivière, le nombre donné plus loin par M. Dewalque.

Digitized by Google

Température de l'air. — Les instruments sont librement suspendus dans l'embrasure d'une fenêtre exposée au N.-E. et élevée de deux mètres environ au-dessus du sol; ils sont garantis des rayons du soleil levant par des panneaux doubles, abrités du rayonnement et de la pluie par un toit en verre.

La température de l'air a été observée au moyen d'un thermométrographe de Bunten comparé à celui de l'Observatoire de Bruxelles, qui a déjà servi les années précédentes. Les extrêmes ont été annotés chaque jour, à midi, et inscrits au jour de l'observation; les *minima* ont été rapportés à l'échelle des *maxima*. Les nombres donnés par l'observation ont été corrigés du déplacement du zéro; la correction n'a pas varié depuis l'année précédente.

Humidité de l'air. — L'état hygrométrique de l'air a été observé au moyen d'un psychromètre d'August, vérifié à l'Observatoire de Bruxelles; la position du zéro a été déterminée de nouveau, et les observations, corrigées en conséquence.

J'ai donné le tableau des températures observées aux thermomètres à boule sèche et à boule mouillée, d'après lesquelles j'ai calculé l'humidité absolue et l'humidité relative de l'air au moyen des tables qui se trouvent dans l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles.*

serait par 261^{m}. Or, l'erreur moyenne d'une cote de ces nivellements barométriques est, d'après la discussion à laquelle je les ai soumis, ± 18^{m}. Prenant par addition, on aurait 279^{m} pour la limite probable de la cote de l'Amblève à Stavelot. Il paraît donc déjà vraisemblable que cette cote différera peu de 280^{m}.

» Je prends les observations barométriques de 1852, et je calcule les différences de niveau par les tables d'Oltmanns. J'obtiens ainsi, en ne comparant que des baromètres étalonnés :

LIEUX DE COMPARAISON.	ALTITUDE admise.	ALTITUDE DE STAVELOT (BAROM.)		
		par 9 h. matin.	par midi.	MOYENNE.
	m.	m.	m.	m.
Bruxelles	59,6	273,6	277,3	275,5
S^{t}-Trond	57,3	277,7	276,1	276,9
Namur	149,8	282,9	283,4	283,1
MOYENNE				278,5
Réduction à l'Amblève, d'après les données de M. Dewalque.				—4,6
L'Amblève (au pont de Stavelot)				273,9

» Il reste quelques mètres d'incertitude; mais on ne peut guère prendre plus de 280^{m}.

» Je vais plus loin ; je crois découvrir d'où provient la cote de M. Fumière. Cette cote est identique, sauf une différence d'une unité aux décimètres (ce qui est peut-être une faute d'impression), avec la cote du *Dictionnaire géographique de la province de Liége*, de Vandermaelen. Dans cet ouvrage, où les sources ne sont pas indiquées, j'ai démêlé cependant l'origine de la plupart des chiffres cités. Toutes les altitudes des environs de Spa sont affectées d'un excès d'environ 31^{m}, dû apparemment à la cote inexacte de la ville de Spa, fournie par MM. Van Swienden et Thomassin. Cette erreur de 31^{m} se porte sur les cotes des sources miné-

Digitized by Google

Pluie, neige, grêle, tonnerre, etc. — L'udomètre, placé à environ 1^{m},50 du sol, est double; le récipient de l'un est en forme d'entonnoir; dans l'autre, la partie conique est surmontée d'un cylindre. La quantité d'eau recueillie a été mesurée chaque jour, à midi; l'indication de l'instrument qui donnait le chiffre le moins élevé a été écartée.

J'ai distingué l'eau provenant de la fusion de la neige; et, lorsqu'il était tombé à la fois de la pluie ou de la grêle et de la neige, l'eau a été attribuée par moitié à l'une et à l'autre.

Le nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau a été distingué du nombre de jours de pluie ou de neige; parmi ces derniers sont compris tous ceux où la quantité d'eau tombée était trop faible pour pouvoir être mesurée.

Les jours où il est tombé de la neige et de la pluie ou de la grêle sont comptés à la fois comme jours de neige et comme jours de pluie ou de grêle.

Sérénité du ciel. — Le degré de sérénité du ciel a été annoté de la manière ordinaire : 0 représente un ciel couvert, 10, une sérénité complète; les chiffres compris entre 0 et 10 représentent, selon leurs valeurs, les états intermédiaires.

Les jours comptés comme sereins ou comme couverts, sont ceux où la sérénité du ciel était complète ou nulle aux heures d'observation.

rales, des points de station des fanges, etc. Si je retranche cette erreur constante de la cote 311^{m},53, j'ai 280^{m},5 pour l'Amblève, au pont de Stavelot.

» Je présume donc que M. Fumière aura fait usage de cette cote relative, sans la corriger de son erreur absolue. Je n'entends pas, toutefois, juger définitivement, mais j'expose mes doutes à ce sujet. »

En réponse à cette note, que nous lui avions soumise, M. Dewalque nous écrivait qu'il avait toujours cru la cote de Stavelot inexacte, et que s'il n'en avait pas parlé, c'est qu'il pensait être amené à la vérifier quand il s'occuperait de résumer les phénomènes périodiques de cette localité.

Nous croyons devoir donner ici en entier la relation de ce travail, exécuté peu de temps après : « Jai fait, il y a quelques jours, écrit M. Dewalque, en date du 5 décembre 1854, le nivellement de Spa à Stavelot, mais bien malheureusement. D'abord, un accident arrivé au baromètre que j'avais emporté, m'a empêché de répéter les observations en allant et en revenant, de sorte que je n'ai pu faire, le premier jour, que le nivellement de Pépinster à Spa. Le second jour, comme j'ai dû emporter le baromètre de Fortin, qui est à Stavelot, j'avais laissé à observer, dans cette station, deux baromètres à siphon très-ordinaires, auxquels j'avais adapté une échelle en millimètres; enfin, ce qui est plus fâcheux encore, lorsque mon frère, qui m'avait accompagné à Spa, fut de retour à Stavelot avec notre baromètre, on trouva une différence d'environ deux millimètres entre ses indications et celles des deux autres instruments, ce qui donne une différence d'environ 23 mètres sur toutes les cotes.

» J'ai toujours fait deux observations à chaque station, l'une immédiatement après que l'instrument était mis en observation, en prenant pour sa température celle qu'il indiquait en sortant de l'étui; l'autre au bout d'un temps variable, quelquefois 20 ou 25 minutes, lorsqu'il avait pris, ou peu s'en faut, la température de l'air. Or, à la première station, j'ai trouvé aux deux observations 698^{mm},35 et 696^{mm},10, différence qui n'est pas due, pour la plus grande partie, à la variation de la température, et qui répond sans doute à celle qui a été remarquée plus tard entre les indications des divers instruments. Je ne sais encore à quoi l'attribuer; il n'y a guère qu'une rentrée d'air possible, et j'ai beaucoup de peine à y croire. Mais il résulte de ceci que j'ai calculé la première observation d'après la hauteur observée à Stavelot avant mon départ (717^{mm},50), et toutes les autres d'après les comparaisons faites postérieurement au nivellement (lesquelles donnent 715^{mm},45=717^{mm},50).

Digitized by Google

Vents. — Les vents ont été observés à 6 et à 9 heures du matin, à midi et à 2 heures du soir; leur direction a été prise d'après les nuages. J'ai indiqué à part combien de fois elle n'a pu être observée, soit à cause de l'uniformité du ciel par le brouillard, une neige abondante, l'obscurité, etc., soit à cause d'une sérénité complète.

Les deux cotes obtenues de cette façon pour la première station, sont très-concordantes. Voici les résultats auxquels je suis arrivé :

I. Différence de niveau de Pépinster (station du chemin de fer, trois observations) à Spa (station du chemin de fer, deux observations); six cotes : extrêmes 108m,6 et 103m,7; moyenne . .				m. 106,0
Différence d'après l'administration du chemin de fer (M. Demanet)				105,63
Altitude de Pépinster (chemin de fer)				142,3 (*)
II. Stavelot, hauteur de la cuvette au-dessus de l'Amblève (nivellement au niveau ordinaire). .				5,3
III. Stavelot, hôtel d'Orange, hauteur au-dessus de la cuvette (nivellement barométrique). . .				21,5
IV. Route de Stavelot à Spa :				
1° Bureau des taxes de Stavelot, 400 mètres environ au S. de l'embranchement de l'ancienne route de Spa; différence avec Stavelot (cuvette) 217m,1 et 213m,2; moyenne		215,2	soit	506,2
2° Maison Leloup, 281m,8 et 279m,5	»	280,7	»	571,7
3° Sauvenière, galerie circulaire autour de la fontaine, 120m,1 et 120m,3.	»	120,2	»	411,2
4° Spa, station, —42m,5 et —43m,7.	»	—43,1	»	247,9
5° Spa, hôtel des Pays-Bas, —36m,2 et —36m,4.	»	—36,3	»	254,7
Donc Stavelot, cuvette (cette année).			»	291,0
— — lit de l'Amblève		— 8,1	»	282,9
— — hôtel d'Orange		18,7	»	309,7

» Vous pouvez facilement vous imaginer, Monsieur, combien je suis au regret de ne pouvoir vous communiquer des résultats plus certains. Cependant, la concordance des deux cotes obtenues en IV,1°, d'après deux hauteurs barométriques différentes pour Stavelot, me porte à croire que l'erreur ne peut être considérable.

» Quoi qu'il en soit, je ferai mon possible pour me procurer un nouveau baromètre, avec lequel je puisse renouveler l'opération, mais ce n'est pas chose facile ici. En attendant, je pourrai toujours vous prier de remarquer que la Sauvenière est cotée à 385m (Thomassin) et 415m (Colin père; Voyez Davreux : *Constitution géognostique de la province de Liége*). Cette deuxième cote est sans doute celle que l'on suppose trop élevée d'une trentaine de mètres (ainsi que Stavelot); elle se rapproche beaucoup, au contraire, du résultat que j'ai obtenu, d'autant plus que le sol, à la fontaine, est peut-être de 1m,2 au-dessus de la galerie que j'ai cotée; d'un autre côté, je trouve (*l. c.*) la *barrière* de la Sauvenière à 389m (officiers hollandais) : aujourd'hui la barrière se trouve à peu près au niveau du sol, à la fontaine; mais, si je suis bien informé, elle se trouvait, en 1828, beaucoup plus bas, au premier coude que fait la route à quelque distance de Spa. Quant à la cote de l'Amblève à Stavelot = 311m, elle est certainement beaucoup trop forte : j'avais demandé des observations comparatives à Malmédy; on n'a pu les faire; mais M. Dehez, contrôleur du cadastre, me transmet les cotes suivantes, d'après une carte publiée à Berlin par le département de la guerre :

Liége, Ste-Walburge.	552	pieds du Rhin,	soit	173,25	mètres.
— la forteresse	486	»	»	152,53	»
Spa, la sortie vers Marteau.	837	»	»	262,70	»
Hocquay.	1954	»	»	613,27	»
Haute-Fange (entre Spa et Francorchamps)	1914	»	»	600,72	»
Malmédy, sortie vers Stavelot	1000	»	»	313,85	»

Or, si l'on adopte ce dernier chiffre, il est un peu plus élevé que le niveau de la Warge, qui se jette dans l'Amblève à mi-chemin entre les deux villes. »

(*) Il s'agit probablement encore de la *basse mer moyenne*, comme pour tous les nivellements opérés par le génie civil (voyez pages 7 et 8). En admettant que cette cote se rapporte au zéro du port d'Ostende, on n'aurait plus pour Pépinster que 139m,9 au dessus de la *mer moyenne*. Donc, pour Stavelot : lit de l'Amblève, 280m,5; cuvette, 285m,8 (jusqu'en 1853) et 288m,6 (en 1854).

Digitized by Google

Pression atmosphérique à Stavelot, en 1853.

MOIS.	Hauteur moyenne du baromètre par mois. 6 heures du matin.	9 heures du matin.	Midi.	2 heures du soir.	9 heures du soir.	Moyennes.	*Maxima* absolus par mois.	*Minima* absolus par mois.	Différences ou variations mensuelles.	Dates des *maxima* absolus.	Dates des *minima* absolus.
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.		
Janvier . .	732,31	733,08	732,79	732,52	732,52	732,64	745,52	715,89	29,63	le 1, à 9h m.	le 17, à 6h m.
Février . .	26,68	27,35	27,14	26,86	27,16	27,04	42,58	12,72	29,86	le 1, à 9 m.	le 9, à 9 s.
Mars . . .	35,79	36,07	35,72	35,71	35,99	35,86	45,27	22,51	22,76	le 10, à 9 m.	le 2, à 9 s.
Avril . . .	34,14	34,46	33,98	33,98	34,51	34,21	43,37	21,73	21,64	le 9, à 9 s.	le 25, à 9 m.
Mai . . .	34,59	34,54	34,20	34,26	34,57	34,43	41,41	20,60	20,81	le 11, à 6 m.	le 8, à 9 m.
Juin . . .	34,94	34,99	34,82	34,63	34,98	34,87	41,61	26,70	14,91	le 8, à 9 s.	le 23, à midi.
Juillet. . .	37,76	37,85	37,63	37,56	38,09	37,78	44,85	27,25	17,60	le 3, à 2 s.	le 14, à 2 s.
Août . . .	37,45	37,58	37,48	37,42	37,62	37,51	45,68	28,43	17,25	le 10, à 6 m.	le 27, à 6 m.
Septembre .	36,83	37,27	36,77	37,14	37,24	37,05	44,78	19,47	25,31	le 5, à 9 m.	le 25, à 9 s.
Octobre . .	33,76	34,12	33,96	33,69	34,23	33,95	45,77	19,63	26,14	le 23, à 9 s.	le 20, à 6 m.
Novembre .	40,67	41,13	40,76	40,80	41,27	40,92	50,50	28,43	22,07	le 9, à 9 s.	le 16, à 2 s.
Décembre .	35,11	35,41	34,92	34,59	35,15	35,04	44,86	14,21	30,65	le 9, à 9 s.	le 15, à 6 m.
Moyenne. .	735,00	735,32	735,01	734,93	735,28	735,11	744,68	721,46	23,22	le 9 nov., à 9 h. s.	le 9 fév., à 9 h. s.

		mm.
Différence avec la moyenne,	à 6 h. du matin . .	— 0,11
— —	à 9 h. du matin . .	+ 0,21
— —	à midi	— 0,10
— —	à 2 h. du soir. . .	— 0,18
— —	à 9 h. du soir. . .	+ 0,17

		mm.
Extrêmes de l'année. .	*Maximum*	750,50
	Minimum	712,72
Intervalle de l'échelle parcouru . .		37,78

Température centigrade de l'air, à Stavelot, en 1853.

MOIS.	6 heures du matin.	9 heures du matin.	Midi.	2 heures du soir.	9 heures du soir.	*Maxima* moyens par mois.	*Minima* moyens par mois.	Moyennes par mois.	*Maxima* absolus par mois.	*Minima* absolus par mois.	Moyennes par mois.	Date des *maxima* absolus.	Date des *minima* absolus.
Janvier	3°,64	3°,94	5°,65	5°,85	4°,05	6°,79	2°,36	4°,57	9°,9	− 2°,0	3°,95	le 11	le 27
Février	−2,73	−1,79	0,49	0,69	−2,15	1,90	−3,82	−0,96	5,5	−15,3	−4,90	le 2	le 22
Mars	−4,27	−1,30	2,37	2,94	1,62	3,76	−5,03	−0,63	12,2	−20,4	−4,10	le 30	le 2
Avril	4,41	7,25	9,06	9,00	5,48	10,84	3,27	7,05	18,0	− 1,9	8,05	le 30	le 14
Mai	8,88	13,12	15,73	15,37	10,47	19,19	7,69	13,44	23,0	− 1,4	10,80	le 26	le 11
Juin	13,02	17,26	19,39	19,86	14,49	21,59	10,46	16,02	27,8	5,9	16,85	le 29	le 22
Juillet	14,41	19,20	21,90	22,30	15,68	24,13	11,98	18,06	32,1	7,5	18,80	le 10	le 4
Août	11,97	17,00	20,72	20,82	14,12	22,71	10,59	16,65	29,1	4,3	16,70	le 24	le 29
Septembre . . .	9,73	13,20	16,89	17,02	11,37	18,52	8,78	13,65	22,6	1,4	12,00	le 14	le 18
Octobre	7,04	9,56	13,03	13,04	8,58	14,25	6,25	10,25	17,7	− 2,9	7,40	le 28	le 4
Novembre . . .	0,16	1,33	5,72	5,86	2,17	6,91	−0,48	3,21	13,4	− 5,9	3,75	le 4	le 19
Décembre . . .	−5,72	−5,25	−2,42	−1,73	−5,12	−0,20	−7,85	−4,03	5,5	−23,6	−9,05	le 2	le 26
Moyenne. . .	5,05	7,79	10,71	10,92	6,73	12,53	3,68	8,11	17,23	− 4,53	6,35	le 10 juill.	le 26 déc.

Température moyenne de l'année.

D'après les *maxima* et *minima* moyens	8°,11
— — — absolus mensuels . .	6,35
— la température moyenne à 9 h. du matin .	7,79
— — — d'octobre. . . .	10,25

Extrêmes de l'année.

Maximum	32°,1
Minimum	− 23,6
Intervalle de l'échelle parcouru	55,7

Digitized by Google

Psychromètre d'August à Stavelot, en 1853.

MOIS.	6 H. DU MATIN.		9 H. DU MATIN.		MIDI.		2 H. DU SOIR.		9 H. DU SOIR.	
	Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	Thermomètre sec.	Thermomètre humide.
Janvier	3°,38	2°,95	3°,70	3°,17	5°,33	4°,46	5°,54	4°,65	3°,85	3°,32
Février	— 3,21	— 3,59	— 2,12	— 2,48	0,22	— 0,39	0,34	— 0,51	— 2,71	— 3,06
Mars	— 4,94	— 5,36	— 1,40	— 2,34	2,28	0,88	3,40	1,70	— 2,02	— 2,58
Avril	4,04	3,68	7,11	6,03	8,92	7,19	8,72	7,06	5,19	4,43
Mai	8,24	7,14	12,86	10,06	15,33	11,44	15,20	11,31	10,07	8,71
Juin	12,51	11,51	16,90	14,18	18,83	15,22	19,28	15,29	14,07	12,75
Juillet	14,00	13,13	18,62	16,21	21,21	17,38	21,70	17,56	15,53	14,23
Août	11,45	11,08	17,06	15,15	20,32	17,15	20,54	17,25	13,65	13,04
Septembre . . .	9,09	9,05	13,18	12,29	16,60	14,79	16,67	14,96	11,10	10,96
Octobre	6,60	6,53	9,42	8,91	12,85	11,74	12,82	11,84	8,15	8,08
Novembre . . .	— 0,17	— 0,43	1,13	0,79	4,92	4,16	5,68	4,87	1,57	1,28
Décembre . . .	— 6,40	— 6,76	— 5,93	— 6,29	— 2,57	— 3,11	— 2,03	— 2,55	— 5,86	— 6,24
MOYENNE. . .	4,55	4,08	7,55	6,31	10,35	8,41	10,67	8,62	6,05	5,41

État hygrométrique de l'air à Stavelot, en 1853.

MOIS.	TENSION DE LA VAPEUR D'EAU contenue dans l'air.					HUMIDITÉ RELATIVE DE L'AIR.				
	6 heures du matin.	9 heures du matin.	Midi.	2 heures du soir.	9 heures du soir.	6 heures du matin.	9 heures du matin.	Midi.	2 heures du soir.	9 heures du soir.
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.					
Janvier	5,85	5,89	6,22	6,29	5,95	93,3	92,0	87,6	87,4	92,1
Février	3,82	4,13	4,60	4,59	3,87	92,7	93,7	89,9	86,4	93,4
Mars	3,27	3,88	4,54	4,66	3,99	89,1	84,0	77,6	74,2	89,7
Avril	6,18	6,79	6,96	6,94	6,27	94,5	85,6	78,5	79,2	89,1
Mai	7,30	7,91	8,11	8,03	7,96	85,9	70,1	61,9	61,8	83,7
Juin	9,81	10,67	10,95	10,77	10,47	88,8	74,1	68,1	65,0	86,2
Juillet	10,97	12,41	12,60	12,57	11,51	90,7	77,9	67,9	65,8	86,8
Août	9,91	11,85	12,76	12,83	11,06	95,7	81,6	72,5	72,0	93,6
Septembre . . .	8,92	10,39	11,64	11,82	9,97	99,4	90,3	82,3	83,2	98,4
Octobre	7,60	8,57	9,90	10,04	8,37	98,9	93,8	87,7	89,2	99,1
Novembre . . .	4,79	5,12	6,14	6,42	5,32	95,6	94,1	88,7	89,9	90,5
Décembre . . .	3,08	3,19	3,88	4,05	3,18	92,2	92,5	90,4	90,1	91,9
MOYENNE . .	6,78	7,57	8,19	8,25	7,33	93,1	85,8	79,4	78,7	91,2

Digitized by Google

Quantité de pluie et de neige, nombre de jours de pluie, de grêle, de neige, etc., et sérénité du ciel, à Stavelot, en 1853.

MOIS.	Quantité de pluie.	Quantité de grêle et de neige	Quantité d'eau recueillie.	Nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau.	NOMBRE DE JOURS DE								SÉRÉNITÉ DU CIEL.					
					pluie.	grêle.	neige.	brouil.	tonner.	gelée.	Ciel serein.	Ciel couvert	6 h. du mat.	9 h. du mat.	Midi.	2 h. du soir.	9 h. du soir.	Moyenne.
	mm.	mm.	mm															
Janvier . .	8,64	90,42	99,06	17	18	0	3	5	0	7	0	5	2,3	1,8	1,7	1,3	2,2	1,9
Février . .	73,46	»	73,46	14	0	0	15	2	0	24	0	8	1,2	2,0	1,9	2,3	2,1	1,9
Mars . . .	15,16	6,87	22,03	10	4	1	10	4	0	25	4	2	3,9	4,6	4,5	4,7	6,1	4,8
Avril . . .	33,61	146,43	180,04	27	21	8	9	10	3	4	0	9	1,0	1,4	1,3	1,1	2,4	1,4
Mai. . . .	3,56	41,89	45,45	12	13	1	1	3	2	2	0	4	5,3	3,8	2,9	3,1	4,6	4,0
Juin . . .	»	126,05	126,05	12	15	0	0	13	4	0	2	4	3,3	3,4	3,0	2,7	4,1	3,3
Juillet . .	»	76,39	76,39	14	17	0	0	11	7	0	0	0	2,8	2,9	3,2	3,2	4,1	3,2
Août . . .	»	65,56	65,56	13	12	1	0	8	3	0	0	1	3,2	3,2	2,8	2,4	5,6	3,4
Sept. . . .	»	93,20	93,20	9	11	1	0	9	0	0	2	4	3,1	3,9	3,3	3,2	5,0	3,7
Octobre. .	1,27	59,85	61,12	17	17	2	1	6	2	2	3	1	2,6	2,7	2,4	3,0	4,1	3,0
Novembre.	1,91	8,00	9,91	4	3	0	2	13	0	13	2	8	2,5	2,5	3,7	3,8	3,3	3,2
Décembre.	26,10	»	26,10	8	0	0	8	1	0	29	6	6	4,1	4,2	4,0	4,4	4,8	4,3
Année. .	163,71	714,66	878,37	157	131	14	49	85	21	106	19	52	2,94	3,04	2,89	2,94	4,03	3,16

Nombre d'indications de chaque vent à Stavelot, en 1853.

(D'après la direction des nuages, observée 4 fois par jour, à 6 et 9 h. m., midi et 2 h. s.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.	Ciel uniforme.	Ciel serein.
Janvier	0	3	3	3	0	5	3	1	5	17	26	7	8	3	5	1	32	4
Février	2	11	7	8	7	0	0	7	0	2	0	2	2	1	5	4	50	5
Mars	11	12	11	5	0	3	2	4	1	4	2	7	4	2	2	3	24	27
Avril	3	0	0	3	0	2	2	1	2	7	13	21	21	19	7	7	13	4
Mai	6	5	10	20	17	9	5	2	0	4	11	5	6	5	0	3	7	13
Juin	9	8	4	5	9	1	0	1	2	7	12	9	16	4	2	5	17	13
Juillet.	0	0	0	0	0	0	0	1	3	19	19	25	27	18	1	4	6	8
Août	2	6	12	5	2	0	0	3	0	11	20	17	16	8	4	5	10	9
Septembre . . .	2	7	8	1	6	4	6	1	3	3	15	13	12	11	3	1	9	19
Octobre	0	6	1	0	5	0	4	15	17	9	15	14	12	7	2	0	10	15
Novembre . . .	4	2	6	4	6	10	10	4	1	1	3	0	0	1	6	5	36	21
Décembre. . . .	0	6	14	2	4	3	1	2	2	4	2	0	2	1	0	0	45	38
Année . .	38	66	77	56	56	37	33	42	36	88	138	120	126	80	37	38	259	176

Digitized by Google

RÉSUMÉ

Des observations météorologiques faites à S^t-Trond, en 1853.

Par M. J.-H. VAN OYEN.

Professeur de physique au Petit-Séminaire.

Pression atmosphérique. — Le baromètre qui a servi aux observations est à niveau constant, et porte le n° 251 d'Ernst.

L'instrument se trouve dans une salle spacieuse donnant vers le nord et n'offrant que très-peu de variations de température diurne; d'après le nivellement exécuté sous la direction de M. l'ingénieur Grosfils, par M. Lambert, conducteur des Ponts et Chaussées, la cuvette du baromètre se trouve à $5^m,47$ au-dessus du repère du Nivellement général du royaume. Le talon ménagé dans l'encadrement inférieur de la pierre de repère, scellée sur la façade principale de la remise aux locomotives de la station du chemin de fer, étant à 54 mètres au-dessus de la *basse mer moyenne* des vives eaux d'Ostende, qui forme le zéro du port, on a pour la cuvette $59^m,47$, soit $57^m,05$ au-dessus de la *mer moyenne* (voyez pages 7 et 8).

Toutes les hauteurs observées sont réduites à la température 0°, et ont subi la correction constante de + $0^{mm},643$, correction indiquée par des comparaisons nombreuses faites à l'Observatoire royal de Bruxelles; de sorte que l'on doit considérer les hauteurs inscrites comme des hauteurs absolues.

Température de l'air. — Les température de l'air sont données par un thermométrographe de Beaulieu, et sont observées à l'échelle des *maxima*. Le zéro de l'échelle des *minima* se trouve à deux dixièmes au-dessus de la glace fondante, et celui des *maxima* à un dixième au-dessous de ce point; cette erreur va en augmentant légèrement avec les degrés, ainsi qu'il a été constaté par des observations comparatives avec le thermomètre Bunten de l'Observatoire royal de Bruxelles. Les nombres observés ont subi les corrections déduites de ces observations simultanées.

Les températures *maxima* sont observés à 9 heures du matin et rapportés au jour précédent; les *minima* sont observés à midi et inscrits au jour même de l'observation.

Digitized by Google

L'instrument est librement exposé au nord-19°-ouest; il est garanti des rayons du soleil couchant et du rayonnement des objets voisins, par des panneaux doubles entre lesquels l'air peut circuler librement; il est également garanti contre le rayonnement nocturne.

Humidité de l'air. — Le psychromètre a été observé quatre fois le jour, et a fourni les tableaux de la tension de la vapeur d'eau et de l'humidité relative de l'air calculées d'après les tables de Stierlin.

État du ciel. — La sérénité du ciel est donnée en nombre proportionnels : 10 représente un ciel entièrement serein et 0 un ciel entièrement couvert; la forme des nuages est donnée dans le même tableau.

Direction du vent. — Quant le ciel le permettait, on a observé la direction du vent, d'après les nuages, à 9 heures du matin, à midi et à 3 heures du soir.

Pluie, neige, etc. — L'eau de pluie, de neige ou de grêle, est recueillie dans un udomètre à deux ouvertures circulaires, une en entonnoir, l'autre en cylindre; elle est mesurée chaque jour à midi et indiquée dans le tableau en millimètres de hauteur. L'ouverture se trouve à 1,5 mètre environ au-dessus du sol.

N. B. M. Van Oyen ayant été nommé professeur à Louvain, n'a pu, par suite de ce déplacement, compléter les tableaux des observations relatives à l'anémomètre.

Pression atmosphérique à S^t-Trond, en 1853.

MOIS.	HAUTEURS MOYENNES DU BAROMÈTRE par mois.				*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	DIFFÉRENCE ou VARIATION mensuelle.	DATE du *maximum*.	DATE du *minimum*.
	9 heures du matin.	Midi.	5 heures du soir.	9 heures du soir.					
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.		
Janvier	752,09	752,14	751,55	751,77	764,84	734,35	30,49	le 1, à 9 h. m.	le 17, à midi.
Février	47,90	47,32	46,65	47,53	63,18	33,05	30,13	le 1, à 9 h. m.	le 26, à 9 h. s.
Mars	56,26	56,06	55,62	56,04	65,26	41,87	23,39	le 10, à midi.	le 2, à 9 h. s.
Avril	53,37	53,30	53,25	53,71	63,83	37,81	25,05	le 9, à 9 h. s.	le 25, à 9 h. m.
Mai	54,08	53,93	53,51	54,03	60,31	40,72	19,59	le 10, à 9 h. s.	le 8, à 9 h. m.
Juin	54,18	52,02	53,78	54,10	60,34	47,13	13,21	le 8, à 9 h. s.	le 23, à 9 h. m.
Juillet	56,40	56,13	55,99	56,52	65,06	45,05	20,01	le 3, à midi.	le 14, à 9 h. s.
Août	56,68	56,58	53,69	56,69	65,50	45,62	19,88	le 10, à 9 h. s.	le 26, à 9 h. s.
Septembre	56,65	56,56	56,15	55,62	65,26	37,08	28,18	le 5, à 9 h. m.	le 25, à 9 h. s.
Octobre	52,55	52,45	52,11	52,86	64,58	37,13	27,45	le 23, à 9 h. s.	le 20, à 9 h. m.
Novembre	60,95	60,70	60,12	60,74	70,57	49,09	21,48	le 9, à 9 h. s.	le 16, à 3 h. s.
Décembre	55,68	55,55	55,22	55,67	66,94	30,03	36,91	le 9, à 9 h. s.	le 15, à midi.
Moyenne	754,73	754,56	753,97	754,60	764,63	739,91	24,64		

	mm.
Pression moyenne de l'année	754,46
Différence à 9 h. du matin	+ 0,27
— à midi	+ 0,10
— à 3 h. du soir	— 0,49
— à 9 h. du soir	+ 0,14

		mm.
Extrêmes de l'année.	*Maximum*, le 9 novembre.	770,57
	Minimum, le 15 décembre.	730,03
Intervalle de l'échelle parcouru		40,54

Digitized by Google

Température centigrade de l'air à S^t-Trond, en 1853.

MOIS.	TEMPÉRATURE MOYENNE par mois. 9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.	*Maximum* moyen par mois.	*Minimum* moyen par mois.	TEMPÉRAT. moy. par mois.	VARIATION diurne moyenne.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	VARIATION men-suelle.	DATE du *maximum* absolu.	DATE du *minimum* absolu.
Janvier . .	4°,69	5°,71	5°,98	5°,25	6°,83	3°,86	5°,34	2°,97	10°,7	— 1°,6	12°,3	le 11	le 27
Février . .	—0,67	0,52	0,61	— 1,19	1,40	— 1,63	—0,11	3,03	5,7	— 6,4	12,1	le 1	le 19
Mars . . .	0,17	2,32	3,78	0,94	3,50	— 1,85	0,82	5,35	12,6	— 9,3	21,9	le 14	le 2
Avril . . .	7,60	9,34	9,62	7,18	10,54	4,95	7,74	5,59	15,6	0,0	15,6	le 20	le 14
Mai . . .	12,63	15,09	16,41	13,14	17,43	8,60	13,01	8,83	25,1	1,0	24,1	le 26	le 8
Juin . . .	16,91	18,96	19,93	16,68	21,19	13,08	17,13	8,11	29,7	7,9	21,8	le 29	le 4
Juillet. . .	19,01	21,02	21,71	18,04	23,29	14,95	19,12	8,34	33,5	11,0	22,5	le 9	le 2
Août . . .	17,05	19,65	20,69	17,04	21,11	14,16	17,63	6,95	26,9	10,8	16,1	le 21	le 31
Septembre .	13,86	16,41	17,39	14,01	18,02	11,66	14,84	6,36	23,1	6,0	17,1	le 14	le 27
Octobre . .	10,94	13,34	15,79	10,66	14,37	8,71	11,54	5,66	18,1	3,2	14,9	le 28	le 4
Novembre .	2,67	4,95	6,32	3,40	6,49	1,80	4,14	4,69	14,4	— 3,8	18,2	le 3	le 29
Décembre .	—3,76	— 2,26	—1,48	— 3,33	— 0,59	—5,32	— 2,95	— 4,73	5,3	—16,7	22,0	le 5	le 26
MOYENNE. .	8,42	10,42	11,22	8,40	11,96	6,08	9,02	5,09	18,3	0,17	18,2		

TEMPÉRATURE MOYENNE DE L'ANNÉE.

D'après les *maxima* et *minima* moyens	9°,02
— — — absolus mensuels . .	9,23
— les observations de 9 h. du matin	8,42
— la moyenne du mois d'octobre	11,54

TEMPÉRATURES EXTRÊMES DE L'ANNÉE.

Maximum, le 9 juillet	33°,5
Minimum, le 5 décembre	—16,7
Intervalle de l'échelle parcouru . . .	50,2

État hygrométrique de l'air; quantité d'eau tombée; nombre de jours de pluie, de grêle, de neige, etc., à S^t-Trond, en 1853.

MOIS.	PSYCHROMÈTRE D'AUGUST. HUMIDITÉ RELATIVE DE L'AIR. 9 heur. du matin	Midi.	3 heur. du soir.	9 heur. du soir.	Moy.	TENSION DE LA VAPEUR D'EAU. 9 heur. du matin.	Midi.	3 heur. du soir.	9 heur. du soir.	Moy.	Quantité d'eau tombée en millim. de hauteur.	NOMBRE DE JOURS DE Pluie.	Neige.	Grêle.	Gelée.	Brouillard.	Tonnerre.
						mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.						
Janvier . .	91	85	88	87	87	6,35	6,45	6,54	6,30	6,40	61,91	19	2	0	3	9	0
Février . . .	93	89	88	93	90	4,63	4,78	4,82	4,63	4,71	21,64	4	19	0	19	7	0
Mars	93	83	80	86	85	4,83	5,12	5,25	4,69	4,97	17,57	6	11	1	21	9	0
Avril	84	74	72	84	78	7,03	6,91	6,79	6,79	6,88	86,46	28	3	10	0	6	2
Mai	69	60	56	72	64	7,85	7,81	7,98	8,21	7,96	71,46	16	1	2	0	11	3
Juin	74	63	61	76	68	10,75	10,36	10,62	10,85	10,64	77,85	20	0	0	0	7	4
Juillet. . . .	69	64	59	74	66	11,50	11,81	11,40	11,51	11,55	36,81	17	0	0	0	1	9
Août	76	64	59	76	68	11,16	10,80	10,71	11,09	10,94	60,25	16	0	1	0	7	3
Septembre . .	85	73	68	82	77	10,30	10,34	10,28	10,09	10,25	92,22	15	0	0	0	11	2
Octobre . . .	83	75	82	84	81	8,54	8,86	9,06	8,44	8,72	35,79	18	0	2	0	7	4
Novembre . .	92	85	83	90	87	5,70	6,05	6,24	5,81	5,95	3,82	4	1	0	8	23	0
Décembre . .	94	94	91	90	92	3,78	4,21	4,27	3,76	4,01	2,80	2	10	0	28	14	0
ANNÉE. . .	85	75	73	82	78	7,70	7,79	7,83	7,68	7,74	568,58	165	47	16	79	112	27

Digitized by Google

État du ciel à S^t-Trond, en 1853.

MOIS.	Sérénité du ciel. 9 heur. du matin.	Midi.	3 heur. du soir.	9 heur. du soir.	Moy.	Nomb. de jours entièrement sereins.	entièrement couverts.	Indication de l'état des nuages et du ciel, d'après les observations faites à 9 h. m., midi, 3 et 9 h. s. Ciel serein.	Cirrhus.	Cirrho-cum.	Cumulus.	Cirroh-strat.	Cum.-strat.	Stratus	Nimb.	Ciel couv.
Janvier	1,8	2,0	1,5	2,8	2,0	0	11	9	1	22	1	10	22	86	17	31
Février	1,8	2,4	1,6	2,4	2,0	1	13	8	1	11	3	13	14	61	11	44
Mars.	5,0	4,4	4,2	6,2	4,9	5	7	43	0	10	0	11	30	44	10	34
Avril.	1,3	1,8	1,7	3,2	2,0	0	9	7	0	16	4	4	55	81	29	18
Mai	4,6	4,6	4,0	5,3	4,6	2	5	20	0	19	5	15	51	57	13	11
Juin	3,8	3,3	3,4	5,3	3,9	2	4	17	2	20	19	8	49	65	12	11
Juillet	3,4	2,9	2,8	5,2	3,5	0	0	10	1	34	14	19	68	79	18	4
Août.	3,5	3,2	3,2	5,3	3,8	0	3	12	1	28	13	9	62	68	25	13
Septembre	3,2	3,0	2,8	4,7	3,4	1	6	20	0	18	6	7	42	55	22	13
Octobre	3,5	2,7	2,9	4,6	3,4	1	5	18	3	31	9	14	30	80	46	10
Novembre	2,5	3,6	4,8	4,8	3,9	2	10	31	2	25	1	9	6	44	6	40
Décembre	3,4	3,3	4,7	4,2	3,9	4	9	33	1	6	0	8	4	38	3	54
Année	3,15	3,11	3,14	4,49	3,46	18	82	228	12	240	75	127	433	758	212	283

Nombre d'indications de chaque vent, à S^t-Trond, en 1853.

(D'après la direction des nuages, observée trois fois par jour, à 9 h., midi et 3 h. soir.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.	Nombre d'observations.
Janvier.	1	2	0	0	0	0	0	0	1	7	9	9	6	5	3	0	43
Février.	2	0	6	0	0	0	2	2	0	0	0	2	4	0	1	1	20
Mars.	3	3	6	1	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	1	0	17
Avril	5	2	2	0	0	0	0	0	1	1	4	7	22	6	2	4	56
Mai	4	5	4	5	6	0	0	0	0	1	0	3	8	0	1	2	39
Juin.	2	6	2	1	1	1	0	0	1	4	5	8	4	1	2	0	38
Juillet	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4	16	19	1	0	0	41
Août.	2	1	7	0	0	0	0	0	0	3	2	3	10	0	1	0	29
Septembre.	2	2	5	0	0	0	0	0	0	1	2	5	13	5	1	0	36
Octobre	1	0	0	0	0	0	0	0	1	6	3	6	11	7	0	0	35
Novembre	1	0	0	0	3	0	0	0	0	0	1	2	1	0	1	1	10
Décembre	0	0	0	1	4	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	9
Année. . . .	23	21	32	8	14	3	2	2	5	23	32	63	98	25	14	8	373

Digitized by Google

RÉSUMÉ

Des observations météorologiques, faites à Namur, en 1853;

PAR M. CH. MONTIGNY, professeur de physique à l'Athénée.

Le lieu des observations est au faubourg d'Heuvy, sur une des sommités nord qui entourent Namur. Le nivellement barométrique, exécuté en 1849, a donné 65 mètres pour hauteur de la cuvette du baromètre au-dessus du sol de la station du chemin de fer de l'État. D'après le Nivellement général du royaume, le talon ménagé dans l'encadrement inférieur de la pierre de repère, scellée dans la façade latérale (sud) de la remise aux locomotives de la station, est à 87 mètres au-dessus de la *basse mer moyenne* des vives eaux d'Ostende, formant le zéro du port; on a donc 152 mètres pour hauteur de la cuvette, soit 149^{m},58 au-dessus de la *mer moyenne* (voyez pages 7 et 8.)

Pression atmosphérique. — Les variations de la pression atmosphérique ont été observées à l'aide d'un baromètre de Gay-Lussac, monté dans un étui en bois à charnière, où se trouve incrusté le thermomètre pour opérer la réduction à 0°. L'instrument est suspendu verticalement dans l'embrasure intérieure d'une fenêtre dirigée vers le nord, à 5 mètres environ au-dessus du sol d'une cour.

Le tube ayant 4 millimètres de diamètre intérieur, et le mercure étant bien purifié, l'instrument est très-sensible aux variations de la pression de l'air, malgré les rétrécissements intérieurs du tube, qui sont inhérents à ce mode de construction. J'ai reconnu qu'avant chaque observation, il est nécessaire d'incliner rapidement l'instrument, afin que la colonne de mercure fasse une excursion d'une certaine amplitude, et cela dans le but d'amener le ménisque de la branche inférieure à prendre la même convexité que celui de la partie supérieure. Le moyen est efficace; car, après des excursions semblables, le mercure revient exactement à la même hauteur, si on lui fait encore subir rapidement de nouvelles inclinaisons.

Digitized by Google

La lecture des hauteurs de la colonne de mercure s'opère à l'aide de deux verniers donnant les $^1/_{10}$ de millimètre; ils glissent sur deux échelles en cuivre, placées l'une à l'extrémité supérieure, et l'autre à la partie inférieure. La comparaison de ce baromètre avec celui de l'Observatoire royal de Bruxelles a permis de constater que les hauteurs indiquées exigent une correction additive de 1 millimètre : elle a été opérée pour toutes les pressions indiquées dans le premier tableau.

Température de l'air. — Le thermomètre employé aux observations de la température de l'air pendant le jour, est à mercure et à échelle centigrade gravée sur verre. Les températures indiquées ont subi la correction adoptée pour cet instrument.

Le thermomètre à *minima* est à alcool et à index. Pour suppléer aux indications du thermomètre à *maxima*, qui est détérioré, j'ai indiqué la température la plus élevée de chaque mois, à 3 heures du soir. Je ferai remarquer que la température la plus élevée, observée à cette heure (31°,6), s'est présentée le 9 juillet, et que, le même jour, vers 1 heure, j'observai 32°,0; il y aurait lieu de considérer cette température comme étant l'extrême *maxima* de l'année, ainsi que je l'ai fait au tableau des températures.

Quant au *minima* —22°, du 26 décembre, il a été observé par M. Maas, professeur au collége de la Paix, qui a bien voulu me communiquer cette température déduite de l'abaissement remarquable pendant la nuit du 25 au 26 décembre. Le thermomètre était adossé à la muraille d'une vaste cour du collége de la Paix, situé dans l'intérieur de la ville. Une absence de plusieurs jours ne me permit pas de suivre les variations de la température à cette époque. Toutefois, mon thermomètre fut observé le 26, à 9 h. du matin; il marquait à cet instant —19°,4.

Pluie, neige, etc. — L'udomètre est placé au milieu d'une grande cour, à 1 mètre environ au-dessus du sol; l'ouverture du récipient est de 0^m,16. La quantité d'eau recueillie a été mesurée d'un midi à l'autre; elle comprend, outre l'eau de pluie, celle provenant de la fusion de la neige et de la grêle. J'ai distingué le nombre de jours de pluie de ceux où il a été recueilli de l'eau; de sorte que tous les jours où il est tombé de la pluie sont compris parmi les premiers, même quand celle-ci n'a pu être mesurée à cause de sa faible quantité.

Vents. — La direction du vent a été prise d'après les indications d'une girouette fixée sur le faîte d'un bâtiment élevé et isolé.

N. B. Les observations régulières ont été interrompues le 1er, le 2 et le 9 janvier; le 5 et le 6 février; le 6 et le 7 mars; le 2 et le 30 avril; du 4 au 10 juin; du 16 au 24 septembre; le 23 et le 24 octobre; le 26 et le 27 novembre, et enfin, du 18 au 20 et du 23 au 26 décembre. Cependant plusieurs observations de température et de hauteur barométrique ont été faites à ces époques; celles des températures *minima* ont fait rarement défaut.

Digitized by Google

Pression atmosphérique à Namur, en 1853.

MOIS.	HAUTEURS MOYENNES DU BAROMÈTRE par mois. 9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.	Moyennes.	*Maxima* absolus par mois.	*Minima* absolus par mois.	DIFFÉRENCES ou variations mensuelles.	DATES des *maxima*.	DATES des *minima*.
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.		
Janvier	743,3	743,2	742,9	742,8	743,1	753,0	728,1	24,9	le 30, à 3 h. s.	le 17, à 9, 12 et 3 h.
Février	39,3	38,7	38,9	39,5	39,1	54,0	24,5	29,5	le 1, à 9 h. s.	le 9, à 3 h. s.
Mars	47,6	47,1	46,9	47,0	47,1	57,1	33,2	23,9	le 10, à 9 h. m.	le 2, à 9 h. s.
Avril	45,2	45,4	45,5	46,2	45,6	55,8	32,1	23,7	le 9, à 9 h. s.	le 25, à 9 h. m.
Mai	45,8	46,0	46,0	46,2	46,0	52,7	34,4	18,3	le 10, à 9 h. s. et le 11, à 9 h. m.	le 8, à 9 h. m.
Juin	45,6	45,0	44,9	44,9	45,1	51,9	39,9	12,0	le 17, à 9 h. m.	le 3, à 9 h. m.
Juillet	48,5	48,2	48,2	48,7	48,4	55,8	39,7	16,1	le 3, à 9 h. s.	le 14, à 9 h. s. et le 15, à 12 h.
Août	48,5	48,6	48,3	49,0	48,6	57,1	39,5	17,6	le 10, à 9 h. m.	le 26, à 3 h. s.
Septembre . . .	47,8	47,8	47,5	47,3	47,6	53,6	31,9	21,7	le 5, à 9 h. m.	le 26, à 9 h. s.
Octobre	44,9	44,5	44,4	44,9	44,7	55,6	33,5	23,0	le 23, à 9 h. m.	le 18, à 9 h. m.
Novembre . . .	53,0	52,8	52 8	52,9	52,9	64,0	42,6	21,4	le 9, à 9 h. s.	le 16, à 3 et 9 h. s.
Décembre . . .	46,6	45,9	45,7	46,0	46,0	56,9	26,1	30,8	le 9, à midi.	le 15, à 9 h. m.
MOYENNE. . .	746,4	746,2	746,0	746,3	746,2	755,6	733,8	21,8		

Extrêmes de l'année. . . . . { *Maximum*, le 9 novembre, à 9 h. m. . . . . mm. 764,0
{ *Minimum*, le 9 février, à 3 h. s. 724,5

Intervalle de l'échelle parcouru 39,5

Température centigrade de l'air à Namur, en 1853.

MOIS.	TEMPÉRATURES MOYENNES PAR MOIS. 9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures du soir.	Moyennes.	*Minima* moyens par mois.	*Maxima* à 3 h. du soir par mois.	*Minima* absolus par mois.	DATES *des maxima* à 3 h. soir.	DATES *des minima* absolus.
Janvier	4°,9	6°,6	6°,5	5°,4	5°,8	3°,0	10°,2	— 2°,0	le 12	le 26
Février	0,0	1,6	1,6	0,7	1,0	1,2	7,0	— 6,2	le 9	le 29
Mars	0,5	5,7	4,1	0,4	2,7	2,4	14,4	— 10,5	le 13	le 2
Avril	7,8	9,8	9,4	5,4	8,1	3,8	17,0	— 0,7	le 19	le 14
Mai	13,1	15,8	17,0	11,8	14,4	7,7	25,3	0,4	le 25	le 8
Juin	18,3	21,2	21,6	11,8	18,2	11,7	26,0	6,6	le 11	le 4
Juillet	19,2	22,1	22,3	17,4	20,2	13,6	31,6	9,8	le 9	le 2
Août	17,9	20,9	21,8	15,6	19,0	13,0	28,5	9,0	le 20	le 29
Septembre . . .	14,0	16,7	17,0	12,8	15,1	10,1	23,6	4,1	le 12	le 28
Octobre	11,1	13,8	14,0	10,1	12,2	7,6	18,5	0,8	le 27	le 4
Novembre . . .	3,5	6,1	6,8	8,8	6,3	0,7	14,4	— 5,2	le 2	le 29
Décembre . . .	— 3,1	— 1,0	— 0,8	— 3,2	— 2,0	— 6,3	6,0	— 22,0	le 13	le 26
MOYENNE. . .	9,4	11,6	11,7	9,1	10,4	5,8	17,9	— 1,3		

Extrêmes de l'année. . . . . { *Maximum*, le 9 juillet, à 1 h. . . . . 32°,0
{ *Minimum*, le 26 décembre . . . . — 22,0

Intervalle de l'échelle parcouru. 54,0

Digitized by Google

Quantité d'eau recueillie ; nombre de jours de pluie, de grêle, neige, etc., à Namur, en 1853.

MOIS.	Quantité d'eau recueillie par mois, en millimètres.	Nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau.	NOMBRE DE JOURS DE							
			Pluie.	Grêle.	Neige.	Gelée.	Tonnerre.	Brouillard.	Ciel entièrement couvert.	Ciel sans nuages.
	mm.									
Janvier . . .	40	8	17	0	1	4	0	4	7	0
Février . . .	32	12	0	0	15	21	0	3	9	0
Mars	13	3	2	1	10	21	0	5	4	1
Avril	88	21	24	6	3	1	1	3	5	0
Mai	96	13	14	1	1	0	3	6	0	0
Juin	96	9	14	0	0	0	6	10	3	0
Juillet . . .	46	13	13	0	0	0	3	7	0	0
Août	72	9	15	0	0	0	3	8	0	0
Septembre . .	116	11	15	0	0	0	0	10	4	1
Octobre . . .	40	11	13	0	0	0	2	3	0	3
Novembre . .	3	2	3	0	1	12	0	19	7	1
Décembre . .	40	4	1	0	5	28	0	6	9	3
Total. . .	682	116	131	8	36	87	18	84	48	9

État du ciel et direction du vent, à Namur, en 1853.

MOIS.	INDICATIONS DE L'ÉTAT DES NUAGES ET DU CIEL, d'après les observations faites à 9 h. du matin, à midi, à 3 et à 9 heures du soir.								NOMBRE D'INDICATIONS DE CHAQUE VENT, d'après les observations faites à 9 h. du m., à midi et à 3 s.							
	Ciel serein.	Cirrhi.	Cirr. strati.	Cirr. cumuli.	Cumuli.	Cum. strati.	Nimbus.	Couvert.	N.	NE.	E.	SE.	S.	SO.	O.	NO.
Janvier . .	6	3	4	2	10	16	21	25	1	3	5	0	19	6	19	4
Février . .	4	9	3	2	14	3	0	51	14	2	14	0	0	3	11	5
Mars . . .	29	22	2	2	17	6	2	29	7	14	7	1	6	3	3	4
Avril . . .	4	10	3	1	23	12	25	25	8	4	4	1	4	2	31	11
Mai . . .	11	21	7	1	40	9	8	14	22	7	33	0	4	3	8	0
Juin . . .	13	8	1	2	44	6	15	8	5	1	6	1	12	1	28	4
Juillet. . .	16	17	7	1	52	14	14	11	2	0	3	0	15	20	42	2
Août . . .	15	13	11	0	48	14	8	11	13	15	5	1	3	13	18	5
Septembre .	14	7	6	2	20	8	16	21	7	3	9	3	3	7	11	4
Octobre . .	31	5	18	1	19	21	11	10	0	1	2	1	32	9	20	3
Novembre .	16	21	3	2	6	9	2	24	4	4	9	0	2	3	2	2
Décembre .	21	9	10	0	0	5	1	32	0	3	19	2	4	2	5	4
Total . .	180	145	75	16	293	123	123	261	83	57	116	10	104	72	198	48

Digitized by Google

RÉSUMÉ

Des observations météorologiques, faites à Furnes, en 1853,

PAR M. A. DE HOON, ingénieur des Wateringues.

Ces observations ont été réduites à l'Observatoire, et les tableaux résumés ont été relevés et calculés de la même manière que ceux de Bruxelles.

Pression atmosphérique. — Le baromètre de M. Beaulieu est à niveau constant et porte le n° 306; il est construit d'après le système de Fortin, modifié par Ernst. Les comparaisons faites avec le baromètre de l'Observatoire de Bruxelles, ont montré que les indications exigent une correction de + $0^{mm},60$ pour exprimer des hauteurs absolues : les nombres contenus dans le tableau ont subi cette correction.

La ville a mis à la disposition de M. De Hoon une salle très-convenable pour établir ses instruments; la cuvette du baromètre s'y trouve à 15 mètres au-dessus (1) de la *basse mer moyenne* des vives eaux à Nieuport. En prenant pour unité de hauteur le nombre $1^m,96$ donné pour ce port dans l'*Almanach séculaire de l'Observatoire,* on obtient $13^m,04$ pour hauteur au-dessus de la *mer moyenne.*

(1) C'est par une faute d'impression que Furnes et Capryk ont été placés *au-dessous* de la mer, dans le Résumé des observations de 1852, pp. 40 et 44.

Digitized by Google

Température. — D'après les comparaisons faites en avril 1851, le thermométrographe de Bunten fourni par Beaulieu, donnait des indications trop basses de 0°,6.

Le 22 février 1853, M. De Hoon ayant pris cet instrument chez lui pour opérer la vérification du zéro, remarqua que ce point s'était déplacé brusquement. Les nouvelles comparaisons faites en mars, à l'Observatoire de Bruxelles, montrèrent que les indications de la branche à *maximum* étaient trop basses de 7°,3 et celles de la branche à *minima*, de 7°,7.

Ces corrections paraissent ne s'être pas maintenues après le retour du thermomètre à Furnes, car ayant été renvoyé de nouveau au mois de septembre de la même année, on ne trouva plus pour correction de la branche à *maxima* que + 5°,6, et +5°,2 pour celle à *minima*.

En communiquant ses observations, M. De Hoon fait observer que « les corrections relatives à la température ont été omises, parce qu'il ne pourra, sans doute, être tiré aucun parti d'observations incomplètes faites à l'aide d'un instrument d'une marche aussi peu régulière »; à partir du 1er janvier 1854, il a cessé d'en faire usage : « L'ayant pris ce jour avec moi, ajoute-il, pour vérifier les points de l'échelle correspondants à la glace fondante et à l'eau bouillante, le zéro subit plusieurs déplacements successifs qu'il m'aurait été difficile de déterminer d'une manière exacte. »

Nous ferons remarquer à ce propos que les thermométrographes de ce genre sont peu susceptibles de déplacement fréquents, et que le point correspondant à la glace fondante peut seul être vérifié directement; comme ces instruments ne sont destinés qu'à indiquer des températures inférieures à 50 degrés, les points intermédiaires doivent être vérifiés à l'aide d'un autre thermomètre.

Comparons la marche du psychromètre de Furnes, en 1851 et 1852, avec celle du thermométrographe; nous trouverons que le zéro du thermomètre sec était trop bas de 2 à 3 dixièmes de degré. Si l'on corrige de cette quantité les observations de 1853, on voit, en comparant de nouveau avec les résultats correspondants du thermométrographe, que l'on peut adopter, pour les deux premiers mois de l'année, l'ancienne correction + 0°,6; pour les huit autres mois, nous avons pris celles qui résultaient des comparaisons faites en septembre, car les corrections obtenues en mars auraient été beaucoup trop fortes; il est évident que le zéro s'est déplacé pendant le premier retour à Furnes, et s'est ensuite maintenu à très-peu près au même point durant le reste de l'année.

La température moyenne, à midi, pour les mois de mars et de septembre, a été donnée d'après les indications corrigées de la boule sèche du psychromètre.

Pour suppléer, dans le calcul des moyennes de l'année, aux indications extrêmes qui manquaient pour ces deux mois, on a réduit les observations de Gand à la station de Furnes, en corrigeant les nombres de la différence moyenne entre les deux stations pendant les dix autres mois.

Digitized by Google

Humidité. — Le psychromètre d'August, fourni par Beaulieu, a été vérifié à l'Observatoire de Bruxelles. Nous ignorons si, depuis l'année précédente, il a été abrité par un toit en verre.

Pluie, neige, etc. — En 1852, l'udomètre laissait à désirer sous le rapport du placement, mais peut-être aura-t-il été déplacé cette année.

La pluie n'ayant pas été mesurée chaque jour, en octobre et décembre, le nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau a été donné pour ces deux mois, d'après le total du nombre de jours de pluie et de neige.

M. De Hoon indiquait une quantité totale de 67^{mm},47 d'eau recueillie, du 9 décembre au 10 janvier 1854; on a réparti cette quantité entre les deux mois proportionnellement aux nombres obtenus à Bruxelles pour les deux périodes correspondantes.

N.B. Les observations régulières ont été interrompues le 5 février, les 10 et 24 avril, les 6, 14, 15, 29, 30 et 31 mai, le 12 juin et du 28 août au 2 septembre. Les températures extrêmes n'ont pu être observées du 22 février au 30 mars et du 28 août au 4 octobre. En outre, les indications de la température ont manqué les 1er et 2 juin, à midi, et celles du psychromètre, le 16 mai, les 1er, 2 et 13 juin.

Pression atmosphérique et humidité de l'air, à Furnes, en 1853.

MOIS.	BAROMÈTRE.						PSYCHROMÈTRE D'AUGUST, à midi.			
	Hauteurs moy. par mois, à midi.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	Variation mensuelle.	DATE du *maximum*.	DATE du *minimum*.	Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	Tension de la vapeur d'eau.	Humidité relative.
	mm.	mm.	mm.	mm.					mm.	
Janvier	754,96	766,18	738,86	27,32	le 1	le 17	7°,04	5°,89	6,67	84,5
Février	51,71	67,23	36,68	30,55	le 1	le 9	2,07	1,38	5,13	88,8
Mars	59,88	68,56	45,49	23,07	le 10	le 2	4,91	3,21	5,19	75,2
Avril	57,61	68,47	45,70	22,77	le 9	le 22	10,43	8,26	7,22	74,3
Mai.	58,70	66,88	50,61	16,27	le 10	le 8	14,17	10,99	8,18	66,9
Juin	58,47	64,22	51,12	13,10	le 17	le 20	18,45	15,19	11,05	70,1
Juillet.	59,48	68,37	47,20	21,17	le 3	le 14	20,66	16,66	11,79	65,7
Août	60,78	69,90	47,52	22,38	le 10	le 27	19,56	15,98	11,50	68,3
Septembre . . .	59,69	70,08	45,05	25,03	le 5	le 25	16,72	14,07	10,56	74,3
Octobre	55,34	65,70	41,86	23,84	le 23	le 19	13,88	11,92	9,48	78,5
Novembre. . . .	63,97	75,09	53,63	21,46	le 9	le 16	6,44	4,74	5,81	76,5
Décembre. . . .	59,16	70,90	40,68	30,22	le 9	le 15	0,35	—1,23	3,83	74,1
MOYENNE . . .	758,31	768,46	745,37	23,09	le 9 novemb.	le 9 février.	11,24	8,92	8,03	74,8

Digitized by Google

Température centigrade de l'air à Furnes, en 1853.

MOIS.	Température moyenne par mois, à midi.	*Maximum* moyen par mois.	*Minimum* moyen par mois.	Température moyenne par mois.	Variation diurne moyenne.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	Moyenne par mois.	Variation mensuelle par mois.	DATE du *maximum* absolu.	DATE du *minimum* absolu.
Janvier	7°14	8°32	4°66	6°49	3°66	11°9	— 0°7	5°60	12°6	le 13	le 26
Février	1,57	3,06	— 0,93	1,06	3,99	7,5	— 6,4	0,55	13,9	le 1	le 20
Mars	5,16	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Avril	10,41	12,50	5,80	9,15	6,70	15,8	2,7	9,25	13,1	le 6	le 14
Mai	14,67	17,44	8,14	12,79	9,30	23,4	1,9	12,65	21,5	le 25	le 8
Juin	19,00	20,68	11,45	16,06	9,23	27,8	7,6	17,70	20,2	le 13	le 6
Juillet	19,90	22,91	13,38	18,14	9,53	28,0	11,1	19,55	16,9	le 10	2 et 24
Août	19,78	21,66	13,20	17,43	8,46	26,8	10,5	18,65	16,3	le 21	6, 7 et 8
Septembre	16,97	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Octobre	13,84	15,37	8,93	12,15	6,44	20,1	4,0	12,05	16,1	le 23	le 4
Novembre	6,43	8,20	3,66	5,93	4,54	15,1	— 1,8	6,65	16,9	le 4	le 24
Décembre	—0,03	2,54	— 3,66	—0,56	6,20	10,6	—12,3	— 0,85	22,9	le 31	le 18
L'année . . .	11,24	13,06	6,27	9,66	6,79	18,54	1,37	9,96	17,17	10 juill.	18 déc.

Quantité d'eau tombée, nombre de jours de pluie, de grêle, etc., et sérénité du ciel, à Furnes, en 1853.

MOIS.	Quantité d'eau recueillie, en millim.	Nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau.	NOMBRE DE JOURS DE								Sérénité du ciel à midi.
			Pluie.	Grêle.	Neige.	Gelée.	Tonnerre.	Brouillard.	Ciel entièrem^t couvert.	Ciel sans nuages.	
Janvier	mm. 81,68	25	17	1	2	3	0	2	4	0	1,5
Février	69,23	20	6	2	16	14	1	0	11	0	2,0
Mars	57,17	17	5	0	8	8	0	0	5	0	4,7
Avril	58,66	20	11	1	0	11	0	1	1	0	3,0
Mai	45,71	10	9	0	0	3	1	0	1	0	4,8
Juin	67,48	10	14	0	0	0	0	2	7	0	3,8
Juillet	44,06	17	14	0	0	0	0	0	1	0	4,7
Août	55,89	18	7	0	0	0	0	0	2	0	5,0
Septembre	78,04	23	14	0	0	0	0	3	5	0	3,7
Octobre	73,71	10?	10	0	0	1	0	0	3	1	4,5
Novembre	10,95	5	1	0	0	19	0	4	7	4	5,2
Décembre	68,28	13?	2	0	11	30	0	1	11	4	4,9
L'année . . .	710,86	188?	110	4	37	89	2	13	58	9	4,0

Nombre d'indications de chaque vent à Furnes, en 1853.

(D'après la direction de la girouette, observée à midi.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.	TOTAL.
Janvier	1	1	1	2	1	0	1	0	6	4	5	3	1	3	0	2	31
Février	1	3	3	1	5	1	0	0	2	0	2	1	3	2	3	0	27
Mars	0	2	1	4	6	1	1	1	4	3	4	0	1	0	1	2	31
Avril	1	0	1	0	0	2	0	0	0	1	3	3	8	2	5	2	28
Mai	0	4	5	1	2	1	1	0	1	0	0	0	2	1	5	2	25
Juin	0	0	4	0	2	0	2	1	0	0	4	2	10	1	1	2	29
Juillet	1	1	1	1	0	0	0	0	2	4	5	1	6	9	0	0	31
Août	8	5	1	0	0	0	0	0	2	2	3	2	1	1	0	2	27
Septembre	0	3	3	0	0	1	0	0	0	1	4	5	5	3	3	0	28
Octobre	1	1	0	0	0	0	6	6	8	2	1	3	1	1	1	0	31
Novembre	0	1	1	0	3	6	3	6	4	1	0	0	3	1	0	1	30
Décembre	2	7	2	1	4	0	10	1	2	0	0	0	0	1	0	1	31
TOTAL . . .	15	28	23	10	23	12	24	15	31	18	31	20	41	25	19	14	349

Nombre d'indications de la force du vent à Furnes, en 1853.

(Estimée à midi, par les chiffres 0 à 5.)

MOIS.	0	0-1	1	1-2	2	2-3	3	3-4	4	4-5	5	TOTAL.
Janvier	0	12	8	1	4	1	4	1	0	0	0	31
Février	0	8	8	2	2	2	5	0	0	0	0	27
Mars	0	8	11	6	4	1	0	1	0	0	0	31
Avril	0	2	3	6	4	6	4	0	2	0	1	28
Mai	0	6	4	6	2	5	0	1	0	1	0	25
Juin	2	2	8	3	6	0	2	1	5	0	0	29
Juillet	1	4	9	0	11	0	5	0	1	0	0	31
Août	4	0	12	0	6	0	3	0	2	0	0	27
Septembre	0	4	6	3	7	1	3	1	2	0	1	28
Octobre	3	0	11	0	9	0	5	0	3	0	0	31
Novembre	5	1	16	0	7	0	1	0	0	0	0	30
Décembre	7	0	12	0	6	0	4	0	2	0	0	31
TOTAL	22	47	108	27	68	16	36	5	17	1	2	349

Digitized by Google

RÉSUMÉ

Des observations météorologiques, faites à Tirlemont, en 1853,

Par M. VANDEN BERGHE, professeur de physique à l'École d'agriculture.

Les résumés annuels ont été relevés, comme l'année précédente, à l'Observatoire de Bruxelles.

Pression atmosphérique. — Le baromètre construit par Ed. Sacré, porte le n° 4; il est suspendu librement entre les deux fenêtres d'une chambre, exposée à l'Est, où l'on ne fait jamais de feu. Ses indications exigent une correction de + 1^{mm},15 pour exprimer des hauteurs absolues; les nombres donnés dans le tableau ont subi cette correction. Il a été tenu également compte d'une erreur constante de lecture faite pendant les neuf premiers mois.

D'après le Nivellement général du royaume, le talon ménagé dans l'encadrement inférieur de la pierre de repaire, scellée sur la façade principale du bureau des recettes de la station du chemin de fer, se trouve à 59 mètres au-dessus de la *basse mer moyenne* des vives eaux d'Ostende, formant le zéro du port, soit 56^{m},58 au-dessus de la *mer moyenne* (voyez pages 7 et 8). Or, la hauteur de la cuvette du baromètre pouvant être fixée, par estimation, d'après le cours de la Gette qui relie les deux points, à 12 mètres au-dessous de la station, on obtient pour altitude 44^{m},6 environ.

Température. — Le thermométrographe de Sacré, n° 3, se trouve dans la même chambre que le baromètre, mais à l'extérieur de la fenêtre, contre la paroi exposée au Nord. En 1852, une planchette le séparait de la muraille; mais l'installation de cet instrument était évidemment mauvaise, car il fournissait en été des températures trop élevées. « Le thermométrographe, nous écrit, à ce propos, M. Vanden Berghe, n'est abrité contre le rayonnement du soleil et des murs qu'à partir du milieu de mai 1853, ainsi que vous l'avez deviné d'après les résultats de mes observations. La case où se trouve maintenant l'instrument, est formée de planches de bois, disposées de manière à intercepter tout rayonnement, et à permettre la circulation de l'air, tout en empêchant la pluie de pénétrer à l'intérieur. La case est blanchie en dehors, noircie en dedans. Aux trois mois de mai, juin et juillet, un mince faisceau de rayons solaires pénétrait encore à l'intérieur, vers 11 heures, pendant une demi-heure environ, et a pu produire une petite erreur pour la lecture faite à midi; je ne crois pas

Digitized by Google

cependant qu'elle dépasse un demi-degré. Pendant les mois d'août et septembre, cette petite erreur n'existait plus, le soleil ne donnant plus directement sur le thermomètre. Ce rayonnement n'aura plus lieu non plus par la suite. »

Une autre cause est venue augmenter encore l'erreur dans le même sens. D'après quinze comparaisons faites, en juillet 1851, avec le thermomètre de Bruxelles, vers le 18^{me} degré de l'échelle, nous avions adopté pour correction de l'instrument + 0°,2. Plongé dans la glace fondante, en novembre de la même année, il a donné, au contraire, une correction négative, — 0°,6, et M. Vanden Berghe a obtenu presque le même nombre, — 0°,7, en janvier 1853. Au mois de novembre suivant, cette correction s'était élevée à — 1°,0, et depuis, le zéro semble continuer à se déplacer progressivement, car la même opération, renouvelée en novembre 1854, a donné pour correction — 1°,4. D'après cela, nous avons diminué de 0°,7 les températures du premier trimestre de 1853, et augmenté successivement cette correction d'un dixième pour chacun des trimestres suivants.

Quant aux observations de 1852, elles doivent, d'après cela, être diminuées de 8 à 9 dixièmes de degré.

Humidité. — Des observations ont été faites au psychromètre d'August pendant le dernier trimestre de 1853; la tension de la vapeur d'eau et l'humidité relative ont été calculées à l'aide des tables données d'après Stierlin, dans l'*Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles.*

Pluie et neige. — « A partir de 1853, écrit M. Vanden Berghe, j'ai tenu compte, autant que possible, de l'évaporation, chaque fois que j'avais tardé pour aller recueillir l'eau, et je crois qu'à dater de cette époque, l'erreur provenant de cette cause n'est pas sensible. » Cependant, la quantité d'eau recueillie cette année nous paraît faible, comparativement aux autres stations.

N. B. Les observations ont manqué les 13 et 19 avril, le 3 juin, et du 13 au 16 juin, à 9 h. m.; le 10 juillet, à 9 h. et à midi; les 5, 8 et 10 août, et le 18 octobre, à 9 h. m.; le 29 octobre, à midi; les 17 et 24 novembre, à 9 h. m. Pour les moyennes barométriques et thermométriques, nous avons suppléé à ces lacunes en réduisant les observations de Bruxelles à la station de Tirlemont.

Pendant les vacances, du 23 mars au 11 avril et du 16 août au 15 octobre, les observations ont été faites par le concierge de l'école, initié aux observations, excepté du 10 au 15 septembre, six jours pendant lesquels elles ont été recueillies par M. Hillet, le fils du jardinier, que M. Vanden Berghe croit du reste observateur exact. Les indications du vent et de la sérénité du ciel ont manqué, toutefois, pendant les deux périodes du 23 mars au 11 avril et du 16 au 29 août. En outre, le vent, d'après les nuages, n'a été annoté que rarement pendant les deux derniers mois de l'année.

Digitized by Google

Pression atmosphérique à Tirlemont, en 1853.

MOIS.	HAUTEURS MOY. DU BAROM. par mois. 9 h. du matin.	HAUTEURS MOY. DU BAROM. par mois. Midi.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	VARIATION mensuelle.	DATE du *maximum*.	DATE du *minimum*.
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.		
Janvier	753,71	753,34	766,37	735,51	30,86	le 1er	le 17
Février	49,59	49,38	64,73	35,15	29,58	le 1er	le 9
Mars	58,85	58,18	68,33	47,38	20,95	le 12	le 2
Avril	55,29	55,16	65,05	39,90	25,15	le 9	le 25
Mai	55,84	55,56	62,53	43,53	19,00	le 11	le 8
Juin	55,71	55,04	61,26	48,35	12,91	le 17	le 24
Juillet	57,79	57,75	65,33	47,15	18,18	le 3	le 15
Août	58,35	57,94	66,37	47,47	18,90	le 10	le 27
Septembre	58,33	58,69	66,71	44,49	22,22	le 5	le 26
Octobre	53,98	54,22	65,20	38,10	27,10	le 23	le 20
Novembre	62,44	62,10	71,12	50,78	20,34	le 9	le 16
Décembre	57,31	56,73	67,56	37,14	30,42	le 9	le 15
MOYENNE	756,43	758,18	765,88	742,91	22,97	le 9 nov.	le 9 fév.

Température centigrade à Tirlemont, en 1853.

MOIS.	MOYENNE PAR MOIS. 9 h. du m.	MOYENNE PAR MOIS. Midi.	*Maximum* moyen par mois.	*Minimum* moyen par mois.	TEMPÉRAT. moy. par mois.	VARIATION diurne moyenne.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	VARIATION men-suelle.	DATE du *maximum* absolu.	DATE du *minimum* absolu.
Janvier	4°,40	6°,01	7°,07	3°,09	5°,08	3°,98	10°,1	− 1°,8	11,9	10 et 12	le 27
Février	−0,33	1,37	2,85	−1,99	0,43	4,84	6,3	− 7,8	14,1	le 1er	le 19
Mars	1,83	3,95	5,55	−0,19	2,63	5,84	14,2	−10,8	25,0	le 31	le 2
Avril	9,05	10,58	12,50	4,52	8,51	7,98	17,2	− 0,5	17,7	le 29	le 13
Mai	14,25	15,43	17,39	8,17	12,78	9,22	25,6	1,3	24,3	le 26	le 11
Juin	18,22	19,06	21,32	12,56	16,94	8,76	28,2	7,8	20,4	le 19	le 4
Juillet	20,74	21,38	23,18	14,53	18,85	8,65	31,0	9,1	21,9	le 9	le 2
Août	18,28	19,68	21,44	13,49	17,46	7,95	26,1	9,4	16,7	le 22	le 29
Septembre	15,02	16,29	17,86	10,82	14,34	7,04	23,5	5,6	17,9	le 13	le 27
Octobre	10,34	12,75	13,94	7,78	10,86	6,16	17,3	3,3	14,0	le 28	le 31
Novembre	2,23	4,64	6,14	1,13	3,63	5,01	13,8	− 3,5	17,3	le 2	le 23
Décembre	−4,24	2,27	−0,56	−5,77	−3,16	5,21	4,0	−16,3	20,3	le 4	le 26
MOYENNE	9,15	11,12	12,39	5,68	9,03	6,72	18,1	− 0,4	18,5	le 9 juil.	le 26 déc.

Digitized by Google

Psychromètre d'August à Tirlemont, en 1853.

MOIS.	9 H. DU MATIN.		MIDI.		TENSION DE LA VAPEUR D'EAU contenue dans l'air.		HUMIDITÉ RELATIVE DE L'AIR.	
	Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	Thermomètre sec.	Thermomètre humide.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.
Janvier	»	»	»	»	»	»	»	»
Février	»	»	»	»	»	»	»	»
Mars	»	»	»	»	»	»	»	»
Avril	»	»	»	»	»	»	»	»
Mai	»	»	»	»	»	»	»	»
Juin	»	»	»	»	»	»	»	»
Juillet	»	»	»	»	»	»	»	»
Août	»	»	»	»	»	»	»	»
Septembre	»	»	»	»	»	»	»	»
Octobre	11°,01	9°,96	13°,38	11°,41	mm. 8,77	mm. 9,25	87,1	79,3
Novembre	2,41	2,01	4,87	4,01	5,51	6,02	93,5	87,2
Décembre	−4,24	−4,49	−2,36	−2,84	3,65	3,96	94,6	91,5
L'année	»	»	»	»	»	»	»	»

Quantité de pluie et de neige; nombre de jours de pluie, de grêle, de neige, etc., et sérénité du ciel, à Tirlemont, en 1853.

MOIS.	Quantité de pluie en millim.	Quantité de neige en millim.	Quantité d'eau recueillie en millim.	Nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau.	NOMBRE DE JOURS DE								SÉRÉNITÉ DU CIEL.		
					Pluie.	Grêle.	Neige.	Gelée.	Tonner.	Brouill.	Ciel entièrement couvert.	Ciel sans nuages.	9 heures du matin.	Midi.	Moyenne.
Janvier	mm. 59,05	mm. »	mm. 59,05	5	10	0	0	5	0	6	15	2	2,3	2,3	2,3
Février	34,74	24,45	59,19	12	10	0	8	24	0	6	19	4	1,9	2,9	2,4
Mars	4,20	7,00	11,20	7	8	5	10	13	0	7	8	13	7,6	7,8	7,7
Avril	65,41	»	65,41	9	25	0	0	2	0	5	24	2	1,5	2,0	1,8
Mai	82,80	3,00	85,80	5	10	2	4	0	2	3	8	8	4,5	4,6	4,6
Juin	63,76	»	63,76	6	14	2	0	0	2	3	4	8	3,8	3,7	3,8
Juillet	29,29	»	29,29	6	15	0	0	0	3	4	1	2	4,9	4,0	4,5
Août	69,86	»	69,86	5	13	0	0	0	4	1	1	5	5,5	3,9	4,7
Septembre	83,89	»	83,89	10	19	0	0	0	2	4	5	8	4,3	3,7	4,0
Octobre	31,07	»	31,07	9	10	1	0	0	1	2	8	8	4,5	4,4	4,5
Novembre	3,18	2,04	5,22	2	3	0	1	9	0	15	11	3	2,5	4,7	3,6
Décembre	2,80	2,55	5,35	2	1	1	8	28	0	4	13	5	3,7	4,5	4,1
L'année	530,05	39,04	569,09	78	138	11	31	81	14	60	117	68	3,9	4,0	4,0

Digitized by Google

Nombre d'indications de chaque vent à Tirlemont, en 1853.

(D'après la direction des nuages, observée à 9 h. du matin et à midi.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.	TOTAL.
Janvier	2	0	1	0	0	0	0	0	3	9	11	4	3	0	1	1	35
Février	2	0	2	0	4	0	0	0	0	0	0	0	5	0	3	0	16
Mars	7	0	5	0	3	0	2	0	6	0	12	0	5	0	1	0	41
Avril	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	6	1	3	2	18
Mai	4	1	1	0	2	0	2	1	2	0	3	1	0	0	0	3	20
Juin	9	0	0	0	0	0	1	0	1	5	3	2	3	0	2	2	28
Juillet	10	5	19	0	2	0	0	0	2	2	3	2	0	0	4	0	49
Août	10	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	16
Septembre	2	6	2	4	0	0	1	1	3	9	1	0	4	4	2	2	41
Octobre	0	0	0	0	0	0	0	0	5	2	8	3	4	2	1	1	26
Novembre	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	8
Décembre	0	0	0	0	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	5
TOTAL	52	13	31	4	14	1	6	3	24	28	47	13	31	7	18	11	303

Nombre d'indications de chaque vent à Tirlemont, en 1853.

(D'après la direction de la girouette, observée à 9 h. du matin et à midi.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.	TOTAL.
Janvier	7	0	0	0	0	0	0	0	12	15	10	4	8	1	1	4	62
Février	13	1	0	1	1	0	0	0	5	3	4	1	11	1	8	7	56
Mars	9	0	9	0	2	0	2	0	2	0	13	0	6	0	1	0	44
Avril	4	2	1	1	0	0	0	0	3	3	3	3	9	2	3	2	36
Mai	16	8	6	0	3	0	3	0	2	3	4	3	2	2	2	8	62
Juin	17	0	0	0	0	0	0	0	1	7	6	3	9	0	8	4	55
Juillet	3	0	0	0	0	0	0	0	11	16	15	8	8	0	1	0	62
Août	13	3	1	0	0	0	0	0	0	1	6	0	4	0	1	5	34
Septembre	8	11	0	0	0	0	1	0	0	21	5	0	4	5	2	5	60
Octobre	1	0	0	0	0	0	3	2	16	12	13	1	9	2	0	0	59
Novembre	12	1	0	0	0	0	0	1	16	6	4	1	2	1	12	2	58
Décembre	16	4	3	1	2	0	1	0	14	5	3	3	7	1	1	1	62
TOTAL	119	30	20	2	8	0	10	3	82	92	84	27	79	15	40	38	650

Digitized by Google

Nombre d'indications de la vitesse des nuages à Tirlemont, en 1853.

(Estimée par les chiffres 0 à 5.)

MOIS.	0		1		2		3		4		5		TOTAL.	
	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.
Janvier	15	14	8	8	5	4	3	6	1	0	0	0	32	32
Février	21	18	3	4	2	4	1	1	0	1	0	0	27	28
Mars	1	0	13	10	5	5	1	6	0	0	1	0	21	21
Avril	8	9	5	8	2	2	1	0	0	0	0	0	16	19
Mai	17	14	7	9	0	1	1	2	0	0	0	0	25	26
Juin	10	8	6	13	4	4	0	1	0	0	0	0	20	26
Juillet	6	5	17	21	6	3	1	0	0	0	0	0	30	29
Août	3	8	5	6	2	1	0	0	0	0	0	0	10	15
Septembre	6	6	7	16	5	3	2	2	2	1	0	0	22	28
Octobre	9	5	7	15	1	3	0	0	0	0	0	0	17	23
Novembre	5	8	4	3	0	1	0	0	0	0	0	0	9	12
Décembre	2	0	0	2	0	3	0	0	0	0	0	0	2	5
TOTAL.	103	95	82	115	32	34	10	18	3	2	1	0	231	264

Nombre d'indications de la force du vent à Tirlemont, en 1853.

(Estimée par les chiffres 0 à 5.)

MOIS.	0		1		2		3		4		5		TOTAL.	
	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.
Janvier	14	16	13	12	3	2	1	1	0	0	0	0	31	31
Février	17	11	8	11	1	4	2	1	0	1	0	0	28	28
Mars	0	0	13	7	5	10	4	5	0	0	0	0	22	22
Avril	2	4	9	12	4	2	2	0	0	1	0	0	17	19
Mai	3	3	21	14	3	9	4	5	0	0	0	0	31	31
Juin	0	0	23	23	2	5	0	2	0	0	0	0	25	30
Juillet	2	1	18	17	7	6	4	5	0	1	0	1	31	31
Août	5	10	7	6	3	1	1	0	0	0	0	0	16	17
Septembre	8	8	11	12	5	4	3	2	2	4	1	0	30	30
Octobre	14	10	13	16	2	3	1	1	0	0	0	0	30	30
Novembre	20	22	8	8	0	0	0	0	0	0	0	0	28	30
Décembre	15	15	9	12	6	3	0	0	0	1	1	0	31	31
TOTAL.	100	100	153	150	41	49	22	22	2	8	2	1	320	330

Digitized by Google

RÉSUMÉ

Des observations météorologiques faites à Verviers, en 1853,

Par M. PEOCAS LE JEUNE, professeur à l'École d'agriculture.

Les tableaux résumés ont été relevés et calculés à l'Observatoire.

Pression atmosphérique. — Construit par Sacré, d'après le système d'Ernst, il porte le nº 5. Pour exprimer des hauteurs absolues, les lectures ont été augmentées de + $1^{mm},01$. La différence de hauteur entre la cuvette et la station du chemin de fer n'est pas connue. La pierre de repaire, scellée sur la façade ouest du pavillon, à l'entrée de la gare couverte de la station, accuse 167 mètres au-dessus de la *basse mer moyenne* des vives eaux d'Ostende, soit $164^{m},58$ au-dessus de la *mer moyenne* (voyez pages 7 et 8).

Température. — D'après les comparaisons faites à l'Observatoire en avril 1852, les indications ont subi une correction de + $0^{o},3$. La position du zéro n'a pas été vérifiée depuis.

Pluie et neige. — On a distingué cette année l'eau provenant de la pluie ou de la neige.

N. B. Les observations n'ont manqué que le 2 et le 15 mai; mais quelquefois elles ont dû être confiées à des élèves, notamment pendant tout le mois de juillet. Les hauteurs barométriques des 3, 7 et 29 de ce mois, à 9 h. du matin, ont été rejetées : trois fois, on avait inscrit le même nombre $776^{mm},14$, pression impossible à Verviers et qui n'a été atteinte que bien rarement dans les parties les moins élevées du pays.

Pression atmosphérique à Verviers, en 1853.

MOIS.	HAUTEURS MOY. DU BAROM. par mois.		*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	VARIATION mensuelle.	DATE du *maximum.*	DATE du *minimum.*
	9 h. du matin.	Midi.					
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.		
Janvier	742,84	742,94	755,54	725,34	30,20	le 1er	le 17
Février	37,58	37,49	53,16	23,10	30,06	le 1er	le 10
Mars	46,53	46,39	55,57	35,78	19,79	le 10	le 2
Avril	44,34	44,03	51,00	31,57	19,43	le 9	le 25
Mai	44,58	44,33	50,83	29,90	20,93	le 11	le 8
Juin	44,69	44,58	50,25	36,58	13,67	le 17	le 23
Juillet	47,13	46,81	51,36	36,92	14,44	le 5	le 14
Août	47,48	47,89	50,40	37,73	12,67	le 10	le 27
Septembre	47,76	47,36	57,12	33,84	23,28	le 4	le 26
Octobre	43,33	43,41	59,15	29,28	29,87	le 4	le 20
Novembre	51,17	50,83	59,39	39,58	19,81	le 9	le 16
Décembre	45,96	45,81	55,66	25,94	29,72	le 9	le 15
MOYENNE	745,28	745,15	754,12	732,13	21,99	le 9 novemb.	le 10 février.

Température centigrade à Verviers, en 1853.

MOIS.	MOYENNE PAR MOIS. 9 h. du m.	Midi.	*Maximum* moyen par mois.	*Minimum* moyen par mois.	TEMPÉRAT. moy. par mois.	VARIATION diurne moyenne.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	VARIATION men-suelle.	DATE du maximum absolu.	DATE du minimum absolu.
Janvier	5°18	6°88	8°00	3°56	5°78	4°44	10°8	− 1°0	11°8	le 12	le 27
Février	−0,17	1,45	2,94	−2,84	0,05	5,78	6,5	−12,2	18,7	le 10	le 22
Mars	0,00	2,99	5,41	−3,01	1,20	8,42	13,3	−17,5	30,8	13 et 14	le 2
Avril	7,90	9,26	11,05	4,65	7,80	6,40	17,8	− 0,3	18,1	le 30	le 14
Mai	13,22	15,13	17,78	.7,43	12,60	10,35	26,3	0,9	25,4	le 26	le 11
Juin	16,86	18,72	21,42	12,27	16,84	9,15	29,9	8,2	21,7	le 29	le 4
Juillet	19,19	21,62	24,07	14,49	19,28	9,58	33,8	11,5	22,3	le 10	2 et 26
Août	17,48	20,11	22,61	12,36	17,48	10,25	29,2	6,7	22,5	le 29	le 29
Septembre	13,37	16,93	18,85	10,43	14,64	8,42	23,3	3,7	19,6	15, 16, 17 et 23	le 18
Octobre	11,22	13,47	14,94	8,23	11,58	6,71	20,1	− 1,3	21,4	le 28	le 4
Novembre	3,10	6,44	8,64	0,52	4,58	8,12	15,1	− 4,4	19,5	le 9	le 9
Décembre	−1,03	0,73	2,63	−4,33	−0,85	6,96	8,3	−19,5	27,8	le 2	le 26
MOYENNE.	8,86	11,14	13,19	5,31	9,25	7,88	19,53	− 2,10	21,63	le 10 juil.	le 26 déc.

Quantité de pluie et de neige; nombre de jours de pluie, de grêle, de neige, etc., et sérénité du ciel, à Verviers, en 1853.

MOIS.	Quantité de pluie en millim.	Quantité de neige en millim.	Quantité d'eau recueillie en millim.	Nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau.	NOMBRE DE JOURS DE Pluie.	Grêle.	Neige.	Gelée.	Tonner.	Brouill.	Ciel entièrement couvert.	Ciel sans nuages.	SÉRÉNITÉ DU CIEL. 9 heures du matin.	Midi.	MOYENNE.
	mm.	mm.	mm.												
Janvier	80,93	»	80,93	21	22	2	2	3	0	1	1	0	2,0	1,6	1,8
Février	1,02	44,02	45,04	4	2	1	13	22	0	1	2	0	1,2	1,7	1,4
Mars	12,47	7,13	19,60	14	7	1	14	22	0	2	1	5	4,1	4,4	4,2
Avril	118,45	5,09	123,54	26	27	10	4	2	1	2	0	0	1,6	2,1	1,8
Mai	47,13	3,82	50,05	14	17	4	2	0	2	6	0	0	3,2	3,0	3,1
Juin	141,50	»	141,50	20	20	0	0	0	1	2	0	1	3,4	3,0	3,2
Juillet	63,09	»	63,09	18	18	0	0	0	5	0	0	0	3,4	3,5	3,5
Août	62,25	»	62,25	10	13	0	0	0	3	1	0	0	3,4	3,1	3,3
Septembre	133,05	»	133,05	12	13	0	0	0	1	4	2	0	3,8	3,8	3,8
Octobre	45,00	»	45,00	20	21	0	0	1	1	4	0	1	2,6	3,1	2,8
Novembre	5,09	0,76	5,85	5	5	0	2	16	0	10	0	0	4,8	4,6	4,7
Décembre	0,89	14,07	14,96	8	2	0	12	27	0	0	0	0	3,4	3,5	3,5
ANNÉE	710,87	74,89	785,76	172	167	18	49	93	14	33	6	7	3,1	3,1	3,1

Digitized by Google

Nombre d'indications de chaque vent à Verviers, en 1853.

(D'après la direction des nuages, observée à 9 h. et à midi.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.	TOTAL.
Janvier	0	4	2	0	0	0	0	0	0	22	10	3	6	3	0	0	50
Février	3	5	4	2	1	0	0	0	0	2	4	2	0	0	0	2	25
Mars	11	7	0	0	0	0	0	1	2	5	1	0	0	1	0	2	30
Avril	2	0	0	0	0	0	0	0	1	5	9	0	19	1	8	3	48
Mai	7	12	4	0	0	4	6	0	2	0	2	0	7	2	1	0	47
Juin	2	5	3	1	4	0	0	0	0	5	7	4	11	0	2	0	44
Juillet	1	5	0	0	1	0	1	0	14	2	12	1	13	0	0	0	50
Août	1	5	12	1	0	0	0	1	0	2	17	1	8	3	2	2	55
Septembre	1	3	3	1	0	3	0	4	0	4	10	2	9	8	1	3	52
Octobre	0	0	0	0	0	0	0	2	3	15	13	15	2	0	0	0	50
Novembre	6	1	1	1	3	0	0	1	9	1	1	1	4	0	0	1	30
Décembre	1	0	5	6	1	0	0	0	1	2	3	1	0	1	0	0	21
TOTAL.	35	47	34	12	10	7	7	9	32	65	89	30	79	19	14	13	502

Nombre d'indications de chaque vent à Verviers, en 1853.

(D'après la direction de la girouette, observée à 9 h. et à midi.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.	TOTAL.
Janvier	1	2	2	0	0	0	0	0	13	13	5	4	11	1	0	1	53
Février	6	12	4	1	3	0	0	1	0	11	10	2	0	0	1	1	52
Mars	22	9	1	0	0	0	1	1	16	5	1	0	0	0	1	2	59
Avril	4	1	1	0	2	0	0	0	6	5	11	6	12	0	8	3	59
Mai	11	4	11	1	2	4	1	1	9	0	1	3	9	1	0	0	58
Juin	2	2	8	0	14	0	2	0	1	1	7	3	19	1	0	0	60
Juillet	0	1	0	0	0	0	1	0	24	11	13	6	2	0	0	0	58
Août	2	11	7	1	0	0	0	0	2	12	12	5	2	1	2	3	60
Septembre	1	4	4	0	4	2	1	1	2	6	15	6	0	10	1	3	60
Octobre	0	0	0	0	0	0	0	4	7	10	21	9	8	0	0	0	59
Novembre	3	0	2	1	6	1	0	0	35	3	1	3	4	0	0	1	60
Décembre	0	2	9	5	2	2	1	8	10	8	5	3	1	1	2	0	59
TOTAL.	52	48	49	9	33	9	7	16	125	85	102	50	68	15	15	14	697

Digitized by Google

Nombre d'indications de la vitesse des nuages à Verviers, en 1853.

(Estimées par les chiffres 0 à 5.)

MOIS.	0		1		2		3		4		5		TOTAL.	
	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.
Janvier	4	6	9	8	11	11	1	1	0	0	0	0	25	26
Février	1	5	3	5	4	6	1	2	0	0	0	0	9	18
Mars	1	2	7	11	3	6	0	0	0	0	0	0	11	19
Avril	1	0	8	11	13	12	0	2	0	0	0	0	22	25
Mai	6	9	10	11	4	4	0	0	0	0	0	0	20	24
Juin	2	0	8	13	7	11	2	1	0	0	0	0	19	25
Juillet	2	2	12	14	11	11	3	2	0	0	0	0	28	29
Août	0	0	18	16	8	11	0	2	0	0	0	0	26	29
Septembre	0	1	13	12	8	8	4	5	1	0	0	0	26	26
Octobre	2	0	13	16	7	10	2	1	0	0	0	0	24	27
Novembre	1	3	2	9	8	9	0	0	0	0	0	0	11	21
Décembre	0	1	6	2	4	7	0	0	0	0	0	0	10	10
TOTAL. . . .	20	29	109	128	88	106	13	16	1	0	0	0	231	279

Nombre d'indications de la force du vent à Verviers, en 1853.

(Estimée par les chiffres 0 à 5.)

MOIS.	0		1		2		3		4		5		TOTAL.	
	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.
Janvier	3	3	8	9	13	15	0	1	0	0	0	0	24	28
Février	8	10	6	11	1	2	0	0	1	3	0	0	16	26
Mars	18	13	8	10	1	2	0	2	0	0	0	0	27	27
Avril	8	4	10	8	5	7	3	5	0	4	1	2	27	30
Mai	0	2	7	8	18	13	3	5	0	1	0	0	28	29
Juin	10	16	5	4	7	5	1	3	0	0	0	0	23	28
Juillet	6	4	17	9	3	7	4	7	1	3	0	0	31	30
Août	4	2	8	12	12	4	7	8	0	4	0	0	31	30
Septembre	1	1	18	16	8	4	2	6	0	3	1	0	30	30
Octobre	11	8	13	12	2	5	3	4	0	1	0	0	29	30
Novembre	11	15	10	13	3	1	0	1	0	0	0	0	24	30
Décembre	6	2	14	17	6	7	1	2	1	2	0	0	28	30
TOTAL. . . .	86	80	124	129	79	72	24	44	3	21	2	2	318	348

Digitized by Google

RÉSUMÉ

Des observations météorologiques, faites à la Ferme-École d'Ostin, commune de Warisoulx, près de Namur, en 1853,

PAR M. F. BERTRAND, directeur délégué.

Les résumés annuels ont été relevés et calculés à l'Observatoire de Bruxelles.

Pression atmosphérique. — Le baromètre n° 3, de Sacré, a été placé dans les conditions voulues, et ses indications, pour exprimer des hauteurs absolues, ont subi la correction + 0^{mm},50. Le domaine d'Ostin se trouve à la plus grande altitude de cette contrée, et cependant, en 1852, le baromètre paraît s'être tenu plus haut qu'à Namur, par suite d'une erreur de pointage : au lieu d'affleurer le bord inférieur du vernier, M. Bertrand rendait le plan du bord supérieur de l'anneau curseur tangent au ménisque. Les hauteurs barométriques de 1853 ont subi de ce chef, une correction de —7^{mm},75, déterminée par un grand nombre de lectures : celles observées en 1852 doivent être diminuées de la même quantité.

« Il m'avait toujours semblé naturel, écrit à ce propos M. Bertrand, que mon baromètre restât plus bas que celui de Namur, car je pensais que le plateau sur lequel se trouve Ostin était plus élevé que Namur d'environ 100 mètres, à en juger par la hauteur des rampes qu'il faut gravir pour venir de cette ville, et aussi par la différence de la végétation, qui est constamment retardée à Ostin de 4 à 5 jours.

» Pour en être certain, je me suis rendu à Namur, le 5 août dernier (1854), à 5 heures du soir, muni du baromètre et d'un thermomètre. Voici le résultat de mes observations [1] :

mm.	mm.
h = 754,55	h' = 746,25
T = 19°,50	T' = 17°,50
t = 20°,95	t' = 19°,90

» D'après les tables de M. Oltmanns [2], la différence du niveau entre Namur et Ostin serait de . . . 89^m,17

» D'après la carte officielle de la province de Namur, à l'échelle de 1 à 100,000, par M. Vandermaelen,
l'altitude d'Ostin est de . . . . . 179^m,99
et celle de Namur de . . . . . . 83^m,90 } Différence . . . . 96^m,09

» Enfin, d'après un nivellement exécuté par M. le commissaire voyer de l'arrondissement de Namur,
la différence d'altitude entre S^t-Servais lez-Namur et Ostin est de 87 mètres .
il évalue la différence entre Namur et S^t-Servais à . . 4 ou 5 mètres . } soit en total . . . 92^m environ. »

(1) Les hauteurs barométriques ont été corrigées ici de l'erreur constante de lecture reconnue postérieurement, et dont il a été parlé.
(2) Voyez dans l'*Almanach séculaire de l'Observatoire royal de Bruxelles*, p. 383, ces tables recalculées par M. Mathieu.

Digitized by Google

En admettant que la moyenne de ces trois déterminations représente la différence de niveau entre les deux points, on a pour altitude d'Ostin 177 mètres, celle de la station du chemin de fer, à Namur, étant de 84^{m},58 au-dessus de la *mer moyenne.*

Température. — Le thermométrographe n° 4 se trouve à 3 mètres au-dessus du sol, en dehors d'une fenêtre exposée à l'ENE, et comme il est fixé contre l'embrasure de cette fenêtre, le thermomètre est exposé au NNO. Le lieu n'est pas parfaitement découvert, car, à une vingtaine de pas de distance, il se trouve un massif d'arbres et d'arbustes qui intercepte les vents du N. Des rideaux d'arbres se trouvent également à l'E et au SE. Cet instrument, plongé dans la glace fondante, en novembre 1851, a donné des indications trop basses de 0°,5. Les nombres donnés dans le tableau de 1853 ont subi cette correction; ceux de 1852, n'ayant été corrigés que de + 0°,2, devront être augmentés encore de 0°,3.

Pendant les grands froids de décembre 1853, le thermométrographe n° 4 s'est complétement dérangé : dans la glace fondante, il ne descendait plus au-dessous de + 9°. Pour calculer les températures moyennes de l'année, nous avons pris, pour le mois de décembre qui manquait, les résultats observés à Chimay.

Pluie. — Ce tableau présente une lacune en novembre, la quantité d'eau recueillie pendant ce mois n'ayant pas été indiquée.

Pression atmosphérique à Ostin, en 1853.

MOIS.	Hauteurs moy. du barom. par mois, à midi.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	VARIATION mensuelle.	DATE du *maximum.*	DATE du *minimum.*
	mm.	mm.	mm.	mm.		
Janvier	740,51	751,09	723,70	27,39	le 19	le 17
Février	36,53	51,77	20,93	30,84	le 1er	le 8
Mars	44,91	54,84	34,03	20,82	le 10	le 2
Avril	42,43	51,54	30,69	20,84	le 9	le 25
Mai	43,41	49,21	34,90	14,31	le 13	le 8
Juin	43,81	49,36	36,33	13,03	16 et 17	le 23
Juillet.	45,21	53,80	36,74	17,14	le 3	le 15
Août	46,64	54,71	36,71	18,00	le 10	le 26
Septembre	47,12	56,23	35,87	20,36	le 19	le 25
Octobre	42,35	53,08	31,49	21,59	le 23	le 19
Novembre	49,81	59,28	38,54	20,74	le 9	le 16
Décembre	44,03	54,95	24,98	29,97	le 9	le 15
MOYENNE.	743,90	753,32	732,08	21,25	le 9 nov.	le 8 février.

Digitized by Google

Température centigrade à Ostin, en 1853.

MOIS.	TEMPÉRAT. moy. par mois, à midi.	*Maximum* moyen par mois.	*Minimum* moyen par mois.	TEMPÉRAT. moy. par mois.	VARIATION diurne moyenne.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	VARIATION men-suelle.	DATE du *maximum* absolu.	DATE du *minimum* absolu.
Janvier	5°,77	6°,80	2°,91	4°,85	3°,89	9°,5	− 1°,2	10°,7	le 14	le 26
Février	0,77	2,48	−2,18	0,15	4,66	5,3	−6,8	12,1	1er et 2	le 19
Mars	2,73	4,10	− 2,67	0,71	6,77	10,5	− 9,8	20,3	14 et 15	1er et 2
Avril	9,13	10,79	3,55	7,17	7,24	16,1	0,3	15,8	le 30	le 15
Mai	14,57	16,49	7,05	11,77	9,44	22,7	0,8	21,9	le 26	le 8
Juin	18,78	20,88	11,65	16,26	9,23	26,5	6,0	20,5	le 19	le 4
Juillet	20,72	23,02	13,40	18,21	9,62	30,3	9,5	20,8	le 9	le 2
Août	19,20	20,85	12,30	16,57	8,55	26,6	8,5	18,1	le 21	le 30
Septembre	15,73	17,24	10,98	14,11	6,26	19,5	4,8	14,7	le 13	le 27
Octobre	12,51	13,79	7,37	10,58	6,42	16,5	1,1	15,4	1er et 26	le 4
Novembre	5,54	6,73	1,77	4,25	4,96	12,6	− 3,7	16,3	le 8	le 28
Décembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
L'année	10,26	11,85	4,91	8,38	6,95	16,98	−0,79	17,78	le 9 juil.	»

Quantité de pluie et de neige, nombre de jours de pluie, de grêle, de neige, etc., et sérénité du ciel, à Ostin, en 1853.

MOIS.	Quantité de pluie en millim.	Quantité de neige en millim.	Quantité d'eau recueillie en millim.	Nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau.	NOMBRE DE JOURS DE								Degré de sérénité à midi.
					Pluie.	Grêle.	Neige.	Gelée.	Tonnerre.	Brouill.	Ciel entièrem' couvert.	Ciel sans nuages.	
	mm.	mm.	mm.										
Janvier	72,50	15,59	88,09	16	21	0	2	6	0	4	17	1	2,1
Février	2,42	44,43	46,85	7	2	0	16	22	0	0	18	2	2,6
Mars	14,26	7,00	21,26	4	1	0	7	20	0	2	9	8	4,5
Avril	87,52	8,84	96,36	21	23	0	6	0	0	0	15	0	2,6
Mai	63,97	11,26	75,23	10	12	0	1	0	0	3	7	1	4,9
Juin	83,68	»	83,68	10	13	0	0	0	5	3	7	1	4,4
Juillet	47,20	»	47,20	11	17	0	0	0	3	0	7	0	3,6
Août	94,39	»	94,39	7	12	0	0	0	2	5	5	0	4,4
Septembre	94,70	»	94,70	15	15	0	0	0	0	5	9	3	3,4
Octobre	42,69	»	42,69	9	10	0	0	0	1	2	11	4	4,2
Novembre	?	?	?	?	2	0	1	9	0	13	13	4	4,6
Décembre	»	22,28	22,28	6	0	0	6	2	0	5	16	7	3,7
L'année	603,33	109,40	712,73	116	128	0	39	59	11	42	134	31	3,7

Digitized by Google

Nombre d'indications de chaque vent, à Ostin, en 1853.

(D'après la direction des nuages, observée à midi.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.	TOTAL.
Janvier	0	0	1	0	1	0	0	0	2	4	6	0	6	0	1	0	21
Février	3	0	1	0	2	0	0	0	0	0	1	1	3	0	2	0	13
Mars	6	0	1	1	1	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	13
Avril	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	19	0	3	2	29
Mai	5	2	4	0	6	1	1	1	1	0	2	0	4	0	0	0	27
Juin	4	4	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	11	0	1	1	27
Juillet	0	0	0	0	0	0	7	0	1	0	7	1	16	0	3	1	36
Août	3	0	2	1	1	0	0	0	1	0	4	1	10	6	3	3	35
Septembre	2	0	5	1	1	0	0	1	1	0	1	0	13	1	0	0	26
Octobre	1	0	0	0	0	0	0	0	5	1	5	2	9	0	2	0	25
Novembre	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	3	0	2	1	0	2	12
Décembre	0	0	3	0	1	0	2	0	1	0	0	0	2	1	0	0	10
TOTAL	26	6	17	4	13	2	14	2	19	5	31	7	95	9	15	9	274

Nombre d'indications de chaque vent, à Ostin, en 1853.

(D'après la direction de la girouette, observée à midi.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.	TOTAL.
Janvier	2	1	2	1	0	1	0	0	3	3	9	0	6	2	1	0	31
Février	6	8	5	0	0	0	0	0	0	1	0	1	6	0	0	1	28
Mars	8	4	2	1	4	0	3	0	5	0	2	0	2	0	0	0	31
Avril	6	0	0	0	2	0	0	0	0	0	3	2	13	3	0	1	30
Mai	4	3	6	1	5	1	0	1	2	0	0	0	4	0	1	2	30
Juin	8	2	3	1	2	0	0	0	0	0	1	2	9	0	1	1	30
Juillet	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	4	4	16	2	3	0	31
Août	7	5	1	0	0	0	0	0	0	1	2	1	10	1	2	1	31
Septembre	7	1	1	2	3	0	0	0	0	0	1	0	13	0	1	0	29
Octobre	0	0	0	0	2	1	3	0	6	2	3	4	8	1	1	0	31
Novembre	6	2	2	0	4	2	4	1	2	2	2	0	2	1	0	0	31
Décembre	1	2	6	2	4	1	2	2	2	1	3	0	4	0	1	0	31
TOTAL	55	28	29	8	26	7	12	4	20	10	30	14	93	10	11	6	363

Digitized by Google

Nombre d'indications de la vitesse des nuages à Ostin, en 1853.

(Estimée, à midi, par les chiffres 0 à 5.)

MOIS.	0	0-1	1	1-2	2	2-3	3	3-4	4	4-5	5	TOTAL.
Janvier	4	1	7	0	8	0	5	0	0	0	0	25
Février	12	5	3	0	2	0	2	0	0	0	1	25
Mars	5	5	4	1	2	0	1	0	0	0	0	18
Avril	1	1	15	3	7	2	1	0	0	0	0	30
Mai	4	5	9	2	5	0	4	0	1	0	0	30
Juin	15	2	5	1	5	1	0	0	0	0	0	29
Juillet	0	8	7	0	11	1	2	1	0	0	0	30
Août	2	13	8	1	3	0	4	0	0	0	0	31
Septembre	0	4	7	2	10	0	2	0	1	0	0	26
Octobre	1	11	5	5	3	1	0	0	0	0	0	26
Novembre	2	6	3	0	2	0	1	0	0	0	0	14
Décembre	1	5	1	1	2	0	0	0	1	0	0	11
TOTAL. . . .	47	66	74	16	60	5	22	1	3	0	1	295

Nombre d'indications de la force du vent à Ostin, en 1853.

(Estimée, à midi, par les chiffres 0 à 5.)

MOIS.	0	0-1	1	1-2	2	2-3	3	3-4	4	4-5	5	TOTAL.
Janvier	4	4	4	2	9	1	3	0	1	0	3	31
Février	0	12	9	0	3	0	0	0	2	0	2	28
Mars	0	9	10	2	8	0	2	0	0	0	0	31
Avril	0	3	12	1	4	1	7	0	1	0	1	30
Mai	0	3	7	0	9	5	5	0	1	0	0	30
Juin	1	6	10	1	7	2	2	0	1	0	0	30
Juillet	0	4	7	0	7	0	7	1	4	0	1	31
Août	0	5	10	1	11	0	1	0	3	0	0	31
Septembre	1	6	5	0	9	0	4	0	4	0	1	30
Octobre	0	8	4	4	7	1	5	2	0	0	0	31
Novembre	0	22	7	0	1	0	0	0	0	0	0	30
Décembre	0	11	8	3	4	2	2	0	0	0	1	31
TOTAL. . . .	6	93	93	14	79	12	38	3	17	0	9	364

RÉSUMÉ

Observations météorologiques, faites à Leuze, en 1853,

PAR M. CH. AMAND, professeur de physique à l'École d'agriculture.

Les résumés annuels ont été relevés et calculés à l'Observatoire de Bruxelles.

Pression atmosphérique. — La cuvette du baromètre nº 2, de Sacré, est à 3m,25 au-dessus de la station du chemin de fer, qui, d'après la carte du Nivellement général du royaume, se trouve à 44m,40 au-dessus de la *basse mer moyenne* à Ostende, ou à 41m,98 au-dessus de la *mer moyenne* (voyez pp. 7 et 8). On a donc pour altitude de la cuvette 45m,23. Les indications barométriques ont été corrigées de +1mm,05 pour exprimer des hauteurs absolues.

Température. — Les nombres ont subi une correction de + 0°,3. Trois vérifications du zéro du thermométrographe nº 2, faites en février et mars 1853, ont donné à très-peu près le même nombre. Cet instrument a été brisé le 15 juillet, et depuis lors, les observations de température ont été faites à l'aide d'un thermomètre ordinaire appartenant au cabinet de physique de l'école, mais qui ne donne pas les extrêmes de température. Les moyennes données pour le mois de juillet, à 9 heures et à midi, se rapportent donc au mois entier, mais les *maxima* et *minima* ne comprennent que la première quinzaine.

Pression atmosphérique à Leuze, en 1853.

MOIS.	HAUTEURS MOY. DU BAROM. par mois. 9 h. du matin.	Midi.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	VARIATION mensuelle.	DATE du *maximum*.	DATE du *minimum*.
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.		
Janvier	753,37	752,85	765,45	734,85	30,60	le 1	le 17
Février	48,89	48,54	64,39	33,75	30,64	le 1	le 9
Mars	57,50	57,19	65,98	44,58	21,40	le 10	le 2
Avril	55,05	55,07	64,18	39,13	25,05	le 9	le 25
Mai	55,40	55,20	61,82	44,95	16,87	le 11	le 8
Juin	55,73	55,43	61,36	47,95	13,41	le 17	le 23
Juillet	57,53	57,30	65,83	45,89	19,94	le 3	le 14
Août	57,89	58,09	68,84	45,44	23,04	le 31	le 27
Septembre	57,68	57,68	67,45	45,27	22,18	le 5	le 26
Octobre	53,35	53,09	64,28	40,03	24,25	le 23	le 20
Novembre	61,84	61,46	71,52	50,39	21,13	le 9	le 16
Décembre	56,62	56,18	67,10	37,39	29,71	le 9	le 13
MOYENNE	755,90	755,67	765,65	742,47	23,81	le 9 nov.	le 9 fév.

Digitized by Google

Température centigrade à Leuze, en 1853.

MOIS.	MOYENNE PAR MOIS.		*Maximum* moyen par mois.	*Minimum* moyen par mois.	TEMPÉRAT. moy. par mois.	VARIATION diurne moyenne.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	VARIATION men-suelle.	DATE du *maximum* absolu.	DATE du *minimum* absolu.
	9 h. du m.	Midi.									
Janvier	5°,22	6°,45	7°,72	4°,42	6°,07	3°,30	10°,9	0°,2	10°,7	le 13	le 26
Février	0,29	1,87	4,18	−0,82	1,68	5,10	9,7	−6,8	16,5	le 10	le 20
Mars	1,18	4,39	8,42	−0,73	3,84	9,15	19,5	−5,7	25,2	le 14	le 1
Avril	7,96	10,03	19,92	5,44	9,18	7,48	19,1	0,4	18,7	le 1	le 14
Mai	12,09	15,67	20,43	8,54	14,48	11,89	31,0	1,6	29,4	le 26	le 8
Juin	16,36	19,41	23,64	12,35	17,99	11,29	33,2	7,7	25,5	le 29	le 6
Juillet.	17,45	20,00	24,91	14,18	19,54 (1)	10,73	36,5	10,4	26,1	le 9	le 3
Août	16,80	19,68	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Septembre	14,20	16,92	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Octobre	11,25	13,93	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Novembre	3,80	6,43	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Décembre	− 3,05	−1,02	»	»	»	»	»	»	»	»	»
MOYENNE.	8,63	11,15	»	»	»	»	»	»	»	»	»

(1) En juillet les nombres relatifs aux températures extrêmes ne se rapportent qu'à la première quinzaine.

Quantité de pluie et de neige, nombre de jours de pluie, de grêle, de neige, etc., et sérénité du ciel à Leuze, en 1853.

MOIS.	Quantité de pluie en millim.	Quantité de neige en millim.	Quantité d'eau recueillie en millim.	Nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau.	NOMBRE DE JOURS DE								SÉRÉNITÉ DU CIEL.		
					Pluie.	Grêle.	Neige.	Gelée.	Tonner.	Brouill.	Ciel entièrem' couvert.	Ciel sans nuages.	9 heures du matin.	Midi.	MOYENNE.
	mm.	mm.	mm.												
Janvier	79,22	7,58	86,80	23	22	0	1	0	0	5	15	0	1,2	1,1	1,2
Février	»	45,03	45,03	14	1	0	14	17	1	2	11	0	1,6	1,6	1,6
Mars	12,14	5,60	17,74	10	6	1	9	20	0	6	9	4	7	4,4	4,1
Avril	78,56	0,19	78,75	23	22	4	1	0	0	0	1	0	1,5	1,0	1,3
Mai	39,52	13,55	53,07	16	15	0	1	0	3	3	8	0	4,3	3,3	3,8
Juin	74,41	»	74,41	13	14	2	0	0	4	3	5	0	3,0	3,1	3,0
Juillet.	108,38	»	108,38	18	17	1	0	0	8	2	5	0	2,8	2,1	2,5
Août	53,08	»	53,08	14	16	1	0	0	4	2	6	0	3,1	2,6	2,8
Septembre	81,27	»	81,27	16	13	0	0	0	1	4	5	0	2,5	2,5	2,5
Octobre	71,36	»	71,36	18	14	1	0	1	2	4	5	0	3,1	2,8	3,0
Novembre	9,41	6,86	16,27	7	6	0	1	9	0	13	7	2	2,3	3,8	3,0
Décembre	2,61	24,68	27,29	8	2	0	6	28	0	7	14	3	3,2	3,2	3,2
ANNÉE	609,96	103,49	713,45	180	148	10	33	75	23	51	91	9	2,7	2,6	2,7

Nombre d'indications de chaque vent à Leuze, en 1853.

(D'après la direction des nuages, observée à 9 h. et à midi.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.	TOTAL.
Janvier	5	0	4	2	3	3	1	0	9	11	16	7	1	4	1	5	72
Février	6	6	10	1	3	0	5	0	5	3	7	4	1	0	5	6	62
Mars	4	8	14	1	4	1	4	0	10	6	10	2	0	0	1	0	65
Avril	4	4	1	0	2	0	0	0	0	5	18	7	10	0	8	2	61
Mai	4	5	15	4	7	1	4	1	1	2	6	4	0	4	4	2	64
Juin	6	4	3	0	2	1	3	1	5	2	16	4	2	1	6	5	61
Juillet	0	0	3	1	0	1	0	0	8	7	23	7	10	6	2	0	68
Août	5	5	13	0	4	0	3	0	3	1	20	2	5	1	2	2	66
Septembre	8	1	9	0	6	0	3	0	6	1	16	1	2	0	8	0	61
Octobre	0	0	1	0	0	0	6	10	11	5	18	1	5	2	5	0	64
Novembre	4	2	8	2	3	3	0	4	7	6	10	2	0	0	7	4	62
Décembre	2	3	18	5	6	1	7	2	2	1	9	2	0	0	3	1	62
TOTAL.	48	38	99	16	40	11	36	18	67	59	169	43	36	18	52	27	768

Nombre d'indications de la vitesse des nuages à Leuze, en 1853.

(Estimée par les chiffres 0 à 5.)

MOIS.	0		0-5		1		1-5		2		2-5		3		3-5		4		4-5		5		TOTAL.	
	9h.	12h.	9h.	12h.	9h.	12h.	9h.	12h.	9h.	12h.	9h.	12h.	9h.	12h.	9h.	12h.	9h.	12h.	9h.	12h.	9h.	12h	9 h.	12h.
Janvier	1	3	6	4	8	3	3	5	6	3	1	4	3	5	0	1	3	3	0	0	0	0	31	31
Février	1	0	15	8	3	5	5	5	2	5	0	2	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	28	28
Mars	3	0	8	5	7	12	4	5	7	6	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	31	31
Avril	1	0	3	5	3	2	4	1	5	3	3	7	9	9	1	2	0	0	0	0	1	1	30	30
Mai	2	0	4	2	6	4	3	5	3	5	7	7	5	7	0	1	1	0	0	0	0	0	31	31
Juin	1	0	5	2	6	10	1	3	8	7	5	1	4	6	0	1	0	0	0	0	0	0	30	30
Juillet	1	1	3	5	5	3	3	3	4	4	6	6	8	8	1	1	0	0	0	0	0	0	31	31
Août	0	0	4	6	11	10	4	3	7	3	2	5	1	1	1	2	0	0	1	1	0	0	31	31
Septembre	0	0	11	8	5	7	5	4	2	4	2	1	2	4	1	2	2	0	0	0	0	0	30	30
Octobre	1	3	5	3	4	5	5	3	9	3	7	10	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	31	31
Novembre	8	4	13	8	3	10	3	1	3	6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	30	30
Décembre	4	4	7	11	9	5	3	2	4	5	2	1	1	2	0	0	1	0	0	1	0	0	31	31
TOTAL.	23	15	84	67	70	76	43	40	60	54	35	45	35	47	4	12	9	5	1	3	1	1	365	365

Digitized by Google

RÉSUMÉ

Des observations météorologiques, faites à Chimay, en 1853.

Par M. F. DE PERRE, professeur à l'École d'agriculture.

Les résumés annuels ont été relevés et calculés à l'Observatoire de Bruxelles.

Pression atmosphérique. — Les indications du baromètre n° 6, de Sacré, ont été augmentées de $1^{mm},09$ pour exprimer des hauteurs absolues. C'est par erreur que celles recueillies en 1852 n'ont été corrigées que de + $1^{mm},01$; elles doivent, par conséquent, subir encore une correction de + $0^{mm},08$. L'altitude de la cuvette n'est pas connue; la hauteur de Chimay doit être, d'après M. Houzeau, d'un peu plus de 200 mètres au-dessus de la mer.

Température. — Le thermométrographe n° 7, de Sacré, se trouve au Nord et à l'ombre, à $4^m,75$ au-dessus du sol, en dehors d'une croisée et garanti par un treillage en fil de fer mince. Comparé à celui de l'Observatoire, il a donné, vers le 20^{me} degré, des indications trop basses de 0°,2; le zéro n'ayant pas été vérifié depuis, on a adopté cette correction.

N. B. Les observations ont manqué pendant trois mois, du 18 août au 19 novembre Pour calculer les moyennes annuelles du baromètre et du thermomètre, nous avons réduit à la station de Chimay les observations recueillies à Stavelot pendant les quatre mois entiers d'août à novembre.

Pression atmosphérique à Chimay, en 1853.

MOIS.	HAUTEURS MOY. DU BAROM. par mois.		*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	VARIATION mensuelle.	DATE du *maximum*.	DATE du *minimum*.
	9 h. du matin.	Midi.					
	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.		
Janvier	735,70	735,16	746,39	718,17	28,22	le 19	le 17
Février	30,95	30,48	46,48	15,86	30,62	le 1er	le 9
Mars	41,44	40,35	49,38	28,68	20,70	le 29	le 2
Avril	34,87	34,69	44,55	23,13	21,42	le 17	le 25
Mai	37,13	37,17	42,90	26,67	16,23	le 5	le 8
Juin	37,87	39,33	46,27	30,38	15,89	le 26	le 23
Juillet	40,65	39,96	48,51	29,71	18,80	le 3	le 15
Août (17 jours)	42,71	42,18	48,66	29,53	19,13	le 10	le 17
Septembre	»	»	»	»	»	»	»
Octobre	»	»	»	»	»	»	»
Novembre (11 jours)	44,89	44,30	48,50	33,95	14,55	le 28	le 26
Décembre	37,75	37,77	57,62	18,60	39,02	le 26	le 14
L'ANNÉE	738,14	737,98	748,76	725,15	26,61	le 26 déc.	le 9 février.

Digitized by Google

Température centigrade à Chimay, en 1853.

MOIS.	MOYENNE PAR MOIS. 9 h. du m.	MOYENNE PAR MOIS. Midi.	*Maximum* moyen par mois.	*Minimum* moyen par mois.	TEMPÉRAT. moy. par mois.	VARIATION diurne moyenne.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	VARIATION men-suelle.	DATE du *maximum* absolu.	DATE du *minimum* absolu.
Janvier	4°,62	5°,61	7°,07	2°,92	4°,99	4°,15	11°,2	− 3°,0	14°,2	1 et 2	le 26
Février	−1,40	0,90	1,95	−2,70	−0,37	4,65	5,2	−10,0	15,2	1, 2 et 10	le 19
Mars	−0,28	3,01	4,75	−3,00	0,87	7,75	12,2	−14,0	26,2	le 14	le 20
Avril	5,80	7,54	9,01	2,48	5,74	6,53	15,4	− 2,0	17,4	le 29	le 14
Mai	11,62	14,02	16,59	7,27	11,93	9,32	24,2	0,0	24,2	le 27	7 et 8
Juin	16,08	18,75	21,00	10,96	15,98	10,04	28,2	4,0	24,2	le 29	4 et 5
Juillet	18,49	20,65	23,08	13,28	18,18	9,80	31,2	9,0	22,2	le 10	le 2
Août (17 jours). . .	16,83	19,11	20,89	11,88	16,38	9,01	25,2	9,0	16,2	le 2	le 15
Septembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Octobre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Novembre (11 jours).	−0,31	1,55	2,30	−2,64	−0,17	4,94	4,9	− 4,5	9,4	le 25	le 30
Décembre	−3,57	−2,35	−0,97	−7,27	−4,12	6,30	7,7	−19,0	26,7	le 1	le 26
L'ANNÉE. . . .	7,75	10,21	11,84	4,29	8,07	7,55	18,44	− 3,84	22,28	le 10 juil.	le 26 déc.

Quantité de pluie et de neige; nombre de jours de pluie, de grêle, de neige, etc., et sérénité du ciel, à Chimay, en 1853.

MOIS.	Quantité de pluie en millim.	Quantité de neige en millim.	Quantité d'eau recueillie en millim.	Nombre de jours où l'on a recueilli de l'eau.	NOMBRE DE JOURS DE								SÉRÉNITÉ DU CIEL.		
					Pluie.	Grêle.	Neige.	Gelée.	Tonner.	Brouill.	Ciel entièrement couvert.	Ciel sans nuages.	9 heures du matin.	Midi.	MOYENNE.
	mm.	mm.	mm.												
Janvier . .	138,42	»	138,42	13	13	0	0	4	0	3	0	0	2,5	2,2	2,4
Février . .	1,27	27,93	29,20	9	1	0	8	24	0	2	19	9	3,1	3,1	3,1
Mars . . .	7,66	10,52	18,18	9	5	0	4	20	0	3	0	0	3,5	3,4	3,5
Avril . . .	111,89	2,36	114,25	14	13	0	1	0	0	2	0	0	1,6	2,3	2,0
Mai . . .	74,12	4,80	78,92	10	10	3	1	0	3	6	1	0	3,8	3,1	3,4
Juin . . .	61,53	»	61,53	8	9	0	0	0	0	0	0	0	2,8	3,7	3,3
Juillet. . .	55,90	»	55,90	7	7	0	0	0	0	2	0	0	2,9	3,2	3,0
Août (17 j.) .	15,29	»	15,29	1	1	0	0	0	2	0	0	0	4,5	3,5	4,0
Septembre .	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Octobre . .	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Nov. (11 j.) .	1,75	7,15	8,90	3	1	0	3	11	0	1	4	0	1,6	1,3	1,4
Décembre .	10,00	74,42	84,42	15	2	0	13	30	0	3	9	1	3,3	2,9	3,1
LES 9 MOIS.	477,83	127,18	605,01	89	62	3	30	89	5	22	33	10	3,0	2,9	2,9

Digitized by Google

Nombre d'indications de chaque vent à Chimay, en 1853.

(D'après la direction des nuages, observée à 9 h. du matin et à midi.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.	TOTAL.
Janvier.	1	0	2	0	9	0	1	0	5	3	6	1	26	0	6	0	60
Février.	7	0	8	0	11	1	11	1	4	0	2	0	2	0	4	1	52
Mars.	5	0	13	2	3	0	9	1	7	0	4	0	5	1	8	0	58
Avril	4	2	2	0	1	0	2	1	3	2	10	2	11	1	10	5	56
Mai	1	0	6	0	14	0	3	1	5	0	1	3	7	2	3	2	48
Juin.	5	0	5	0	6	0	0	0	3	0	1	0	21	0	3	0	44
Juillet	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	3	0	35	0	2	0	42
Août (17 jours) . . .	2	0	6	1	10	2	1	0	0	0	0	0	9	1	1	0	33
Septembre.	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Octobre.	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Novembre (11 jours) .	0	1	5	3	0	1	2	1	1	3	4	0	0	0	1	0	22
Décembre	1	2	6	0	2	2	8	2	0	3	20	2	6	1	1	1	57
TOTAL . . .	26	5	53	6	57	6	37	7	29	11	51	8	122	6	39	9	472

Nombre d'indications de chaque vent à Chimay, en 1853.

(D'après la direction de la girouette, observée à 9 h. du matin et à midi.)

MOIS.	N.	NNE.	NE.	ENE.	E.	ESE.	SE.	SSE.	S.	SSO.	SO.	OSO.	O.	ONO.	NO.	NNO.	TOTAL.
Janvier.	1	1	3	0	1	5	2	1	5	0	11	2	16	1	12	1	62
Février.	5	0	9	1	8	1	13	5	4	0	3	1	0	0	6	0	56
Mars.	7	3	4	0	11	1	9	3	7	2	4	0	5	0	6	0	62
Avril	11	1	2	0	2	1	1	0	2	7	5	4	7	2	14	1	60
Mai	0	0	4	4	6	8	17	3	2	1	4	1	3	1	8	0	62
Juin.	5	2	1	4	10	0	4	3	1	0	3	2	10	1	7	1	54
Juillet	0	0	0	1	2	0	3	0	7	0	13	3	16	4	13	0	62
Août (17 jours) . . .	2	0	4	2	13	4	0	0	2	0	3	0	2	1	1	0	34
Septembre.	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Octobre.	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Novembre (11 jours) .	0	1	2	4	2	2	4	0	1	4	1	0	1	0	0	0	22
Décembre	0	3	2	1	15	10	10	4	0	5	3	0	1	2	3	1	60
TOTAL . . .	31	11	31	17	70	32	63	19	31	19	50	13	61	12	70	4	534

Digitized by Google

Nombre d'indications de la vitesse des nuages à Chimay, en 1853.

(Estimée par les chiffres 0 à 5.)

MOIS.	0		1		2		3		4		5		TOTAL.	
	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.
Janvier	9	9	19	22	1	0	1	0	0	0	0	0	30	31
Février	2	1	24	26	0	0	0	0	0	0	0	0	26	27
Mars	5	2	25	28	1	1	0	0	0	0	0	0	31	31
Avril	5	3	21	25	4	1	0	1	0	0	0	0	30	30
Mai	9	7	17	22	3	2	0	0	0	0	0	0	29	31
Juin	0	0	20	23	1	0	0	0	0	0	0	0	21	23
Juillet	0	1	20	19	1	1	0	0	0	0	0	0	21	21
Août (17 jours)	0	1	5	15	8	0	3	0	1	0	0	0	17	16
Septembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Octobre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Novembre (11 jours)	1	0	10	10	0	1	0	0	0	0	0	0	11	11
Décembre	4	0	22	30	3	0	0	0	0	0	0	0	29	30
TOTAL.	35	24	183	220	24	6	4	1	1	0	0	0	245	251

Nombre d'indications de la force du vent à Chimay, en 1853.

(Estimée par les chiffres 0 à 5.)

MOIS.	0		1		2		3		4		5		TOTAL.	
	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.	9 heures du matin.	Midi.
Janvier	9	7	14	15	7	9	1	0	0	0	0	0	31	31
Février	4	0	23	27	1	1	0	0	0	0	0	0	28	28
Mars	1	1	22	25	8	5	0	0	0	0	0	0	31	31
Avril	2	2	21	15	3	8	2	3	2	2	0	0	30	30
Mai	1	0	9	8	15	17	3	3	2	3	0	0	30	31
Juin	1	0	16	19	10	8	2	1	1	2	0	0	30	30
Juillet	1	1	11	12	13	11	5	3	1	4	0	0	31	31
Août (17 jours)	0	2	16	4	1	6	0	5	0	0	0	0	17	17
Septembre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Octobre	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
Novembre (11 jours)	0	1	9	7	1	2	1	1	0	0	0	0	11	11
Décembre	0	0	19	20	10	10	0	0	0	1	0	0	29	31
TOTAL.	19	14	160	152	69	77	14	16	6	12	0	0	268	271

Digitized by Google

RÉSUMÉ

Des observations météorologiques faites au Jardin botanique de Munich, en 1853,

Et communiquées par M. DE MARTIUS.

La température de l'air, celle de la terre à différentes profondeurs, ainsi que la direction des vents sont observées régulièrement chaque jour, sous la direction de M. de Martius, et les tableaux résumés sont calculés à l'Observatoire de Bruxelles. Les températures exprimées en degrés Réaumur ont été réduites à l'échelle centigrade. La hauteur de l'eau tombée a été mesurée chaque jour, en lignes de Paris pour un pied carré de surface; elles ont été réduites en millimètres.

Température centigrade de l'air à Munich, en 1853.

MOIS.	MOYENNE PAR MOIS. 9 heures du matin.	2 heures du soir.	*Maximum* moyen par mois.	*Minimum* moyen par mois.	TEMPÉRAT. moy. par mois.	VARIATION diurne moyenne.	*Maximum* absolu par mois.	*Minimum* absolu par mois.	VARIATION mensuelle.	DATE du *maximum* absolu.	DATE du *minimum* absolu.
Janvier	— 0°,19	3°,33	4°,93	— 2°,98	0°,98	7°,91	12°,5	— 10°,4	22°,9	11 et 13	le 27
Février	— 2,61	3,61	1,41	— 5,68	— 2,14	7,09	7,6	— 15,6	23,3	le 11	le 16
Mars	— 1,11	2,98	4,81	— 6,51	— 0,85	11,32	12,1	— 16,0	28,1	le 31	le 27
Avril	5,99	8,36	10,05	1,09	5,57	8,96	20,0	— 4,4	24,4	le 7	le 15
Mai	11,88	16,21	17,78	6,35	12,07	11,43	26,5	0,0	26,5	le 24	le 9
Juin	16,20	18,58	20,93	10,91	15,92	10,02	31,5	4,4	27,1	le 29	le 24
Juillet	19,65	22,67	24,58	12,99	18,79	11,59	35,0	7,5	27,5	le 9	le 2
Août	18,35	22,50	23,51	12,16	17,84	11,35	32,8	6,6	26,1	le 22	le 13
Septembre	14,00	18,85	19,18	7,14	13,16	12,04	25,0	1,9	23,1	le 22	le 30
Octobre	8,65	13,01	14,08	3,71	8,90	10,37	20,9	— 2,5	23,4	le 1	le 24
Novembre	1,04	3,20	3,75	0,43	2,09	3,32	9,1	— 6,5	15,6	le 1	le 30
Décembre	— 7,05	— 2,99	— 2,56	— 9,96	— 6,26	7,40	6,9	— 21,3	28,1	le 2	le 26
MOYENNE	7,07	10,86	11,87	2,47	7,17	9,40	19,99	— 4,69	24,68		

TEMPÉRATURE MOYENNE DE L'ANNÉE.

D'après les *maxima* et les *minima* moyens	7°,17
— — — absolus mensuels	7,68
— les observations de 9 heures du matin	7,07
— la température moy. du mois d'octobre	8,90

EXTRÊMES DE L'ANNÉE.

Maximum, le 9 juillet	35°,0
Minimum, le 26 décembre	—21,3
Intervalle de l'échelle parcouru	56,3

Digitized by Google

Température centigrade de la terre à Munich, en 1853.

MOIS.	A LA SURFACE DU SOL.		A 2 PIEDS DE PROFONDEUR.		A 4 PIEDS DE PROFONDEUR.		A 6 PIEDS DE PROFONDEUR.	
	9 heures du matin.	4 heures du soir.	9 heures du matin.	4 heures du soir.	9 heures du matin.	4 heures du soir.	9 heures du matin.	4 heures du soir.
Janvier	1°,08	1°,92	4°,04	4°,21	5°,44	5°,60	6°,66	6°,83
Février	– 1,11	0,45	2,81	2,98	4,26	4,39	5,41	5,53
Mars	0,23	1,15	2,45	2,70	3,69	3,81	3,48	4,88
Avril	4,04	6,58	4,49	3,44	4,61	4,73	5,06	5,20
Mai	10,90	14,13	9,59	9,84	8,23	8,41	7,78	7,91
Juin	15,05	18,06	14,14	14,50	12,35	12,53	11,29	11,49
Juillet	18,45	21,99	17,36	17,65	16,43	15,59	14,00	14,23
Août	12,14	21,01	17,05	18,29	16,44	16,73	15,30	15,55
Septembre	12,63	16,15	15,63	15,85	15,28	15,50	14,93	15,15
Octobre	8,64	11,19	12,38	12,58	12,86	13,03	13,24	13,41
Novembre	3,56	4,55	8,16	8,41	9,67	9,70	10,68	10,71
Décembre	– 1,46	– 0,69	3,65	3,74	5,78	5,84	7,38	7,45
MOYENNE	7,01	9,77	9,31	9,52	9,59	9,66	9,60	9,86

Nombre d'indications de chaque vent et quantité d'eau tombée à Munich, en 1853.

(Le vent a été observé 3 fois par jour, à 9 h. du m., 2 h. et 6 h. du s.)

MOIS.	N.	NE.	E.	SE.	S.	SO.	O.	NO.	Quantité d'eau recueillie en millimètres.
									mm.
Janvier	4	15	8	9	8	16	22	15	41,2
Février	7	3	13	5	7	6	28	15	34,6
Mars	10	24	6	1	4	9	15	24	63,7
Avril	3	5	3	1	2	30	29	17	128,0
Mai	5	24	11	10	1	5	20	17	150,6
Juin	7	11	3	1	0	9	36	23	206,4
Juillet	11	6	10	5	4	17	20	20	162,0
Août	8	22	3	5	6	15	19	15	101,5
Septembre	0	23	9	4	6	14	20	14	57,0
Octobre	6	16	20	5	5	13	16	12	70,5
Novembre	8	33	29	2	0	2	9	7	13,5
Décembre	5	16	27	4	5	6	19	11	30,5
TOTAL	74	198	142	52	48	142	253	190	1059,5

Digitized by Google

PHÉNOMÈNES PÉRIODIQUES NATURELS. — RÈGNE VÉGÉTAL. — 1853.

NOMS DES PLANTES. (*Feuillaison.*)	BRUXELLES.		GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	NAMUR.	OSTIN.	VERVIERS.	WAREMME.	VENISE.	VIENNE.	MUNICH.
	Observ.	Jard. bot.										
Acer campestre. L.	11 mai.	9 mai.	—	20 mai.	—	24 avril.	7 mai.	—	—	18 avril.	4 mai.	
» pseudo-platanus. L.	3 »	6 »	—	14 »	—	24 »	—	—	—	—	3 »	16 mai.
» saccharinum. L.	—	16 »	17 avril.	18 »	28 avril.	—	—	—	—	—	7 »	
Æsculus hippocastanum. L.	21 avril.	20 avril.	21 »	3 »	3 mai.	21 avril.	7 mai.	—	—	—	22 avril.	4 mai.
» lutea. Pers.	—	30 »	15 »	—	—	24 »	—	—	—	—	1 mai.	
» pavia. L.	23 avril.	30 »	—	12 mai.	10 mai.	—	—	—	—	—	30 avril.	
Amygdalus communis. L.	—	20 »	7 avril.	—	—	—	5 mai.	—	—	—	7 »	
» persica. L. (*β Mad.*).	12 avril.	2 mai.	4 »	—	—	21 avril.	—	—	—	—	27 »	
Aristolochia sipho. L.	—	19 »	—	—	—	4 mai.	—	—	—	—	5 mai.	
» clematites. L.	—	24 »	—	—	8 mai.							
Avena sativa. L. *Épis*	—	—	—	2 juill.								
Betula alba. L.	30 avril.	21 avril.	—	10 mai.	—	28 avril.	12 mai.	—	—	—	20 avril.	13 mai.
» alnus. L.	—	29 »	—	1 »	—	24 »	—	—	—	—	9 »	3 »
Berberis vulgaris. L.	17 avril.	23 »	16 avril.	27 avril.	14 mai.	—	25 avril.	—	1 mai.	28 mars.	23 »	14 »
Bignonia catalpa. L.	20 mai.	24 »	16 juin.	16 juin.	—	—	—	—	—	18 avril.	10 mai.	
» radicans. L.	—	25 »	—	—	22 mai.	5 mai.						
Buxus sempervirens. L.	—	2 »	—	—	—	7 avril.	—	—	—	24 mars.	—	17 mai.
Carpinus betulus. L.	21 avril.	—	28 avril.	—	—	21 »	—	—	—	—	20 avril.	
Cercis siliquastrum. L.	15 mai.	23 avril.	16 juin.	28 mai.	27 mai.	2 mai.	—	—	—	30 mars.	4 mai.	
Colutea arborescens. L.	23 avril.											
Corchorus japonicus. L.	6 »	13 avril.	18 mars.	12 avril.	—	10 janv.	7 mai.					
Cornus mascula. L.	28 »	1 mai.	—	—	11 mai.	25 avril.	—	—	—	18 avril.	4 avril.	17 mai.
» sanguinea. L.	—	—	24 avril.	—	15 »	25 »	—	—	—	17 mars.		
Corylus avellana. L.	17 avril.	13 avril.	1 »	1 mai.	—	25 »	10 mai.	—	1 mai.	—	22 avril.	10 mai.
» colurna. L.	—	—	1 »	—	—	—	—	—	—	—	24 »	
Cratægus coccinea. L.	26 avril.	3 mai.	20 »									
» oxyacantha. L.	9 »	29 avril.	—	23 avril.	28 avril.	26 avril.	—	—	—	—	21 avril.	
Cytisus laburnum. L.	29 »	11 mai.	20 avril.	7 mai.	8 mai.	26 »	10 mai.	—	22 mai.	30 avril.	14 »	18 mai.
» sessilifolius. L.	—	2 »	—	13 »	5 »	—	—	—	—	—	—	5 »
Daphne mezereum. L.	4 avril.	16 avril.	—	—	18 mars.	15 janv.	—	9 avril.	—	25 mars.	—	6 »
Evonymus europæus. L.	—	30 »	14 avril.	8 mai.	15 avril.	1 mai.	7 avril.	—	—	—	14 avril.	
» latifolius. Mill.	29 avril.	2 mai.	10 »	3 »	—	—	—	—	—	—	29 »	
Fagus castanea. L.	—	14 »	—	—	—	28 avril.						
» sylvatica. L.	—	19 »	26 avril.	12 mai.	23 avril.	4 mai.	12 avril.	—	—	—	1 mai.	13 mai.
Fraxinus excelsior. L.	—	15 »	—	22 »	24 mai.	10 »	17 mai.	—	22 mai.	—	5 »	
» juglandifolia. Lam.	—	19 »	12 juin.									
» ornus. L.	—	18 »	5 »	16 mai.	23 mai.	—	—	—	—	—	5 mai.	

NOMS DES PLANTES. (*Feuillaison.*)	BRUXELLES.		GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	NAMUR.	OSTIN.	VERVIERS.	WAREMME.	VENISE.	VIENNE.	[illegible]
	Observ.	Jard. bot.										
Ginkgo biloba	—	7 mai.	27 mai.	—	23 mai.	7 mai.	—	—	—	—	2 mai.	
Gleditschia ferox. L.	25 mai.	25 »	—	—	—	—	—	—	29 mai.			
Glycine sinensis. L.	14 mai.	14 »	—	—	28 mai.							
Gymnocladus canadensis. Lam.	—	25 »	28 juin.	—	31 »	16 mai.						
Hippophaë rhamnoïdes. L. . .	20 avril.	3 »	—	14 mai.	—	20 avril.	—	—	—	17 avril.	22 avril.	
Hordeum hexastichon. L. *Épis* .	—	—	—	26 »								
Hydrangea arborescens. L. . .	23 avril.	2 mai.	12 avril.	—	16 mai.	22 avril.						
Juglans regia. L.	—	22 »	—	22 mai.	24 »	4 mai.	—	—	22 mai.	—	1 mai.	19 mai.
» nigra. L.	—	—	—	25 »	27 »							
Ligustrum vulgare	—	17 avril.	—	—	—	—	—	—	—	24 mars.		
Liriodendron tulipifera. L. . .	—	14 mai.	14 juin.	—	30 mai.	—	—	—	—	—	25 avril.	
Lonicera periclymenum. L. . .	5 janvier. 12 mars.	15 janv.	4 févr.	17 avril.	15 mars.	20 mars.	—	—	12 janv.			
» symphoricarpos. L. .	11 avril.	—	—	18 »	25 »	7 avril.						
» tatarica. L.	12 mars.	16 févr.	14 mars.	30 mars.	26 févr.	1 janv.	—	—	—	—	18 févr.	
» xylosteum. L. . . .	20 avril.	—	—	27 avril.	—	16 avril.	—	—	12 avril.	—	17 avril.	
Magnolia tripetala. L.	—	16 mai.	—	—	26 mai.							
» yulan. Desf.	—	—	4 mai.	—	19 »							
Mespilus germanica. L. . . .	29 avril.	29 avril.	—	9 mai.	—	24 avril.	28 avril.	—	—	—	29 avril.	
Morus nigra. L.	—	23 mai.	—	—	18 mai.	—	30 »	—	—	20 avril.	11 mai.	
» alba	18 mai.	22 »	—	—	26 »							
Philadelphus coronarius. L. . .	13 avril.	18 avril.	4 avril.	28 avril.	16 »	6 avril.	—	—	—	8 avril.	7 avril.	3 mai.
» latifolius. Schr. .	20 »	24 »	12 »									
Pinus larix. L.	—	20 »	—	—	10 mai.	21 avril.						
Platanus occidentalis. L. . . .	—	14 mai.	12 juin.	25 mai.	—	—	20 mai.	—	22 mai.	—	3 mai.	
Populus alba. L.	11 mai.	—	—	12 »	—	28 avril.	12 »	—	—	11 avril.	2 »	
» balsamifera. L. . . .	1 »	—	22 avril.	—	—	—	10 »	—	—	—	24 avril.	
» fastigiata. Poir. . . .	4 »	3 mai.	—	8 mai.	12 mai.	1 mai.						
» tremula. L.	—	—	28 avril.	16 »	—	20 avril.	—	—	—	—	12 mai.	
Prunus armeniaca. L. (β *abric.*).	—	9 mai.	—	1 »	—	21 »	15 mai.	—	—	—	29 avril.	
» cerasus. L. (β *big. n.*) .	2 mai.	3 »	22 avril.	10 »	—	21 »	—	—	—	—	26 »	
» domestica L. (β *gr. d. v.*).	23 avril.	30 avril.	18 »	—	—	21 »	—	—	—	—	28 »	
» padus. L.	29 »	28 »	—	3 mai.	6 mai.	21 »	15 avril.	—	1 mai.	—	15 »	10 mai.
Ptelea trifoliata. L.	—	—	—	—	28 »	10 mai.	—	—	—	—	10 mai.	
Pyrus communis (β *bergam.*) . .	30 avril.	7 mai.	—	14 mai.	—	21 avril.	—	—	—	—	26 avril.	
» japonica. L.	6 »	7 avril.	20 févr.	12 mars.	—	1 janv.	—	—	—	—	16 janv.	
» malus. L. (β *calville d'été*).	3 mai.	9 mai.	—	7 mai.	—	21 avril.	28 avril.	—	—	—	6 mai.	
» spectabilis. Ait.	21 avril.	17 avril.	—	—	—	21 »						
Quercus pedunculata. Willd. .	11 mai.	18 mai.	—	—	—	16 mai.	1 mai.	—	—	—	1 mai.	
» sessiliflora Smith. . .	—	—	—	24 mai.								
Rhamnus catharticus. L. . . .	—	17 mai.	22 avril.	—	—	1 mai.	—	—	—	—	4 mai.	
» frangula. L.	5 mai.	14 »	—	—	—	1 »	—	—	—	—	4 »	
Rhus coriaria. L.	—	—	8 juin.	25 mai.	—	14 »	—					
» cotinus. L.	—	18 mai.	3 »	25 »	—	—	15 mai.	—	—	—	22 avril.	
» typhina. L.	13 mai.	20 »	—	—	—	—	—	—	—	—	2 mai.	

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES. (*Feuillaison.*)	BRUXELLES. Observ.	BRUXELLES. Jard. bot.	GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	NAMUR.	OSTIN.	VERVIERS.	WAREMME.	VENISE.	VIENNE.	MUNICH.
Ribes alpinum. L.	—	14 avril.	11 mars.	19 avril.	—	14 mars.	—	—	—	—	5 avril.	
» grossularia. L.	12 mars.	30 mars.	14 »	18 »	—	14 »	—	6 avril.	—	—	4 »	
» nigrum. L.	13 avril.	14 »	18 »	30 »	20 mars.	7 avril.	—	—	21 avril.	—	13 »	
» rubrum. L.	13 »	18 »	16 »	24 »	—	10 »	15 avril.	—	—	—	—	22 avril.
Robinia pseudo-acacia. L.	15 mai.	21 mai.	17 juin.	24 mai.	—	10 mai.	15 mai.	—	—	17 avril.	9 mai.	28 mai.
» viscosa. Vent.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5 »	
Rosa centifolia. L.	5 mai.	21 avril.	—	20 mai.	9 mai.	21 avril.	—	—	—	6 avril.	23 avril.	
» gallica. L.	1 »	—	—	—	—	21 »	—	—	—	—	15 »	
Rubus idæus. L.	17 avril.	15 avril.	10 avril.	18 avril.	8 avril.	20 »	20 avril.	—	—	—	7 »	
» odoratus. L.	18 »	24 »	—	15 mai.	16 »							
Salix alba. L.	—	—	—	10 »	—	1 mai.	12 mai.					
» babylonica. L.	25 avril.	17 avril.	—	—	20 avril.	20 avril.	—	—	—	—	9 avril.	
Sambucus ebulus. L.	—	21 »	—	—	—	25 »	20 avril.	—	—			
» nigra. L.	18 avril.	25 janv. 8 avril.	20 mars.	27 avril.	—	10 janv.	—	1 janv.	12 janv.	11 mars.	18 décem. (1852.)	30 avril.
» racemosa. L.	12 »	7 »	—	—	—	4 avril.	15 avril.	—	—	—	26 mars.	3 mai.
Secale cereale. L. *Épis.*	—	—	—	18 mai.	—	—	—	—	—	—	—	28 »
Sorbus aucuparia. L.	23 avril.	29 avril.	—	6 »	26 avril.	21 avril.	—	—	—	—	—	13 »
» domestica. L.	—	14 mai.										
Spiræa bella. Sims.	—	14 avril.	—	23 avril.								
» hypericifolia. L.	27 avril?	1 »	—	3 mai.	—	—	—	—	—	—	20 avril.	
» lævigata. L.	6 »											
Staphylea pinnata. L.	27 »	2 avril.	17 avril.	8 mai.	20 avril.	21 avril.	24 avril.	—	—	26 mars.		
» trifolia. L.	17 »	9 »										
Syringa persica. L.	14 »	20 »	2 avril.	7 mai.	7 mai.	10 avril.	20 avril.	—	—	—	5 avril.	
» rothomagensis. Hort.	14 »	22 »	—	—	3 »	10 »						
» vulgaris. L.	13 »	18 »	14 avril.	30 mai.	26 avril.	10 »	20 avril.	—	1 mai.	30 mars.	10 avril.	4 mai.
Taxus baccata. L.	—	—	—	—	—	28 »	—	—	—	13 avril.		
Tilia americana. L.	—	—	—	—	—	—	10 mai.					
» parvifolia. Hoffm.	16 mai.	—	—	8 mai.	—	2 mai.	—	—	—	—	6 mai.	
» platyphylla. Vent.	1 mai.	2 mai.	—	9 »	—	20 avril.	—	—	—	—	—	28 mai.
Triticum sativum (β *hyb.*). *Épis.*	—	—	—	16 juin.	—	—	—	—	—	—	—	31 »
Ulmus campestris. L.	2 mai.	14 mai.	28 avril.	12 mai.	18 mai.	2 mai.	12 mai.	—	—	—	2 mai.	
Vaccinium myrtillus. L.	—	3 »	—	—	—	20 avril.						
Viburnum lantana. L.	—	—	27 avril.	6 mai.	5 mai.	15 »	—	—	—	—	13 janv.	
» opulus. L. (*fl. simp.*)	—	29 avril.	20 »	3 »	28 avril.	8 »	10 avril.	—	—	—	11 avril.	
» » L. (*fl. plen.*)	18 avril.	21 »	20 »	3 »	—	8 »	10 »					
Vitex agnus castus. L.	29 mai.	—	—	—	2 juin.	20 mai.						
Vitis vinifera. (β *chass. doré*).	13 »	22 mai.	—	17 mai.	—	10 »	26 mai.	—	—	5 mai.	4 mai.	24 mai.

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES. (*Floraison.*)	BRUXELLES. Observ.	BRUXELLES. Jard. bot.	GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	WAREMM.	NAMUR.	STAVEL.	OSTIN.	VERVIERS	VENISE.	VIENNE.	MUNICH.
Acanthus mollis. L.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30 juin.		
Acer campestre. L.	22 mai.	—	—	25 mai.	—	—	18 mai.	—	15 mai.	—	—	7 mai.	
» pseudo-platanus. L.	17 »	10 mai.	—	22 »	—	—	6 »	—	—	—	—	7 »	24 mai.
Achillea millefolium. L.	—	30 juin.	1 juill.	18 juin.	5 juill.	—	5 juin.	4 juill.	—	2 juin.	—	2 juill.	
Aconitum napellus. L.	9 juin.	6 »	—	16 »	28 juin.	—	24 mai.	29 »	—	—	—	29 juin.	
Æsculus hyppocastanum. L. . . .	17 mai.	21 mai.	14 juin.	23 mai.	—	29 mai.	18 mai.	4 juin.	26 mai.	—	—	12 mai.	28 mai.
» macrostachys. Mich. . . .	24 juill.	22 juill.	—	—	20 juill.	—	—	—	—	—	—	16 juill.	
» pavia. L.	—	20 mai.	14 juin.	—	—	—	—	—	—	—	—	25 mai.	
Ajuga reptans. L.	—	10 »	1 mai.	—	18 mai.	—	4 mai.	—	—	—	—	18 »	
Alcea rosea. L.	15 juill.	10 juill.	—	23 juill.									
Alisma plantago. L.	—	19 »	28 juin.	15 »	—	—	—	—	—	—	—	16 juill.	
Allium ursinum. L.	—	—	—	—	—	—	15 mai.						
Althæa officinalis. L.	—	20 juill.	16 juill.	—	17 juill.	—	15 juill.	—	—	—	—	17 juill.	
Amygdalus communis. L.	—	14 avril.	18 févr.	—	20 mars.	—	—	12 juin.	10 avril.	—	—	20 avril.	
» persica. L. (β *Madel.*) . .	28 mars.	29 »	—	—	—	—	15 avril.	20 avril.	—	1 janv.	—	4 mai.	
Anchusa sempervirens. L.	6 mai.	—	1 juin.										
Anemone hepatica. L.	31 mars.	—	10 févr.	20 janv.	20 févr.	12 janv.	8 janv.	12 mars.	—	—	—	12 mars.	
» nemorosa. L.	17 avril.	—	17 mars.	—	15 avril.	—	28 mars.	28 avril.	5 avril.	—	—	25 avril.	
» ranunculoïdes. L. . . .	—	—	20 »	—	—	—	25 avril.	—	—	—	—	29 »	
Antirrhinum majus. L.	—	9 juin.	28 juin.	12 juin.	4 juin.	—	28 mai.	12 juill.	12 mai.	—	—	29 mai.	
Arabis caucasica. Willd.	9 mars.	8 avril.	18 mars.	—	25 janv.								
Aristolochia clematites. L.	—	30 mai.	20 juin.	—	10 juin.	—	—	—	—	—	—	22 mai.	
» sipho. L.	—	30 »	—	—	—	—	29 mai.	—	—	—	—	22 »	
Arum maculatum. L.	—	10 »	10 juin.	—	16 mai.	29 mai.	12 »	—	—	—	20 mai.	27 »	
Asarum europæum. L.	—	14 avril.	8 avril.	11 avril.	28 avril.								
Asclepias incarnata. L.	30 juin.	19 juill.	17 juill.										
» syriaca. L.	—	—	17 »	16 juill.	—	—	—	—	—	—	—	5 juill.	
» vincetoxicum. L.	—	30 mai.	—	—	7 juill.	—	2 juin.	—	—	—	—	29 mai.	
Asperula odorata. L.	—	24 »	24 mai.	—	20 mai.	—	15 mai.						
Astrantia major. L.	2 juin.	11 juin.	20 juin.	2 juill.	—	—	22 »	10 juill.					
Atropa belladona. L.	—	9 »	6 juill.	16 juin.	15 juin.	—	1 juin.	10 »	—	14 juin.	—	1 juin	
Avena sativa. L.	—	—	—	14 juill.	—	—	—	—	—	—	—	1 mai.	
Bellis perennis. L.	5 janv. 10 mars.	12 avril.	4 mars.	1 janv.	10 janv.	—	1 janv.	—	—	1 janv.			
Berberis vulgaris. L.	21 mai.	22 mai.	2 juin.	26 mai.	25 mai.	29 mai.	—	5 juin.	20 mai.	—	30 avril.	21 mai.	26 mai.
Betula alba. L.	26 avril.	—	—	14 »	15 janv.	—	1 mai.	10 mai.	—	—	—	1 »	6 »
— alnus. L.	—	2 mai.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7 avril.
Bignonia catalpa. L.	20 juill.	26 août.	1 août.	—	—	—	—	—	—	—	—	10 juill.	
Bryonia alba. L.	—	22 juin.	14 juill.	—	—	—	—	—	—	—	—	14 »	
» dioïca. Jacq.	—	30 mai.	10 »	—	—	—	6 juin.						
Bupthalmum cordifolium. L. . . .	18 juill.	—	26 juill.	—	1 juill.								
Buxus sempervirens. L.	17 avril.	15 avril.	5 avril.	6 avril.	—	—	21 avril.	—	—	—	23 mars.	3 mai.	4 mai.
Campanula persicifolia. L.	5 juill.	—	10 juill.	30 juin.	—	—	14 juin.						
Carduus marianus. L.	—	—	20 »	—	13 juill.	—	—	—	—	—	—	9 juin.	
Cercis siliquastrum. L.	—	23 mai.	—	31 mai.	23 mai.	—	18 mai.	—	—	—	29 avril.	18 mai.	

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES. (*Floraison.*)	BRUXELLES.		GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	WAREMME.	NAMUR.	STAVEL.	OSTIN.	VERVIERS.	VENISE.	VIENNE.	MUNICH.
	Observ.	Jard. bot.											
Cheiranthus Cheiri. L.	4 mai.	15avril.	15mars.	—	—	16janv.	25janv.	26avril.					
Chelidonium majus. L.	—	10 mai.	4juin.	—	27avril.	—	10 mai.	24 mai.	—	—	14avril.	10 mai.	
Chrysanthemum leucanthemum. L.	—	—	28 »	15juin.	—	—	25 »	13 juin.	—	—	—	24 »	
Chrysocoma linosyris. L.	—	8 août.	—	—	2 août.	—	7 août.	—	—	—	—	5 sept.	
Clethra alnifolia. L.	10 juill.	11 »	—	—	20 juill.								
Colchicum autumnale. L.	1 sept.	—	6 sept.	13 sept.	20 sept.	—	20 sept.	14 sept.	—	—	—	13 sept.	
Colutea arborescens. L.	3 juin.	—	—	15 juin.	20 juin.	—	26 mai.	—	—	—	—	1 juin.	
Convallaria maialis. L.	15 mai.	20 mai.	10 juin.	18 mai.	10 mai.	29 mai.	22 »	25 mai.	—	—	—	15 mai.	
Convolvulus arvensis. L.	24 juin.	—	—	14 juin.	—	—	14 juin.	—	10 juill.				
» sepium. L.	—	20 juill.	—	—	—	—	18 »	21 juill.	—	—	3 juin.	17 juin.	
Corchorus japonicus. L.	6 mai.	6 mai.	10avril.	12 mai.	—	22 mai.	15 mai.	—	15 mai.	—	—	12 mai.	
Coreopsis tripteris	10 juill.	—	20juill.										
Cornus mascula. L.	9mars.	24janv.	—	16janv.	20 févr.	12janv.	20janv.	—	15mars.	13 janv. 4 avril.	23mars.	9avril.	19avril.
» sanguinea. L.	—	—	—	19 juin.	22 mai.	—	10 juin.	—	10 juin.	6 juill.	18 mai.	9 juin.	
Coronilla emerus. L.	27 mai.	—	—	—	5 juill.	—	—	—	—	—	—	12 mai.	
Corydalis digitata. Pers.	—	11avril.	—	—	—	—	28mars.						
Corylus avellana. L.	5janv.	3janv.	20janv.	23janv.	10janv.	12janv.	6janv.	16janv.	—	9janv.	—	3mars.	10avril.
Cratægus coccinea. L.	27 mai.	27 mai.											
» oxyacantha. L.	20 »	26 »	—	1 juin.	29 mai.	29 mai.	25 mai.	—	—	—	—	23 mai.	7 juin.
Crocus mæsiacus. Curt.	—	—	6mars.	—	—	—	25janv.						
» vernus. Sw.	9mars.	7mars.	6 »	17mars.	12mars.	—	6avril.	—	—	—	—	6avril.	
Cynara scolymus. L.	—	—	—	—	—	—	—	—	11 juill.	—	—	27 juill.	
Cynoglossum omphalodes. L.	6 avril.	—	12avril.	—	25 févr.	—	15janv.	—	—	12janv.			
Cytisus laburnum. L.	23 mai.	24 mai.	27 juin.	25 mai.	23 mai.	29 mai.	22 mai.	—	27 mai.	—	26avril.	18 mai.	31 mai.
» sessilifolius. L.	—	25 »	—	5 juin.	20 »								
Daphne laureola. L.	—	—	12mars.	—	—	12avril.	14janv.	—	—	—	9mars.	10mars.	
» mezereum. L.	4avril.	12avril.	4 »	6janv.	20 févr.	12janv.	1 »	16avril.	2avril.	8avril.	27avril.	—	21avril.
Deutzia scabra. L.	18 juin.	23 juin.											
Dianthus caryophyllus. L.	10 juill.	—	—	26 juill.	30 juin.	—	4 juill.	1 août.	—	—	26 mai.		
Dictamnus albus. L.	14 juin.	—	20juin.	—	6 »	—	2 juin.	—	—	—	16 »		
» » L. (*Fl. purpureo*)	14 »	—	20 »	14 juin.	—	—	—	—	—	—	16 »	1 juin.	
Digitalis purpurea. L.	19 »	—	28 »	15 »	24 juin.	—	—	23 juin.	—	—	—	9 »	
Dodecatheon meadia. L.	15 mai.	25 mai.	20 »	—	10 mai.	—	15 mai.						
Echinops sphærocephalus. L.	—	23 juill.	—	2 août.	2 juill.	—	20 juill.	—	—	—	—	11 juill.	
Epilobium spicatum. Lam.	—	—	—	28 juin.	17 juin.	—	15 juin.						
Equisetum arvense. L.	21 mai.	—	—	—	—	—	18avril.						
Erica vulgaris. L.	—	—	20juin.	—	16 août.	—	15 juill.						
Eschscholtzia californica. Chm.	10 juill.	18 juin.	28 »	—	9 juin.	—	—	1 août.					
Evonymus europæus. L.	3 juin.	2 »	12 »	8 juin.	—	—	24 mai.	—	26 mai.	—	—	29 mai.	
» latifolius. Mill.	23 mai.	20 mai.	12 »	28 mai.	—	—	—	3 juin.	—	—	—	21 »	
Fagus sylvatica. L.	—	—	—	—	—	—	18 mai.	—	—	—	—	7 »	10 juin.
Fragaria vesca. L. (β *hortensis*)	7 mai.	10 mai.	12mars.	18 mai.	—	—	12 »	16 mai.	17 mai.	—	—	14 »	26 mai.
Fraxinus excelsior. L.	—	—	—	6 »	2 mai.	—	8 »	—	—	—	—	29avril.	
Fritillaria imperialis. L.	—	8avril.	3 mai.	—	16avril.	1 mai.	2 »	—	—	—	—	26avril.	4avril.

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES. (*Floraison.*)	BRUXELLES. Observ.	BRUXELLES. Jard. bot.	GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	WAREMME.	NAMUR.	STAVEL.	OSTIN.	VERVIERS	VENISE.	VIENNE.	MUNICH.
Galanthus nivalis. L.	9mars.	15 janv.	12 févr.	6 févr.	—	8 janv.	10 janv.	13mars.	—	—	—	10mars.	5avril.
Gentiana asclepiadea. L.	—	—	20 juill.										
» cruciata. L.	—	—	—	—	28 juin.								
Geranium pratense. L.	8 juin.	12 juin.	16 juin.	—	20 mai.	—	29 mai.						
Gladiolus communis. L.	19 »	—	—	20 juin.	8 juin.	—	4 juin.	1 juill.	—	—	3 juin.	15 juin.	
Glechoma hederaceum. L.	—	—	2avril.	28avril.	11mars.	—	20 janv.	—	—	—	—	28avril.	
Glycine sinensis. L.	18 mai. 18 juillet.	23 mai.	—	—	15 mai.	—	4 juin.						
Hedera helix. L.	—	—	—	12 sept.	—	—	28 mai.						
Hedysarum onobrychis. L.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	23 mai.	
Helianthus tuberosus. L.	—	—	28 sept.	—	—	—	—	—	—	—	—	7 oct.	
Helleborus fœtidus. L.	—	—	5 févr.	—	—	—	10 janv.	—	—	9 janv. 5 avril.	—		
» hiemalis. L.	—	—	12mars.	1 févr.	28 janv.								
» niger. L.	5 janv.	—	4 janv.	12 »	1 »	—	1 janv.	—	—	—	6mars.	2 déc. (18[illegible].)	
» viridis. L.	—	—	10 »	15 »	10 »	—	15avril.	—	—	—	—	20mars.	
Hemerocallis cœrulea. Andr.	27 juin.	15 juill.	—	20 juill.	8 juill.	—	10 juill.						
» flava. L.	9 »	6 juin.	25 juin.	6 juin.	9 juin.	—	8 juin.	9 juill.	—	5 juill.			
» fulva. L.	1 juill.	29 »	—	7 juill.	2 » ?	—	25 »	—	—	—	—	30 juin.	
Hibiscus syriacus. L.	—	8 août.	—	20 août.	—	—	15 juill.	—	—	—	3 juill.		
Hieracium aurantiacum. L.	—	—	1 juill.	—	1 juin.	—	18 juin.	—	—	—	—	2 juin.	
Hippophaë rhamnoïdes. L.	—	18 mai.	—	11 mai.	—	—	—	—	—	—	—	11 mai.	
Hordeum hexastichum. L.	—	—	—	7 juin.	—	—	—	—	—	10 juin.	—	1 juin.	
Hyacinthus orientalis. L.	31mars.	8avril.	12avril.	—	—	—	20avril.	28avril.	—	3avril.			
Hydrangea hortensis. Sm.	20 juill.	17 juill.	—	13 août.	30 juill.	—	28 juin.						
Hypericum perforatum. L.	7 »	1 »	2 juill.	—	28 juin.	—	28 »	—	—	30 juin.	27 juin.	21 juin.	
Iberis sempervirens. L.	13 mai.	29avril.	16avril.	—	2 mai.	—	15 janv.	30 juin.					
Ilex aquifolium. L.	23 »	24 mai.	—	26 mai.	23 »	—	16 mai.	—	—	—	15 juin.		
Iris germanica. L.	22 »	—	15 juin.	28 »	16 »	—	20 »	—	8 juin.	16 juin.	—	19 mai.	
» pumila. L.	3 »	1 mai.	8 »	—	—	—	4 »	—	—	—	1 mai.		
Juglans nigra. L.	—	—	—	12 juin.	11 juin.								
» regia. L.	—	—	—	30 mai.	31 mai.	—	27 mai.	—	—	—	—	18 mai.	28 mai.
Kalmia latifolia. L.	—	23 juin.	28 juin.	—	—	—	10 juin.						
Lamium album. L.	—	8 mai.	12avril.	11 mai.	—	12 janv.	6 janv.	19 juill.					
Leontodon taraxacum. L.	18avril.	27avril.	20 »	—	—	—	1 »						
Ligustrum vulgare. L.	—	29 juin.	—	26 juin.	—	—	19 juin.	—	24 juin.	—	17 mai.	11 juin.	
Lilium candidum. L.	9 juill.	6 juill.	—	7 juill.	—	—	1 juill.	—	—	11 juill.	30 juin.	30 »	18 juill.
» flavum. L.	20 juin.	—	—	30 juin.	—	—	20 juin.						
Linum perenne. L.	—	24 mai.	12 juin.	—	31 mai.	—	—	—	—	—	—	1 juin.	
Liriodendron tulipifera. L.	—	1 juill.	—	—	5 juill.								
Lonicera periclimenum. L.	11 juin.	—	—	28 juin.	—	—	6 juin.	7 juill.	—	—	—	17 juin.	
» symphoricarpos. L.	10 »	—	—	11 »	—	—	4 »	24 juin.					
» tatarica. L.	23 mai.	—	2 juin.	16 mai.	—	—	26avril.	—	—	—	—	14 mai.	
» xylosteum. L.	24 »	—	—	23 »	—	29 mai.	20 mai.	—	—	—	—	14 »	
Lychnis chalcedonica. L.	30 juin.	—	—	7 juill.	—	—	10 juin.	6 juill.					
Lysimachia nemorum. L.	—	—	1 juin.										

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES. (*Floraison.*)	BRUXELLES. Observ.	BRUXELLES. Jard. bot.	GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	WAREMME.	NAMUR.	STAVEL.	OSTIN.	VERVIERS	VENISE.	VIENNE.	MUNICH.
Lythrum salicaria. L.	—	—	2 juill.	—	7 juill.	—	16 juin.	—	—	—	—	5 juill.	
Magnolia tripetala. L.	23 mai.	4 juin.	—	—	23 mai.								
» yulan. L.	—	—	28 avril.	—	14 avril.	22 mai.							
Malva sylvestris. L.	16 juin.	—	28 mai.	23 juin.	—	—	10 juin.	25 juin	—	—	20 mai.	27 mai.	
Melissa officinalis. L.	—	16 juill.	24 juill.	24 juill	20 juill.	—	4 juill.	18 juill.	—	—	—	11 juill.	
Mentha piperita. L.	—	—	—	—	16 »	—	20 »	26 août.	—	11 juill.	—	30 —	
Mespilus germanica. L.	29 mai.	30 mai.	17 juin.	8 juin.	—	—	2 juin.	—	9 juin.	—	—	28 mai.	
Mitella grandiflora. Pursch.	6 »	10 »	18 avril.	—	5 mai.								
Morus nigra. L.	4 juin.	8 juin.	24 juin.	—	—	—	—	—	6 juin.	—	18 mai.	30 mai.	
Narcissus pseudo-narcissus. L.	28 mars.	4 avril.	18 avril.	1 avril.	—	12 avril.	10 avril.	16 avril.	—	—	20 avril.		
» junquilla. L.	29 avril.	7 »	17 mai.	—	6 mai.								
» poeticus. L.	13 mai.	10 mai.	—	—	10 »	22 mai.	1 mai.	27 mai.					
Nymphea alba. L.	—	16 juin.	20 juin.	—	—	—	—	—	—	—	—	1 juin.	
Orobus vernus. L.	—	30 avril.	8 avril.	16 avril.	—	—	—	—	—	—	24 avril.	3 mai.	
Oxalis acetosella. L.	—	—	—	—	29 mars.	—	24 avril.	6 mai.					
» stricta. L.	12 juin.	—	—	—	—	—	10 juin.	—	—	—	—	26 mai.	
Papaver bracteatum. L.	30 mai.	—	20 juin.	—	1 juin.	—	28 mai.						
» orientale. L.	19 juin.	30 mai.	26 »	—	10 »	—	6 juin.	8 juin.	14 juin.	—	—	29 mai.	
» rhæas. L.	23 »												
Paris quadrifolia. L.	—	—	—	—	—	—	5 mai.						
Philadelphus coronarius. L.	4 juin.	2 juin.	14 juin.	8 juin.	3 juin.	—	2 juin.	19 juin.	7 juin.	—	15 mai.	6 juin.	20 juin.
» latifolius. Schr.	26 »	—	17 »	—	15 »								
Physalis Alkekengi. L.	27 »	—	20 »	—	15 »								
Plantago major. L.	—	—	4 »	24 juin.	—	—	—	24 juin.	18 mai.	—	27 mai.		
Platanus occidentalis. L.	—	—	—	—	—	—	—	—	10 juin.	—	—	21 mai.	
Polemonium cœruleum. L.	—	12 juin.	9 juin.	10 juin	6 juin.	—	28 mai.	12 juin.	30 mai.	—	—	23 »	
Polygonum bistorta. L.	—	—	14 »	7 »	28 mai.	—	26 »	—	—	3 juin.	—	2 juin.	
Populus alba. L.	—	—	—	28 avril.	—	12 avril.	—	—	—	—	4 avril.	16 avril.	
» balsamifera. L.	18 avril.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	25 »	
» fastigiata. Poir.	23 »	20 avril.	—	—	—	—	18 avril.						
» tremula. L.	—	—	29 mars.	—	—	—	24 »	—	—	—	—	6 mars.	
Primula elatior. L.	—	13 avril.	4 avril.	—	—	12 avril.	1 janv.						
» veris. L.	31 mars.	18 »	—	—	—	3 avril.							
Prunus armeniaca (*β abric.*).	—	30 »	—	1 avril.	—	—	10 avril.	—	2 avril.	—	—	4 mai.	
» cerasus (*β bigar. noir*)	3 mai.	5 mai.	—	10 mai.	—	5 mai.	2 mai.	6 mai.	—	—	—	4 »	
» domesticus (*β gr. dam. v.*)	2 »	30 avril.	—	—	—	—	4 »	—	—	—	—	7 »	
» padus. L.	23 »	20 mai.	1 mai.	13 mai.	—	22 mai.	5 »	19 mai.	19 mai.	—	—	16 »	15 mai.
» spinosa. L.	23 avril.	20 avril.	—	—	—	7 mai.	8 »	9 »					
Ptelea trifoliata. L.	—	—	19 juin.	—	20 juin.	—	8 juin.	—	—	—	—	12 juin.	
Pulmonaria officinalis. L.	—	17 avril.	18 avril.	4 mars.	18 avril.	—	28 avril.	—	—	—	—	13 avril.	
» virginica. L.	11 mai.	—	2 »	—	30 avril.								
Pyrus communis. (*β Bergam.*)	25 avril.	5 mai.	—	11 mai.	—	—	1 mai.	9 mai.	—	—	27 avril.	8 mai.	
» cydonia. L.	—	20 »	—	5 juin.	—	—		—	—	—	24 avril.	22 »	
» japonica. L.	10 janv. 6 mai.	16 déc. (1852.)	10 mars.	31 janv.	1 avril.	—	15 janv.	11 janv.	1 mars.	—	—	24 avril.	

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES. (*Floraison.*)	BRUXELLES.		GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	WAREMME.	NAMUR.	STAVEL.	OSTIN.	VERVIERS	VENISE.	VIENNE.	MUNICH.
	Observ.	Jard. bot.											
Pyrus malus. L. (β *caville d'été*) . .	15 mai.	20 mai.	—	17 mai.	22 mai.	—	10 mai.	—	20 mai.	4 juin.	—	23 mai.	
» spectabilis. Ait.	13 »	12 »	—	—	18 »	—	8 »						
Quercus pedunculata. Willd. . . .	—	—	—	—	—	—	25 »	—	—	—	—	6 mai.	
» sessiliflora. Smith.	—	—	—	28 mai.									
Ranunculus acris (*fl. plein.*). . . .	5 mai.	14 mai.	2 mai.	29 »	—	3 avril.	18 mai.	23 mai.	—	—	—	20 mai.	
» ficaria. L.	—	—	6 mars.	7 mars.	3 avril.	—	28 mars.	3 »	—	6 avril.	—	12 avril.	13 avril.
Rhamnus frangula. L.	7 juin.	30 mai.	—	—	—	—	—	23 juin.	—	—	—	24 mai.	
Rheum undulatum. L.	11 mai.	24 »	—	21 mai.	18 mai.	—	—	—	—	—	—	22 »	
Rhododendron ponticum. L. . . .	29 »	19 »	—	9 juin.	—	—	15 mai.						
Rhus coriaria. L.	—	26 juin.	—	28 »	—	—	10 juill.						
» cotinus. L.	—	12 »	—	—	—	—	—	—	13 juill.	—	—	1 mai.	
» typhina. L.	10 juill.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28 juin.	
Ribes alpinum. L.	—	17 mai.	20 mars.	3 mai.	—	14 mai.	24 avril.	—	—	—	—	29 avril.	
» grossularia. L. (*Fr. virid.*) . .	23 avril.	24 avril.	6 avril.	30 avril.	—	1 »	24 »	4 mai.	—	—	—	23 »	16 mai.
» nigrum. L.	11 mai.	5 mai.	10 »	12 mai.	—	—	3 mai.	19 »					
» rubrum. L.	29 avril.	1 »	3 »	30 avril.	3 mai.	5 mai.	22 avril.	3 »	5 mai.	—	—	—	17 mai.
Robinia pseudo-acacia. L.	12 juin.	11 juin.	—	19 juin.	—	—	—	—	12 juin.	—	16 mai.	6 juin.	24 juin.
» viscosa. Vent.	19 »	—	—	—	13 juin.	—	—	—	—	—	—	10 »	
Rosa centifolia. L.	18 »	14 juin.	28 juin.	21 juin.	11 »	—	11 juin.	—	—	—	24 mai.	18 »	
» gallica. L.	20 »	—	28 »	—	—	—	15 »	—	—	—	—	17 »	
Rubia tinctorum. L.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	19 juill.	2 juill.	
Rubus idæus. L.	4 juin.	8 juin.	10 juin.	3 juin.	22 juin.	—	—	24 juin.	22 mai.	—	—	27 mai.	
» odoratus. L.	—	12 »	20 »	22 »	—	—	—	—	—	—	—	23 juin.	
Ruta graveolens. L.	—	16 »	26 »	1 juill.	15 juin.	—	—	4 juill.	—	21 juin.	28 mai.	6 »	
Salix alba. L.	—	—	—	26 avril.									
» capræa. L.	—	—	—	—	—	1 mai.	—	17 avril.	—	—	—	—	19 avril.
Sagittaria sagittifolia. L.	—	—	28 juill.										
Salvia officinalis. L.	—	—	25 juin.	12 juin.	11 juin.	—	—	18 juin.	—	—	27 juin.	7 juin.	
Sambucus ebulus. L.	—	9 juill.	—	—	3 »	—	26 juill.	—	—	—	—	30 »	
» nigra. L.	10 juin.	7 juin.	16 juin.	17 juin.	—	—	6 juin.	23 juin.	12 juin.	—	20 mai.	29 mai.	13 juin.
» racemosa. L.	6 mai.	—	—	—	15 mai.	—	—	19 mai.	15 mai.	—	—	8 »	18 mai.
Sanguinaria canadensis. L.	2 »	—	17 avril.	—	14 avril.								
Satureia montana. L.	—	—	—	—	—	—	10 juill.						
Saxifraga crassifolia. L.	3 mai.	10 mai.	1 mai.	—	25 avril.	—	26 avril.	—	—	—	—	29 avril.	
Scabiosa arvensis. L.	—	—	24 juin.	—	—	—	2 juin.						
» succisa. L.	—	—	—	—	—	—	2 août.	—	—	—	—	7 août.	
Scrophularia nodosa. L.	—	9 juin.	14 juin.	—	20 juin.	—	25 mai.	—	—	—	—	28 mai.	
Secale cereale. L.	—	—	—	9 juin.	—	29 mai (1).	10 juin.	—	5 juin.	13 juin.	—	2 juin.	6 juill.
Sedum acre. L.	1 juill.	11 juin.	22 juin.	18 »	13 juin.	—	4 »	6 juill.	—	15 »	—	3 »	
» album. L.	24 juin.	29 »	—	—	20 »	—	16 »	—	—	15 »	—	24 juill.	
» telephium. L.	—	—	1 août.	—	3 août.	—	12 août.	4 août.	—	28 juill.	—	31 »	
Solanum dulcamara. L.	—	10 juin.	20 juin.	5 juin.	9 juin.	—	8 juin.	—	—	—	—	6 juin.	
Sorbus aucuparia. L.	20 mai.	22 mai.	—	28 mai.	8 »	29 mai.	28 mai.	3 juin.	—	—	—	15 mai.	
Spartium scoparium. L.	—	—	7 mai.	25 »	—	—	18 »	3 »					

(1) Épis, 5 mai.

NOMS DES PLANTES. (*Floraison.*)	BRUXELLES.		GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	WAREMME.	NAMUR.	STAVEL.	OSTIN.	VERVIERS	VENISE.	VIENNE.	MUNICH.
	Observ.	Jard. bot.											
Spiræa bella. Sims.	1 juin.	23 mai.	—	27 mai.	22 mai.								
» filipendula. L.	15 »	22 juin.	26 juin.	16 juin.	16 juin.	—	12 juin.	1 juill.	—	—	—	8 juin.	
» hypericifolia. L.	—	24 mai.	2 »	24 mai.	—	—	—	—	—	—	—	20 mai.	
» lævigata. L.	4 mai.	12 »											
Staphylea pinnata. L.	17 »	17 »	6 juin.	19 mai.	—	29 mai.	20 mai.	29 mai.	4 mai.	—	3 mai.		
» trifolia. L.	22 »												
Statice armeria. L.	—	28 mai.	—	16 mai.	5 mai.	—	30 avril.						
» limonium. L.	—	23 juill.	—	—	8 juin.								
Symphytum officinale. L.	18 mai.	19 mai.	12 juin.	—	10 mai.	—	10 mai.	—	—	—	—	9 juin.	
Syringa persica. L.	17 »	23 »	19 mai.	27 mai.	—	29 mai.	18 »	—	27 mai.	—	—	19 mai.	
» vulgaris. L.	19 »	23 »	30 »	23 »	—	26 »	18 »	29 mai.	—	31 mai.	7 mai.	15 »	28 mai.
Taxus baccata. L.	—	—	6 mars.	28 mars.	—	—	—	—	—	—	2 »	4 avril.	
Thymus serpillum. L.	1 juill.	12 juill.	—	—	—	—	15 juin.	—	—	—	—	26 mai.	
» vulgaris. L.	—	10 juin.	24 juin.	25 mai.	—	—	15 »	—	26 mai.	—	—	4 juin.	
Tiarella cordifolia. L.	11 mai.												
Tilia microphylla. Vent.	24 juin.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	16 juill.
» platyphylla. Vent.	—	—	—	—	—	—	15 juin.	—	—	—	—	—	10 »
Tradescantia virginica. L.	10 juin.	30 mai.	22 juin.	28 juin.	18 juin.	—	26 mai.	—	—	—	7 mai.	10 juin.	
Trifolium pratense. L.	3 »	—	—	—	—	—	26 »						
Triticum sativum. L. (β *hyb.*)	—	—	—	1 juill.	—	—	16 juin.	—	22 juin.	25 juin.	—	2 juin.	
Trollius europæus	20 mai.												
Tulipa gesneriana. L.	6 »	—	28 avril.	—	—	—	—	24 mai.					
Tussilago fragrans. L.	—	—	10 »	1 janv.	31 janv.	—	—	—	—	1 janv.			
Ulmus campestris. L.	25 avril.	13 avril.	—	9 avril.	27 mars.	—	—	—	—	—	—	9 avril.	
Vaccinium myrtillus. L.	—	10 mai.	10 juin.	—	—	—	8 mai.	19 mai.	—	—	—	—	30 mai.
Valeriana rubra. L.	29 mai.	7 juin.	16 »	—	29 mai.	—	22 »	—	—	21 juin.			
Veratrum nigrum. L.	—	—	22 juill.	—	22 juill.	—	—	—	—	—	—	24 juin.	
Verbena officinalis. L.	—	17 juill.	2 »	—	1 juill.	—	20 juin.						
Veronica gentianoïdes. L.	—	—	—	—	13 mai.								
» spicata. L.	17 juin.	29 juin.	22 juin.	—	—	—	15 juin.	4 juill.					
Viburnum lantana. L.	—	22 mai.	18 »	17 mai.	13 mai.	—	12 mai.	—	1 juin.	—	—	30 mai.	
» opulus. L. (*fl. simp.*)	—	—	—	4 juin.	24 »	22 mai.	26 »	—	4 »	—	24 mai.	21 »	
» » L. (*fl. plen.*)	28 mai.	28 mai.	—	7 »	24 »	22 »	22 »	—	3 »	—	24 »		
Vinca minor. L.	1 janv.	17 avril.	24 mars.	16 janv.	28 mars.	3 avril.	27 janv.	30 avril.	—	—	21 avril.	27 avril.	
Viola odorata. L.	6 avril.	12 avril.	10 »	18 »	13 »	—	1 »	7 »	10 mai.	1 janv. 4 avril.	20 mars.	13 »	19 avril.
Vitis vinifera. L. (β *chas. doré*).	4 juill.	8 juill.	6 juill.	2 juill.	—	—	—	—	21 juin.	—	12 juin.	17 juin.	9 juill.
Waldsteinia geoïdes. Kit.	17 avril.	23 avril.	1 avril.	—	3 avril.	—	20 avril.						

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES. (*Fructification*).	BRUXELLES. Observatoire.	BRUXELLES. Jard. Botan.	GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	OSTIN.	VENISE.	VIENNE.	MUNICH.
Acer pseudo-platanus. L.	—	—	—	25 oct.	—	—	—	3 nov.	
Achillæa millefolium. L.	—	2 sept.	14 sept.	18 sept.	2 sept.	—	—	26 août.	
Aconitum napellus. L.	-	3 août.	—	14 août.	31 juillet.	—	—	10 »	
Æsculus hippocastanum. L.		—	6 sept.	—	13 sept.	18 sept.	—	16 sept.	29 sept.
Ajuga reptans. L.	—	6 juillet.	1 juillet.						
Alcea rosea. L	—	1 oct.	—	8 sept.	20 sept.				
Alisma plantago. L.	—	30 août.	10 août.	15 »	—	—	—	22 août.	
Amygdalus communis. L.	—	—	4 sept.	—	—	20 sept.	—	13 sept.	
» persica. L. (3 *Madel.*) . .	—	22 août.							
Anemone nemorosa. L.	—	—	—	—	3 mai.	23 mai.			
Antirrhinum majus. L.	—	—	2 août.	11 août.	—	18 août.	—	19 août.	
Aristolochia clematites. L.	—	—	6 sept.						
Astrantia major. L.	—	22 juillet.	5 août.	10 août.	7 août.				
Avena sativa. L.	—	—	—	29 »	—	—	—	24 juillet.	
Berberis vulgaris. L.	—	9 sept.	6 sept.	12 sept.	28 août.	20 sept.	20 août.	18 août.	24 oct.
Betula alba. L.	—	—	—	24 »	—	—	—	18 juillet.	
Campanula persicifolia. L.	—	1 août.	12 août.	—	30 juillet.				
Chelidonium majus. L.	—	1 juillet.	10 juillet.	—	—	—	3 juin.	14 juin.	
Colutea arborescens. L.	—	—	—	6 nov.	—	—	—	24 juillet.	
Convallaria maialis. L.	—	—	11 août.	—	8 août.	—	—	10 août.	
Cornus mascula. L.	—	—	—	14 sept.	—	17 août.	18 juillet.	31 »	11 sept.
Corylus avellana. L.	—	28 août.	28 août.	30 août.	28 août.	1 sept.	—	13 juillet.	25 août.
Cratægus oxyacantha. L.	—	—	—	12 sept.	3 sept.	—	—	24 août.	
Cynara scolymus. L.	—	—	—	—	—	18 août.	—	25 »	
Cytisus laburnum. L.	--	2 sept.	20 août.	12 sept.	28 août.	5 sept.	19 août.	1 août.	30 août.
Daphne mezereum. L.	—	3 août.	10 juillet.	7 juillet.	6 juillet.	—	17 juillet.		
Digitalis purpurea. L.	—	3 »	16 août.	25 »	16 août.	—	—	22 juillet.	
Evonymus europæus. L.	—	—	10 oct.	18 oct.	13 oct.	15 oct.	—	13 sept.	
Fagus sylvatica. L.	—	19 sept.	—	—	—	—	—	8 août.	10 oct.
Fragaria vesca. L. (3 *Hortens.*) . .	18 juin.	14 juin.	22 juin.	25 juin.	—	15 juin.	—	16 juin.	15 juillet.
Fraxinus excelsior. L.	—	—	—	22 oct.	—	—	—	28 »	
Geranium pratense. L.	—	—	28 juillet.						
Gladiolus communis. L.	—	—	—	—	22 juillet.	—	6 août.	2 août.	
Hordeum hexastichum. L.	—	—	—	22 juillet.	—	—	—	21 juillet.	
Hypericum perforatum. L.	—	4 sept.	20 août.	—	—	—	8 juillet.	21 août.	
Juglans regia. L.	—	—	—	1 oct.	30 sept.	—	—	21 sept.	20 sept.
Ligustrum vulgare. L.	—	—	—	29 sept.	—	12 oct.	24 oct.	14 août.	
Linum perenne. L.	—	28 juillet.	18 juillet.	—	28 juillet.	—	—	14 juillet.	
Lonicera periclymenum. L.	—	—	—	2 sept.	20 août.	—	—	30 »	
Malva sylvestris. L.	—	26 juillet.	2 août.	12 août.	—	—	30 juin.	27 juin.	
Mespilus germanica. L.	—	—	10 nov.	18 nov.	—	--	—	9 nov.	
Morus nigra. L.	—	20 août.	15 août.	—	22 août.	18 août.	13 juillet.	28 juin.	
Orobus vernus. L.	—	30 juin.	20 juin.	3 août.	—	—	20 juin.		
Papaver orientale. L.	—	1 août.	1 août.	—	15 juillet.				
Philadelphus coronarius. L. . . .	—	—	4 sept.	16 sept.	—	8 sept.			

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES. (*Fructification.*)	BRUXELLES.		GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	OSTIN.	VENISE.	VIENNE.	MUNICH.
	Observatoire.	Jard. botan.							
Plantago major. L.	—	5 août.	6 août.	26 août.	—	1 sept.	28 juin.		
Polemonium cœruleum. L.	—	22 juillet.	—	8 »	11 août.	—	—	8 juillet.	
Prunus armeniaca. L. (β *abric.*)	—	20 août.	—	16 »					
» cerasus. L. (β. *bigar. n.*)	19 juin.	—	—	24 juillet.					
» padus. L.	—	—	6 août.	10 août.	—	7 sept	—	15 juillet.	24 juillet.
Pyrus communis. L. (β *berg.*)	—	—	—	11 oct.	—	—	29 août.	31 »	
» cydonia. L.	—	—	—	—	—	—	7 sept.	8 sept.	
» malus (β *calville d'été*)	—	—	—	—	—	12 août.			
Ribes grossularia. L.	15 juillet.	11 juillet.	28 juillet.	28 juillet.	—	—	—	—	18 juillet.
» nigrum. L.	4 »	8 »	—	15 »	28 juin.				
» rubrum. L.	30 juin.	8 »	5 juin.	7 »	—	25 juin.			
Robinia pseudo-acacia. L.	—	25 sept.	—	20 nov.	—	—	17 sept.	18 sept.	10 oct.
Rosa centifolia. L.	—	—	17 sept.	—	—	—	—	8 »	
Rubus idæus. L.	7 juillet.	14 juillet.	10 juillet.	22 juillet.	29 juin.	20 juillet.	—	2 juillet.	
Salvia officinalis. L.	—	22 »	12 août.	26 »	25 juillet.	—	19 juillet.	9 »	
Sambucus nigra. L.	—	—	17 »	28 août.	—	20 août.	9 »	6 août.	10 sept.
Secale cereale. L.	—	—	—	27 juillet.	—	19 juillet.	—	12 juin.	
Sorbus aucuparia L.	—	10 sept.	—	14 août.	—	—	—	18 juillet.	29 août.
Staphylea pinnata. L.	—	—	28 août.	14 sept.	25 août.	6 sept.	12 sept.		
Symphytum officinale. L.	—	—	12 juillet.	—	—	—	—	15 juillet.	
Syringa vulgaris. L.	—	—	6 sept.	23 sept.	6 oct.	—	22 juillet.	30 août.	12 oct.
Tilia microphylla. Vent.	—	—	—	—	—	28 sept.	—	8 août?	19 sept.
Triticum sativum. L. (β *hybern.*)	—	—	—	20 août.	—	29 juillet.	—	9 juillet.	
Ulmus campestris. L.	—	15 mai.	—	—	—	—	—	24 mai.	
Vaccinium myrtillus. L.	—	—	20 juillet.	—	—	—	—	—	18 juillet.
Viburnum opulus. L. (*fl. simp.*)	—	2 sept.	—	5 sept.	—	28 août.	9 nov.	5 août.	
Vitis vinifera. L. (*Chass. doré*)	Vigne malade.	29 »	—	9 nov.	Vigne malade.	Vigne malade.	Vigne malade.	13 sept.	1 oct.

NOMS DES PLANTES. (*Chute des feuilles.*)	BRUXELLES.		GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	NAMUR.	OSTIN.	VENISE.	VIENNE.	MUNICH.
	Observat.	Jard. botan.								
Acer campestre. L.	20 oct.	24 oct.	—	3 oct.	28 oct.	26 oct.	20 oct.	24 nov.	3 nov.	
» pseudo-platanus L.	25 »	29 »	—	3 »	28 »	28 »	—	—	12 »	
Æsculus hippocastanum. L.	20 »	25 »	4 oct.	18 »	2 nov.	29 »	22 oct.	—	8 »	7 oct.
Amygdalus communis. L.	—	23 nov.	17 »	—	20 oct.	—	1 nov.	--	19 »	
» persica. L. (β *Mad.*)	20 nov.	10 »	—	—	—	22 nov.	—	—	29 oct.	
Betula alba. L.	1 »	24 oct.	—	22 oct.	—	27 oct.	18 oct.	—	7 nov.	29 sept.
Berberis vulgaris. L.	18 »	23 nov.	12 nov.	2 nov.	9 nov.	—	10 nov.	1 déc.	25 »	20 oct.
Bignonia catalpa. L.	15 »	16 »	6 »	22 oct.	30 oct.	12 nov.	—	14 nov.	9 »	
Carpinus betulus. L.	15 »	25 oct.	—	—	20 nov.	10 »	—	—	10 »	
Cornus mascula. L.	12 »	—	—	—	—	25 »	—	18 nov.	—	25 oct.
Corylus avellana. L.	5 »	27 oct.	7 nov.	3 oct.	27 oct.	12 »	27 oct.	—	6 nov.	10 oct.

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES. (*Chute des feuilles.*)	BRUXELLES. Observat.	BRUXELLES. Jard. botan.	GAND.	OSTENDE.	ANVERS.	NAMUR.	OSTIN.	VENISE.	VIENNE.	MUNICH.
Cratægus oxyacantha. L.	3 nov.	23 nov.	—	20 oct.	6 nov.	18 nov.	—	—	28 nov.	5 nov.
Cytisus laburnum. L.	10 »	23 »	20 oct.	3 »	28 oct.	31 oct.	10 nov.	4 déc.	15 »	22 oct.
Evonymus europæus. L.	3 »	10 »	4 nov.	28 »	18 nov.	12 nov.	14 »	—	27 oct.	
Fagus sylvatica. L.	—	29 oct.	5 »	18 »	2 »	6 »	5 »	—	17 nov.	1 nov.
Fraxinus excelsior. L.	—	2 nov.	—	18 »	—	12 »	1 »	—	8 »	
Glycine sinensis. L.	25 nov.									
Juglans regia. L.	—	8 nov.	—	19 oct.	27 oct.	28 oct.	—	—	18 oct.	25 oct.
Lonicera periclymenum. L.	10 nov.	—	2 déc.	3 »	—	20 nov.				
» symphoricarpos. L.	10 »	25 oct.	—	18 »	—	2 déc.				
Lyriodendron tulipifera. L.	—	24 »	6 oct.	—	17 nov.					
Mespilus germanica. L.	—	23 nov.	—	10 nov.	—	15 nov.	10 nov.	—	25 nov.	
Morus nigra. L.	22 nov.	23 »	—	—	31 oct.	—	8 »	22 nov.	14 »	
Philadelphus coronarius. L.	12 »	29 oct.	7 nov.	3 oct.	7 nov.	20 nov.	—	18 »	24 oct.	1 nov.
Platanus occidentalis. L.	—	23 nov.	10 »	16 nov.	—	—	1 nov.		16 nov.	
Populus alba. L.	4 nov.	2 »	—	18 oct.	—	25 oct.	24 oct.	8 déc.	13 »	
» fastigiata. Poir.	10 »	12 »	—	22 »	7 nov.	25 »				
» balsamifera. L.	3 »	—	17 oct.	—	—	—	—	—	26 oct.	
Prunus armeniaca. L. (β *abric.*). . .	—	12 nov.	—	5 nov.	—	12 nov.	—	—	16 »	
» cerasus. L. (β *bigar. n.*). . .	3 nov.	8 »	20 oct.	18 oct.	23 oct.	30 oct.	—	—	11 nov.	
» domestica. L. (*gr. dam. v.*). .	3 »	8 »	17 »	—	—	8 nov.	—	—	13 »	
» padus. L.	20 oct.	29 oct.	—	3 oct.	20 oct.	25 oct.	17 oct.	—	27 oct.	18 sept.
Pyrus communis. L. (β *bergam.*). . .	5 nov.	2 nov.	—	18 »	—	20 nov.	—	28 nov.	3 nov.	
» japonica. L.	12 »	23 »	—	25 nov.	—	18 »				
» malus. L. (β *calville d'été*). . .	12 »	23 »	—	18 oct.	—	18 »	—	—	25 nov.	
Quercus sessiliflora Smith.	20 »	—	—	15 nov.	13 nov.	20 oct.	10 nov.			
Rhus typhina. L.	25 oct.	20 oct.	—	—	17 oct.	—	—	—	8 nov.	
Ribes grossularia. L.	1 nov.	24 »	4 oct.	3 oct.	—	12 nov.	—	—	20 »	
» nigrum. L.	1 »	24 »	10 »	10 »	17 oct.	2 »	—	—	26 oct.	
» rubrum. L.	5 »	24 »	4 »	3 »	17 »	2 »	15 oct.			
Robinia pseudo-acacia. L.	3 »	29 »	20 »	18 »	—	31 oct.	17 »	24 nov.	14 nov.	8 oct.
Rosa centifolia. L.	12 »	10 nov.	—	2 nov.	—	12 nov.	—	9 déc.	15 —	
Rubus idæus. L.	15 »	24 oct.	12 nov.	15 »	3 nov.	2 »				
Salix alba. L.	—	18 nov.	—	20 »	—	24 »				
» babylonica. L.	25 nov.	23 »	—	—	19 nov.	6 déc.				
Sambucus nigra. L.	15 »	20 »	6 oct.	3 oct.	30 oct.	20 nov.	—	23 nov.	20 nov.	20 oct.
Sorbus aucuparia. L.	25 oct.	24 oct.	—	3 »	30 »	26 oct.	—	—	10 »	25 »
Spiræa hypericifolia. L.	1 nov.	25 »	—	3 »	22 »	—	—	—	18 »	
Staphylæa pinnata. L.	10 »	24 »	20 oct.	15 »	26 »	6 nov.	—	2 nov.		
Syringa persica. L.	12 »	24 »	—	18 »	26 »	24 »	10 nov.	—	11 nov.	
» vulgaris. L.	12 »	23 nov.	11 nov.	18 »	30 »	24 »	10 »	29 nov.	6 »	
Tilia parvifolia. Hoffin.	3 »	—	—	8 »	—	—	—	—	6 »	
» platyphylla. Vent.	20 oct.	24 oct.	—	16 »	—	25 oct.	20 oct.	—	—	18 oct.
Ulmus campestris. L.	28 »	23 nov.	17 nov.	23 »	16 nov.	2 nov.	21 »	—	28 nov.	
Viburnum opulus. L. (*fl. simp.*) . . .	23 nov.	24 oct.	17 »	23 »	26 oct.	6 »	—	24 nov.	4 »	
Vitis vinifera. (β *chasselas doré*) . . .	28 oct.	24 »	—	6 nov.	25 »	—	9 nov.	22 »	14 »	10 nov.

PHÉNOMÈNES PÉRIODIQUES NATURELS.

RÈGNE ANIMAL.

Observations faites dans les environs de Bruxelles, pendant l'année 1853, par M. Vincent.

NB. Une partie de ces observations a été faite par mon fils.

PÉRIODE DE PRINTEMPS.

Janvier 15. *Alauda arvensis*. Chante et monte.
23. *Perdix cinerea*. Accouplée.
Février 18, 19. *Ardea cinerea*. Passe.
21. *Fringilla domestica*. S'accouple.
24. *Alauda arvensis*. Revient.
25. *Fringilla cœlebs*. Chante.
27. *Anas fuligula*. Passe.
Mars 1. *Corvus frugilegus*. Passe.
6. *Turdus iliacus* et *Turdus pilaris*. Reviennent.
7. *Alauda arvensis*. Passe.
8, 10 et 20. *Charadrius pluvialis*. Passe.
10. *Motacilla alba*. Arrive.
10. *Fringilla cannabina*. Revient.
11. *Corvus monedula*. Accouplé.
14. *Fringilla cœlebs*. S'accouple.
17, 18 et 20. *Vanellus cristatus*. Passe.
27. *Emberiza citrinella*. Chante.
28. *Fringilla cœlebs*. Passe.
28. *Anas penelope*. Passe.
30. *Scolopax rusticola*. Passe.
31. *Ardea cinerea*. Passe.
Avril 1 au 2 (nuit du). *Totanus ochropus*. Passe.
2. *Phyllopneuste rufa*. Arrive.
2. *Ruticilla tithys*. Arrive.
2. *Ciconia alba*. Passe.
2. *Gallinula chloropus*. Arrive.
Avril 3. *Hirundo rustica*. Arrive.
4. *Charadrius pluvialis*. Passe.
7. *Hirundo riparia*. Arrive.
10. *Totanus ochropus*. Passe.
12. *Saxicola œnanthe*. Arrive.
12. *Emberiza miliaria*. Arrive.
13. *Ruticilla phœnicurus*. Arrive.
16. *Corvus monedula*. S'accouple.
16. *Emberiza hortulana*. Arrive.
17. *Sylvia atricapilla*. Arrive.
18 au 19 (nuit du). *Ruticilla luscinia*. Arrive.
21. *Coturnix dactylisonans*. Arrive.
24. *Hirundo urbica*. Arrive.
27. *Muscicapa ficedula*. Passe. (Ce gobe-mouches ne passe que rarement dans nos environs.)
28. *Sylvia cinerea*. Arrive.
28. *Saxicola rubetra*. Arrive.
Mai 1. *Cypselus apus*. Arrive.
1. *Fringilla domestica*. Jeunes.
4. *Lanius rufus*. Arrive.
9. *Oriolus galbula*. Arrive.
14 au 15 (nuit du). *Coturnix dactylisonans*. Passe.
22. *Totanus ochropus*. Passe.
25. *Hypolaïs icterina*. Arrive.
27. *Ruticilla luscinia*. Jeunes.

Digitized by Google

PÉRIODE D'AUTOMNE.

Juillet 21. *Cypselus apus*. En compagnies.
22 au 23 (nuit du). *Totanus ochropus*. Émigre.
24 au 25 } (nuits du). *Numenius arquata*. Passe.
28 au 29 }
30. *Cypselus apus*. Départ général.

Août 13 au 14 (nuit du). *Numenius arquata*. — Passe encore.
14 au 15 }
27 au 28 } (nuits du). *Totanus ochropus*. Passe.
30 au 31 }
17. *Cypselus apus*. Passe.
18. *Hirundo urbica*. En compagnies.
25. — *rustica*. Départ de quelques individus.
30. — *riparia*. Départ.

Septembre 2. *Ruticilla luscinia*. Départ.
3. *Upupa epops*. Passe.
8. *Anthus campestris*. Comm. à émigrer.
7 au 8 (nuit du). *Vanellus cristatus*. Passe.
8. *Motacilla flava*. En compagnies.
9. *Charadrius pluvialis*. Passe.
10 (vers le soir). *Motacilla flava*. Passe.
14. *Hirundo urbica*. Départ général.
17. *Saxicola œnanthe*. Départ.
18. *Anthus pratensis*. Commencement du départ.
18. *Regulus ignicapillus*. Émigre.
22. *Gallinago scolopacinus*. Arrivée.
23. *Turdus iliacus* et *Turdus pilaris*. Arrivent.
26, 27. *Hirundo rustica*. Passe.

Octobre 1. *Alauda arvensis*. En compagnies.
2. *Fringilla cœlebs*. Départ.
2. — *cannabina*. Départ.
2. *Sturnus vulgaris*. Passe.
2. *Hirundo urbica* et *Hirundo rustica*. Passent.
2, 6. *Anthus pratensis*. Passe.
2. *Saxicola œnanthe*. Fin du passage.
3. *Alauda arvensis*. Passe.
7 au 8 (nuit du). *Turdus iliacus*. Passe encore.
8. *Fringilla montifringilla*. Passe.
8. *Scolopax rusticola*. Passe.
9. *Hirundo urbica*. Fin du passage.
8. *Fringilla chloris*. Passe.
10. *Turdus torquatus*. Passe.
13. *Emberiza schœniclus*. Passe.
16. *Hirundo rustica*. Fin du passage.
16. *Fringilla spinus*. Passe.
19. *Corvus monedula*. Départ.
19. — *cornix*. Passe.
20. — *frugilegus*. Passe.
20 au 21 (nuit du). *Anas boschas*. Passe. — Passe encore le 24 novembre.
21. *Corvus corone*. Passe.
21. *Turdus vicivorus*. Passe.
23, 24. *Corvus monedula*. }
— *cornix*. }
— *frugilegus*. }
— *corone*. } Passage général. — Temps clair et doux, vent du sud.
Alauda arvensis. }
Fringilla cannabina. }
— *cœlebs*. }
Anthus pratensis. }
31. *Motacilla alba*. Passe.
31 au 1er novembre (nuit du). *Turdus pilaris*. Passe.
30, 31 et 1er nov. *Grus cinerea*. Passe en bandes nombreuses et sans discontinuer pendant toutes ces journées.

Novembre 10 au 11 (nuit du). *Turdus pilaris*. Passe.
26. *Corvus corone*. Passe.
27. *Sturnus vulgaris*. Passe.

Décembre 1. *Anas penelope*. Passe.
16, 17. *Alauda arvensis*. Passe. — Neige.
18. *Corvus cornix*. }
— *frugilegus*. } Passent pendant toute la journée.
Alauda arvensis. }
29. *Anser segetum*. Passe du sud ou nord.

Passages accidentels . . . .
Mai 20. *Sterna nigra*. Passe.
Juin 8. — — Passe encore.
Septembre 27. — *arctica*. Passe.

Mars 10. *Vespertilio pipistrellus*. Réveil.

Digitized by Google

INSECTES.

Mars 12. *Vanessa urticæ.* Sort de sa torpeur et vole.
27. *Cicindela campestris.* Apparition.
31. *Colias rhamni.* Apparition.
Mai 2. *Pieris napi.* Apparition.
Mai 4. *Necrophorus vespillo.* Apparition.
5. *Melolontha vulgaris.* Apparition.
14. *Pieris cardamines.* Apparition.
Juin 27. *Lucanus cervus.* Apparition.
Juillet 15. *Callichroma moschata.* Apparition.

Avril 18. *Bufo vulgaris.* Réveil.
Avril 19. *Rana temporaria.* Coassement.

CÉRÉALES.

Mai 10. *Le seigle* commence à montrer ses épis.
20. *L'orge* — —
27. — commence à fleurir.
28. *Le seigle* —
Juin 8. *Le froment* commence à montrer ses épis.
Juin 16. *Le froment* fleurit.
20. Commencement de la coupe du *foin.*
Juillet 4. Coupe de *l'orge.*
18. — du *seigle.*
28. — du *froment.*
Août 13. — de *l'avoine.*

Observations faites à Waremme et à Liége, en 1853, par MM. Edm. de Selys-Longchamps et Michel Ghaye.

NB. Les observations sans indications spéciales sont pour Waremme.
Les noms des mammifères, poissons et insectes sont en petites capitales.

PÉRIODE DE PRINTEMPS.

Mars 6, 7 et 8. Anser segetum. Passe.
10. Corvus frugilegus. Commencement des nids.
10. Corvus monedula. Passe.
11. Motacilla alba. Arrivée.
12. Colias rhamni. Vole.
12. Apis mellifica. Vole.
18, 19. Grus cinerea. Passe.
30. Vespertilio pipistrellus. Vole. — Dégel. Therm. +10°.
Avril 1. Ruticilla tithys. Arrivée.
3. Phyllopneuste rufa. Arrivée.
3, 4. Hirundo rustica. Arrivée.
7. Alosa communis. Remonte la Meuse.
12. Vanellus cristatus. Passe.
18. Cuculus canorus. Arrivée.
19. Ruticilla phœnicurus. Arrivée.
19. — luscinia. Arrivée.
Avril 19. Sylvia atricapilla. Arrivée.
20. Agrion minium. Vole.
23. Muscicapa ficedula. Commence à passer.
25. Libellula depressa. Vole.
25. Calopteryx virgo. Vole.
26. Hirundo urbica. Arrivée.
28. Saxicola œnanthe. Arrivée.
28. Sylvia cinerea. Arrivée.
29. Cypselus apus (Liége). Arrivée. 1er jour chaud.
29. Vanessa Io (Liége). Vole. A Waremme le 1er mai.
Mai 2. Oriolus galbula. Arrivée.
2. Sylvia curruca. Arrivée.
12. Melolontha vulgaris. Vole.
14. Hypolaïs icterina. Arrivée.
25. Calamoherpe palustris. Arrivée.

Digitized by Google

PÉRIODE D'AUTOMNE.

Août 20. Vanellus cristatus. Passage.
30. Upupa epops. Passage.
Septembre 10. Turdus musicus. Commence à passer.
24. Hirundo urbica et rustica. Départ général.
Octobre 8. Hirundo rustica. Encore quelques individus observés.
Octobre 12. Turdus iliacus. Commence à passer.
15. Grus cinerea. Passe. Encore les 23 et 24.
19. Fringilla montifringilla. Arrive.
20. Loxia curvirostra. Passage accidentel. Encore le 18 décembre.
Décembre 26. Anser segetum. Passe.
26. Cygnus musicus. Passage accidentel.

Observations faites à Stavelot, en 1853, par M. G. Dewalque ([1]).

Janvier 2. Troglodytes europæus. Chante.
8 au 12. Anser segetum. Passe vers le N.
15. Fringilla montana. Chante.
Mars 7. Alauda arvensis.
10. Vanessa urticæ.
12. Pieris rapæ?
13. Motacilla alba.
19. Corvus cornix. Passe.
21. Turdus pilaris.
29. Sylpha atrata.
30. Rana temporaria. Réveil.
Avril 1. Turdus iliacus. Passe.
3. Coccinella bipunctata.
4. Rana temporaria. 1re ponte.
5. Esox lucius. Fraie.
6. Vespertilio pipistrellus. Paraît le soir.
7. Forficula minor.
7. Ruticilla tithys.
8. Parus major. Chante.
8. Musca vomitoria.
12. Hirundo rustica.
42. Turdus iliacus. Passe.
15. Hirundo urbica.
19. Coccinella septempunctata.
19. Cuculus canorus. Chante.
28. Rana temporaria. Frai généralemt éclos.
28. Colias rhamni.
28. Melolontha vulgaris. 1rs individus.
28. Acridium, Bombus, Limax.
29. Cypselus apus.
29. Necrophorus.
Mai 1. Fringilla cœlebs. Couve.
1. Sylvia rubecula. Nidifie.
4. — atricapilla. Chante.
4. — luscinia. On assure l'avoir entendu depuis 10 à 12 jours.
5. Staphylinus olens.
6. Anguis fragilis.
7. Carabus auratus.
7. Vanessa atalanta.
10. Fringilla montana. Jeunes éclos.
12. Cicindela campestris.
14. Fringilla chloris. Jeunes près d'éclore.
14. — cœlebs. —
16. Byrrhus pilula.
16. Crioceris merdigera.
19. Abax striola.
21. Coluber natrix.
21. Necrophorus germanicus.
22. Geotrupes sylvaticus.
24. Pœcilus cupræus.
25. Caprimulgus europæus.
29. Molops terricola.
Juin 6. Bombyx menthastri.
8. Rhagium mordax.
8. Cetonia aurata.
12. Œshna?
12. Philoperta horticola.
12. Ludius tessellatus.
15. Polydrosus coryli.
16. Agrion.
16. Pieris cardamines.

([1]) Je dois la détermination des lépidoptères à l'obligeance de M. de Selys-Longchamps. — La chasse aux insectes n'a pas été faite avec assez d'assiduité pour qu'on puisse espérer avoir observé le commencement de leur apparition; aussi j'ai écarté beaucoup d'observations.

Digitized by Google

Juin 18. Clytus arcuatus.
23. Sphinx ocellata.
24. Bombyx lubricipeda.
26. Botys urticalis.
27. Lampyris noctiluca.
28. Bombyx rubi.
28. Malachius elegans.

Juillet 9. Lina ænea.
12. Bombyx caja.
12. Phalæna grossularia.
12. Polyommatus ægon.
13. Noctua gamma.
17. Telephorus ustus.
17. Bombyx quercus.
19. Vanessa polychloros.
20. Pterophorus pentadactylus.
21. Apoderus coryli.
21. Noctua umbratica.
21. Phalœna wavaria.

Août 1. Noctua maura.
2. Tenebrio molitor.

Octobre 14, 21. Corvus cornix. Passe.
20, 23. Grus cinerea. Passe.

Observations faites à Ostende, en 1853, par M. Mac Leod.

Janvier 6. Geotrupes stercorarius. Vu.
13. Parus ater. En ville.

Février 4, 10 et 13. Passage la nuit d'oiseaux inconnus.
15. Alauda cristata. Dans les champs.

Mars 1. Anser segetum. Passe.
3, 7 et 8. Charadrius pluvialis. Passe.
9. Bufo vulgaris. Réveil.
10, 11, 12, 30 et 31. Vanellus cristatus. Passe.
10. Alauda arvensis. Chante.
12. Corvus cornix. Se rassemblent.
13. Corvus monedula. Passe. — Les petits oiseaux passent.
15. Ruticilla tithys. Arrive et chante.
23. Corvus cornix. Passe. — Grand passage le 30 et le 31.
28. Ardea cinerea. Passe.
28. Pyrgita domestica. Batailles.
30. Vu abeilles et un papillon fauve (Vanessa).

Avril 15. Hirundo urbica. 1re arrivée. — Grande arrivée le 29.
16. Hirundo rustica. Vole.
16. Les Helix aspersa, grands et petits, sont encore engourdis, pelotonnés dans leurs retraites.
19. Rana temporaria. Œufs et têtards de 9 millimètres.
19. Pyrgita domestica. Fait son nid.
28. Helix aspersa. Réveil.
29. Cuculus canorus. Chante.

Mai 11. Melolontha vulgaris. Vole.
12. Sylvia atricapilla. Chante.
13. Cypselus apus. Arrivée.

Juin 12. Libellula depressa. Vole.

Juillet 26, 27, 28 et 30. Passage la nuit de beaucoup d'oiseaux.

Août 4. Cypselus apus. Vu pour la dernière fois.
16, 17, 25. Charadrius pluvialis. Passe. — Passe encore les 3, 4, 8 et 27 sept.

Septembre 21. Parus ater. Vu.
22. Hirundo urbica. Départ du plus grand nombre.
28. Vu encore quelques hirondelles en ville, et encore les 4 et 9 octobre.

Octobre 3. Clupea harengus. Vendu en ville.
6. Corvus cornix. Commence à passer. Passe encore les 8, 11, 23, 24.
7. Sturnus vulgaris. Passe par volées.
7. Ruticilla rubecula. Vu.
8. Les petits oiseaux commencent à passer.
10. Ruticilla tithys. Entendu pour la dernière fois.
20. Les Helix aspersa sont en grand nombre logés dans leurs retraites.
30. Regulus cristatus. Vu.

Novembre 1. Les petits oiseaux et les Corvus cornix passent encore.
4. Clupea sprattus. Vendu en ville.

Décembre 2. Ce jour, et depuis une quinzaine, il passe, la nuit, beaucoup d'oiseaux bruyants.
2. Dans les premiers jours du mois, un aigle a été vu passant au-dessus de la ville, dans la direction du sud-ouest.
24. Anser segetum. Passage.

Digitized by Google

Observations faites à Namur, pendant l'année 1853, par M. A. Bellynck.

(Première apparition.)

Janvier 7. Coccinella. Plusieurs espèces.
Mars 15. *Lacerta*. Plusieurs espèces.
15. Carabus catenulatus.
28. Hydrophilus.
28. *Alouettes*. Chantent.
Avril 19. Gonopteryx rhamni.
19. Vanessa io.
Avril 19. Staphylinus. Plusieurs espèces.
Mai 1. *Cuculus canorus*. Chante.
8. Chrysomela tenebricosa.
8. Geotrupes stercorarius.
10. Melolontha vulgaris.
15. Meloë proscarabeus.

Mai 4. Le seigle montre ses épis.

Observations faites à Vienne, en 1853, par M. Charles Fritsch.

Avril 24. Hirundo rustica. Arrivée. — 20 sept., départ.
25. Cypselus apus. Arrivée.
27. Motacilla alba et yarelli. Arrivée.
Avril 30. Hirundo urbica. Arrivée. — 27 sept., départ.
Mai 25. Perdix coturnix. — Premier chant.
Octobre 5. Sylvia phœnicurus. Départ.

Avril 25. Rainettes (*Hyla*). Réveil. — 2 juin, accouplement. — 11 octobre, retraite.
25. Grenouilles (*Rana*). Réveil. — 6 juin, accouplement.
Mai 2. Tritons (*Triton*). Rév. — 18 oct., retraite.
Mai 4. Lézards (*Lacerta*). Réveil. — 22 septembre, retraite.
12. Crapauds (*Bufo*). Réveil. — 6 juillet, accouplement.

Apparition.

Mars 8. Sialis lutaria.
11. Apis mellifica.
12. Vanessa polychloros.
14. Gonopteryx rhamni.
15. Vanessa urticæ.
Avril 17. Eristalis tenax.
23. Bombus.
25. Anthophora.
25. Pieris napi.
25. — rapæ.
30. Bombylius medius.
Mai 1. Vespa (*femelles*) *au printemps*.
11. Tipula oleracea.
Mai 12. Melolontha vulgaris.
12. Telephorus rusticus.
22. Pieris brassicæ.
27. Calopteryx virgo.
Juin 2. Æschna cyanea (macul.).
5. Libellula depressa.
24. Plusia gamma.
30. Melolontha solstitialis.
Juillet 15. Satyrus janira.
22. Vanessa io.
Août 28. Acrydium.
Septembre 17. Locusta viridissima.
Décembre 1. Trichocera hiemalis.

Digitized by Google

OBSERVATIONS FAITES A DES ÉPOQUES DÉTERMINÉES.

État de la végétation le 20 mars 1854.

NOMS DES PLANTES.	BRUXELLES. — (M. A. Quetelet.)	WAREMME. — (MM. Ed. de Selys et Ghaye.)	LIÉGE. — (MM. Ed. de Selys et Dewalque.)	JEMEPPE-SUR-MEUSE. — (M. Alp. de Borre.)	STAVELOT. — (M. Dewalque.)	NAMUR. — (M. Bellynck.)
Feuillaison.						
Arum maculatum	—	1/2	1/2	—	—	1/4
Corchorus japonica . . .	1/2	Bourgeons.	Bourgeons.	—	Bourgeons.	1/4
Daphne mezereum . . .	3/4	1/4	1/4	—	—	1/2
Lonicera periclymenum. .	1/2	1/4	1/2	—	—	1/4
» xylosteum . . .	Boutons.	1/8	1/4	—	—	1/4
Ribes uva crispa	3/4	1/2	1/2	1/4	1/8	1/2
» sanguineum . . .	1/4	Bourgeons.	Bourgeons.	—	—	1/4
» rubrum	1/2	—	—	1/8	Bourgeons.	—
» nigrum	1/2	1/8	1/8	1/4	Id.	1/4
» grossularia	1/2	1/8	1/2	—	1/8	1/4
» alpinum.	1/2	1/8	Non observée.	—	—	—
Rosa rubiginosa	—	1/8	Id.	Bourgeons.	—	1/4
Spiræa sorbifolia	1/2	1/2	Id.	—	—	1/4
Sambucus nigra	1/8	1/8	1/8	1/4	1/8	1/4
Syringa vulgaris	1/8	1/8	1/8	1/4	Bourgeons.	1/4
» persica	1/8	1/8	Non observée.	—	Id.	1/4
Viburnum oxycoccos. . .	—	Bourgeons.	Bourgeons.	—	—	—
» opulus. . . .	1/4	—	—	1/8	1/8	—
Corylus avellana	1/4	0	Bourgeons.	1/8	—	1/4
Staphylea pinnata . . .	Bourgeons.	0	Id.	1/8	—	—
Salix babylonica	—	0	1/8	—	—	1/4
Berberis vulgaris	1/4	0	Bourgeons.	1/8	0	0
Larix europæa.	—	0	Id.	Bourgeons.	Bourgeons.	1/4
Pyrus japonica	1/4	0	1/4	—	—	1/2
Æsculus hippocastanum .	—	—	—	Bourgeons.	Bourgeons.	0
Floraison.						
Alnus glutinosa	—	Terminée.	Non observée.	—	—	0
Anemone hepatica . . .	Presque termin.	Générale.	Générale.	—	—	Générale.
Bellis perennis.	Partielle.	Partielle.	Partielle.	Initiale.	—	Id.
Corylus avellana	Terminée.	Terminée.	Terminée.	Terminée.	Générale.	Presque finie.
Cornus mascula	Générale.	Générale.	Générale.	—	Commence.	Générale.

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES.	BRUXELLES. — (M. A. Quetelet.)	WAREMME. — (MM. Ed. de Selys et Ghaye.)	LIÉGE. — (MM. Ed. de Selys et Dewalque.)	JEMEPPE-SUR-MEUSE. — (M. Alp. de Borre.)	STAVELOT. — (M. Dewalque.)	NAMUR. — (M. Bellynck.)
Floraison (suite).						
Crocus vernus	Générale.	Générale.	Générale.	—	—	0
Buxus sempervirens . . .	Boutons.	Boutons.	Boutons.	Boutons.	—	0
Daphne mezereum . . .	Presque termin.	Générale.	Très-avancée.	—	—	Presque fini.
» laureola	—	Id.	Générale.	—	—	Générale.
Erica herbacea	—	Id.	Id.	—	—	Id.
Galanthus nivalis	Presque termin.	Id.	Id.	—	Générale.	Presque fini.
Helleborus niger	Terminée.	Terminée.	Terminée.	—	Avancée.	Id.
Lamium purpureum . . .	—	Partielle.	Non observé.	Générale.	—	Commence.
Populus alba	Très-avancée.	Chûte des chatons.	Id.	—	—	0
Prunus armeniaca . . .	—	Partielle.	Générale.	Générale.	Commence.	0
Primula officinalis . . .	Générale.	Générale.	Id.	—	Générale.	—
Rhododendrum dahuricum.	—	Id.	Id. (gelée).	—	—	—
Ribes nigrum	Boutons.	Boutons.	Non observé.	0	—	—
Salix capræa	—	Générale.	Générale.	—	—	0
Ulmus campestris	Générale.	Non observé.	Id.	—	—	—
Viola odorata	Id.	Partielle.	Partielle.	Générale.	Commence.	Générale.
Populus fastigiata	Chatons.	Non observé.	Chatons.	Très-avancée.	—	—
Primula auricula	—	0	Boutons.	—	—	—
Pyrus japonica	Boutons.	0	Id.	—	Boutons.	0
Arabis alba et lilacina . .	Générale.	Non observé.	Commencement.	—	—	—

LIÉGE. — OISEAUX D'ÉTÉ ARRIVÉS AVANT LE 20 MARS.

Ruticilla tithys, le 16 mars.

Motacilla alba, le 17 mars.

INSECTES PARUS.

Colias rhamni, le 12 mars.
Vanessa urticæ, le 12 mars.
» polychloros, le 12 mars.

Apis mellifica, le 2 mars.
Anthophora, le 12 mars.

RÉVEIL.

Vespertilio pipistrellus, le 1er mars.

Rana temporaria, vers le 1er mars.

FLORAISON.

Narcissus pseudo-narcissus, partielle.
Hyacinthus orientalis, générale.
» botryoïdes, partielle.

Amygdalus persica, partielle.
Vinca minor, partielle.

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES. (21 avril 1854.)	BRUXELLES. — (M. A. Quetelet.)	WAREMME. — (MM. Ed. de Selys et Ghaye.)	LIÉGE. — (MM. Ed. de Selys et Dewalque.)	JEMEPPE-SUR-MEUSE. — (M. Alp. de Borre.)	STAVELOT. — (M. Dewalque.)	NAMUR. — (M. Bellynck.)
Feuillaison.						
Arum maculatum	—	1	1	1	3/4	1
Alnus glutinosa	—	1/2	1/4	—	—	3/4
Berberis vulgaris	1	3/4	1	1/2	1/2	—
Betula alba.	3/4	1/4	3/4	1/2	1/4	3/4
Cratægus oxyacantha . .	1	3/4	3/4	—	—	—
Corchorus japonica . . .	1	1/2	3/4	—	—	3/4
Corylus avellana	1	1/2	3/4	1/2	1/4	3/4
Cratægus oxyacanthoïdes .	1	1	1	—	1/2	1
Cornus mascula	1/2	1/2	1/2	—	—	3/4
» sanguinea. . . .	—	1/4	3/4	—	1/2	1/2
Cytisus laburnum. . . .	1/4	Bourgeons.	Non observée.	1/4	—	3/4
Carpinus betulus	1/2	1/4	Id.	1/4	1/4	1/2
Amygdalus persica . . .	3/4	1/2	3/4	—	3/4	1
Æsculus hippocastanum .	1	1/2	1	1	1/8	1
Daphne mezereum . . .	1	3/4	1	—	3/4	1
Lonicera periclimenum . .	1	1	1	1	1/2	1
» xylosteum . . .	1	3/4	1	—	—	1
Larix europea	—	3/4	3/4	3/4	1/2	1
Pyrus japonica	1	3/4	1	—	1/4	1
Prunus padus	1	3/4	Non observée.	1/4	3/4	1
Pyrus cydonia.	—	1/2	1	1/2	—	—
Spiræa sorbifolia	1	1	1	—	—	—
Sambucus nigra	1	3/4	3/4	1	1/2	1
Syringa vulgaris	1	3/4	1	1/2	1/2	1
Salix babylonica	3/4	1/2	3/4	3/4	—	3/4
Prunus armeniaca . . .	—	1/2	1	1	3/4	3/4
» cerasus	3/4	1/2	1	3/4	1/4	3/4
Pyrus communis	1	1/2	3/4	1	1/4	1
Populus fastigiata. . . .	1/2	1/2	1/2	1/4	1/8	1/2
» alba	1/4	1/4	Non observée.	1/4	0	1/2
Sorbus aucuparia. . . .	1	1/4	Id.	—	3/4	—
Ribes uva crispa	1	3/4	1	1	3/4	1
» nigrum	1	1	1	—	1/2	1
» sanguineum . . .	1	3/4	1	—	—	1
» grossularia. . . .	1	3/4	1	3/4	3/4	1
Robinia pseudo acacia . .	1/4	3/4	1/4	1/4	—	—
Tilia europæa	3/4	0	1/4	3/4	—	3/4
Tussilago petasites . . .	—	1/4	Non observée.	—	—	—
Viburnum lantana . . .	—	1/2	Id.	—	—	1
Ulmus campestris. . . .	1/2	1/4	1/2	—	—	—
Viburnum oxycoccos. . .	—	1/2	1	—	—	—
» opulus. . . .	3/4	3/4	3/4	1/4	3/4	—
Rosa rubiginosa	3/4	1/2	3/4	1	—	1

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES.	BRUXELLES. — (M. A. Quetelet.)	WAREMME. — (MM. Ed. de Selys et Ghaye.)	LIÉGE. — (MM. Ed. de Selys et Dewalque.)	JEMEPPE-SUR-MEUSE. — (M. Alp. de Borre.)	STAVELOT. — (M. Dewalque.)	NAMUR. — (M. Bellynck.)
Feuillaison (suite).						
Philadelphus coronarius. .	—	—	1/2	—	1/2	1
Staphylea pinnata . . .	1	Non observée.	3/4	1	—	—
Floraison.						
Arabis alba et lilacina . .	Terminée.	Non observée.	Presque termin.	—	—	—
Anemone hepatica . . .	Id.	Terminée.	Terminée.	Avancée.	—	Finie.
Amygdalus persica . . .	Id.	Finissant.	Id.	—	Générale.	—
Anemone nemorosa . . .	Générale.	Générale.	Générale.	—	Id.	Presque finie.
Buxus sempervirens . . .	Terminée.	Terminée.	Terminée.	Terminée.	Avancée.	Générale.
Bellis perennis.	Générale.	Générale.	Générale.	Générale.	Générale.	Id.
Berberis vulgaris	Commence.	Boutons.	Boutons.	—	0	—
Cratægus oxyacanthoïdes .	Près de s'ouvrir.	Près de s'ouvrir.	Non observée.	—	—	—
Corchorus japonica . . .	Partielle.	0	Partielle.	—	—	Générale.
Cardamine pratensis . . .	—	Générale.	Non observée.	Avancée.	Générale.	—
Caltha palustris	—	Id.	Id.	—	Avancée.	Finie.
Cornus mascula	Terminée.	Terminée.	Terminée.	—	Générale.	—
Crocus vernus	Id.	Id.	Id.	—	—	—
Daphne mezereum . . .	Id.	Id.	Id.	—	Terminée.	—
Galanthus nivalis. . . .	Id.	Id.	Id.	—	—	—
Hyacinthus amethystinus .	Finissant.	Finissant.	Finissant.	—	—	—
Erica herbacea	—	Presque termin.	Terminée.	—	—	Générale.
Hyacinthus botryoïdes . .	Finissant.	Presque finie.	Id.	Terminée.	Terminée.	—
Lamium purpureum . . .	—	Générale.	Générale.	Avancée.	Générale.	Générale.
» album	—	Id.	Partielle.	Générale.	Commençante.	Id.
Leontodum taraxacum . .	Générale.	Id.	Générale.	—	Géuérale.	Id.
Fritillaria imperialis. . .	—	Id.	Id.	—	—	—
Glechoma hederacea . . .	—	Id.	Id.	—	Générale.	Générale.
Tussilago petasites . . .	—	Presque finie.	Non observée.	—	Avancée.	Id.
Prunus padus	Boutons.	Près de s'ouvrir.	Id.	Initiale.	Commençante.	Id.
» cerasus	Presque terminée	Générale.	Générale.	Très-avancée.	Générale.	Id.
Pyrus communis	Id.	Id.	Id.	Id.	Commençante.	—
» malus	Générale.	Commençant.	Id.	Générale.	Boutons.	—
Lonicera xylosteum . . .	Boutons.	Boutons.	Boutons.	—	—	Générale.
Magnolia yulan	Générale.	Générale.	Terminée.	—	—	Id.
Prunus domestica. . . .	Id.	Id.	Générale.	—	Générale.	Id.
» spinosa	Presque terminée.	Id.	Non observée.	Avancée.	Commençante.	Finie.
Pyrus japonica	Générale.	Id.	Générale.	—	Id.	Id.
Ranunculus ficaria . . .	—	Id.	Non observée.	Très-avancée.	Avancée.	Générale.
Prunus armeniaca . . .	—	Terminée.	Terminée.	Terminée.	Id.	Finie.
Senecio vulgaris	Générale.	Générale.	Générale.	Très-avancée.	Générale.	Générale.
Salix capræa	—	Terminée.	Terminée.	Terminée.	Terminée.	—
Primula auricula	Générale.	Générale.	Générale.	—	—	Générale.
» officinalis . . .	Id.	Id.	Id.	—	Avancée.	Id.

Digitized by Google

NOMS DES PLANTES.	BRUXELLES. — (M. A. Quetelet.)	WAREMME. — (MM. Ed. de Selys et Ghaye.)	LIÉGE. — (MM. Ed. de Selys et Dewalque.)	JEMEPPE-SUR-MEUSE. — (M. Alp. de Borre.)	STAVELOT. — (M. Dewalque.)	NAMUR. — (M. Bellynck).
Floraison (suite).						
Primula elatior	Générale.	Générale.	Générale.	Générale.	—	Générale.
» verna	Id.	Non observée.	Id.	Avancée.	Générale.	Id.
Populus virginiana . . .	Chatons tombés.	Chatons tombés.	Non observée.	—	—	—
Narcissus pseudo-narcissus.	Presque terminée.	Terminée.	Id.	—	Avancée.	Finie.
Populus alba	Terminée.	Id.	Id.	Terminée.	Terminée.	Id.
Rhododendrum dahuricum.	—	Id.	Terminée.	—	—	—
Ribes sanguineum . . .	Presque termin.	Générale.	Générale.	—	Générale.	Générale.
» grossularia	Finissant.	Finissant.	Terminée.	—	Id.	Id.
» uva crispa	Id.	Id.	Non observée.	Terminée.	Id.	Id.
» rubrum	Id.	Id.	Finissant.	Presque termin.	Id.	Id.
Viola odorata	Id.	Id.	Presque finie.	Très-avancée.	Id.	Finie.
Ribes nigrum	Générale.	Générale.	Générale.	—	Commençante.	Générale.
Viola tricolor	Id.	Id.	Id.	—	Générale.	Id.
Vinca minor	Id.	Id.	Id.	—	Id.	Id.
Syringa vulgaris	Commencée.	Près de s'ouvrir.	Partielle.	Initiale.	Boutons.	—
Viburnum oxycoccos . . .	Id.	Commencée.	Commencée.	—	—	—
Cheiranthus cheiri . . .	Générale.	Non observée.	Générale.	—	—	Générale.

WAREMME. — OISEAUX ARRIVÉS.

Phyllopneuste trochilus, le 22 mars.
Hirundo rustica, le 24 avril.
Ruticilla luscinia, le 12 avril.
» phœnicurus, le 14 avril.
Motacilla flava, le 14 avril.
Sylvia atricapilla, le 15 avril.
Cuculus canorus, le 15 avril.
Muscicapa ficedula, le 20 avril.

Digitized by Google

État de la végétation au 21 octobre 1854.

NOMS DES PLANTES.	WAREMME.	BRUXELLES.	GRAMMONT.	NOMS DES PLANTES.	WAREMME.	BRUXELLES.	GRAMMONT.
Effeuillaison.				**Effeuillaison** (suite).			
Ligustrum vulgare .	1	1	—	Fraxinus excelsior .	3/4	—	1
Salix babylonica . .	1	1/2	1	Sambucus nigra . .	3/4	3/4	—
Morus alba	1	1	—	Cornus sanguinea. .	3/4	1/2	1/2
Glycine sinensis . .	1	1	—	Liriodendr. tulipifera.	3/4	—	—
Ulmus campestris. .	1	3/4	—	Acer negundo . . .	1/2	—	—
Gincko biloba . . .	1	—	—	Aristolochia sipho. .	1/2	—	—
Cornus mascula . .	1	3/4	—	Ficus carica . . .	1/2	—	1
Cercis siliquastrum .	1	1	—	Larix europæa. . .	1/2	—	1
Bignonia catalpa . .	1	1	1/2	Pyrus communis . .	1/2	1/2	1
Robin. pseudo-acacia.	1	3/4	1	Ribes sanguineum .	1/2	1/2	—
Amygdalus persica .	1	3/4	1	Rubus idæus . . .	1/2	1/2	3/4
Prunus armeniaca .	1	—	1	Pyrus malus . . .	1/2	1/2	3/4
Hydrangea hortensis.	1	1	1	Prunus domestica. .	1/2	1/2	1/4
Staphylea pinnata .	1	1/2	—	Fagus castanea. . .	1/2	—	3/4
Pyrus japonica. . .	1	1/2	—	Prunus padus . . .	1/2	1/2	—
Paulownia imperialis.	1	—	—	Gleditsch. triacanthos.	1/2	—	—
Evonymus europæus .	1	1/2	—	Betula alba	1/4	1/4	1/4
Rosa gallica. . . .	1	1	—	Juglans regia . . .	1/4	—	1/2
Lonicera xylosteum .	1	3/4	—	Ribes nigrum . . .	1/4	0	1
Cratægus oxyacantha.	1	3/4	—	Populus alba . . .	1/4	1/4	1/2
Philadelp. coronarius.	3/4	3/4	1/4	Magnolia tripetala .	1/4	1/2	—
Ribes alpinum. . .	3/4	3/4	1	Sorbus aucuparia . .	0	0	—
Betula alnus . . .	3/4	1/2	—	Ribes grossularia . .	0	0	1/4
Æsculus hippocastan.	3/4	1/2	—	» rubrum . . .	0	0	0
Berberis vulgaris . .	3/4	3/4	1	Populus virginiana .	0	0	—
Syringa vulgaris . .	3/4	1/2	3/4	Tilia europæa . . .	Non observée.	Non observée.	—
Viburnum opulus. .	3/4	3/4	—	Viburnum oxycoccos.	Id.	Id.	—
Cytisus laburnum. .	3/4	3/4	1/2	**Floraison.**			
Carpinus betulus . .	3/4	1/2	3/4	Hedera helix . . .	Générale.	Générale.	—
Quercus robur. . .	3/4	1	1	Helianthus tuberosus.	Id.	Finie.	—
Vitis vinifera . . .	3/4	1	1	Aster.	Avancée.	—	—
Acer pseudo-platanus.	3/4	1/2	1/2				
Fagus sylvatica . .	3/4	—	1	**Fructification.**			
Prunus cerasus . .	3/4	3/4	1/4	Fagus castanea . .	Presque mûr.	—	—

Observations. — Les chiffres indiquent approximativement la quantité de feuilles qui restent : 1 signifie que toutes les feuilles ou à peu près sont encore en place et 0 qu'elles sont entièrement tombées.

Les totaux réunis des deux premières catégories (1 et 3/4) montrent que cette année 1854, l'effeuillaison est moins avancée qu'en 1853 et 1852.

(Edm. de Selys-Longchamps).

Les jeunes feuilles poussées en septembre ont encore toute leur fraîcheur. Les fleurs lilas, qui s'étaient épanouies, sont flétries. (A. Quetelet).

Les poiriers qui avaient fortement souffert de la maladie des feuilles, ainsi que le *Cytisus laburnum*, ont eu une floraison anomale pendant le mois d'octobre.

(M. de Borre).

WAREMME. — OISEAUX D'HIVER ARRIVÉS AU 21 OCTOBRE 1854.

Parus ater, le 30 septembre.
Corvus cornix, 11 octobre.

Grus cinerea (passage), le 13 octobre.

Digitized by Google

État de la végétation au 21 *octobre* 1853.

(Observations faites à Namur, par M. A. Bellynck.)

NOMS DES PLANTES.	NAMUR.	NOMS DES PLANTES.	NAMUR.	NOMS DES PLANTES.	NAMUR.
Effeuillaison.		**Effeuillaison** (suite).		**Effeuillaison** (suite).	
Acer campestris	1/3	Ginkgo biloba	0	Ribes alpinum	2/3
» negundo.	1/3	Glycine sinensis	2/3	» grossularia . . .	2/3
» pseudo-platanus . .	1/3	Hydrangea hortensis . .	1	» nigrum.	1/2
Æsculus hippocastanum .	2/3	Juglans regia.	1/2	» rubrum.	1/2
Amygdalus persica . . .	1	Larix europæa	2/3	» sanguineum . . .	1
Aristolochia sipho . . .	0	Ligustrum vulgare . . .	1	Robinia pseudo-acacia. .	1/2
Betula alba	1/3	Lonicera xylosteum. . .	1	Rosa gallica	2/3
» alnus	1/2	Paulownia imperialis . .	2/3	Rubus idæus	2/3
Bignonia catalpa. . . .	1/2	Philadelphus coronarius .	1	Salix babylonica. . . .	1
Carpinus betulus. . . .	2/3	Platanus occidentalis . .	1/2	» caprea	2/3
Cercis siliquastrum . . .	1/2	Populus alba	1/3	Sorbus aucuparia . . .	1/2
Cornus mascula	1	» virginiana . . .	1/3	Staphylea pinnata . . .	2/3
» sanguinea . . .	2/3	Prunus armeniaca . . .	3/4	Sambucus nigra	2/3
Corylus avellana. . . .	2/3	» cerasus	2/3	Syringa vulgaris. . . .	1
Cratægus oxyacantha . .	1/2	» domestica . . .	1/2	Tilia europæa.	1/3
Cytisus laburnum . . .	1/3	» padus.	1/3	Ulmus campestris . . .	1/2
Evonymus europæus . .	2/3	Pyrus communis. . . .	2/3	Viburnum opulus . . .	2/3
Fagus castanea	1/3	» japonica	2/3	Vitis vinifera	1/4
» sylvatica	2/3	» malus	2/3		
Fraxinus excelsior . . .	1/2	Quercus robur	0		

Observations faites à Jemeppes-sur-Meuse, le 21 *avril* 1854, par M. De Borre.

Oiseaux. — L'*Hirundo rustica* L. est arrivée depuis le commencement du mois, mais elle est encore en petit nombre; je n'ai pas encore vu l'*H. urbica*. La *Sylvia cinerea* Lath. est arrivée depuis un mois; j'ignore si elle a déjà pondu, comme elle l'a fait à Liége. Parmi les autres Fauvettes, la *S. atricapilla* Scop. et la *S. hortensis* Lath. sont déjà chez nous. Il en est de même du Rossignol et du Rougequeue tithys. Les Bergeronnettes (*Motacilla alba* et *M. flava*) sont arrivées; elles sont moins nombreuses et ont été plus tardives que les années précédentes, probablement par suite du froid excessif de décembre; en revanche, les Farlouses sont très-abondantes. J'ai entendu le Loriot. Les Pies et les Choucas couvent. Le *Sturnus vulgaris* L. est apparié et construit son nid. Les Alouettes, le *Fringilla cœlebs* L. et l'*Emberiza citrinella* L. sont dans toute la plénitude de leur chant. Le *Troglodytes europæus*, au contraire, ne chante plus que rarement; il est vraisemblablement très-avancé dans les soins de sa couvée.

Le Coucou est arrivé depuis quelques jours.

La Tourterelle s'est aussi fait entendre.

Reptiles. — La *Rana esculenta* et la *R. temporaria* paraissent avoir terminé leur accouplement. Le *Bombinator igneus* Merr. s'est fait entendre.

Poissons. — L'Alose remonte la Meuse.

Insectes. — Les Carabiques, surtout ceux des rives, sont en très-grand nombre. Il n'en est pas de même des autres Coléoptères, qui semblent être en retard cette année. Les Hannetons, qui ont paru ces jours derniers, semblent être moins nombreux que l'année précédente. Parmi les Hyménoptères, les Abeilles, les Bourdons et les Guêpes ont paru depuis longtemps, ainsi que les Fourmis. Les Papillons commencent à se montrer en grand nombre; le *Pieris cardamines* n'apas encore paru. Les Cousins sont très-abondants.

Les Araignées sont très-abondantes. Le *Gammarus pulex* s'accouple dans les ruisseaux.

Mollusques. — Les *Helix pomatia* et *nemoralis* commencent à se montrer en grand nombre; ils ne s'accouplent pas encore. Il en est de même des Gastéropodes fluviatiles (*Lymnœus, Planorbis,* etc.).

Observations faites à Grammont, le 21 *octobre* 1854, par M. De Borre.

Remarques zoologiques. — Depuis le 15, j'ai cessé de voir l'*Hirundo urbica;* je crois pouvoir affirmer que l'*H. rustica* avait déjà disparu quelques jours auparavant. J'ai vu le Rougequeue tithys, pour la dernière fois, le 14. Les 18 et 19, il est passé de grandes bandes de Corbeaux se dirigeant vers le SO. Les Bergeronnettes et les Farlouses ont commencé leur passage depuis trois semaines environ.

FIN.

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR

LES GUERRES ENTRE LE BRABANT ET LA FLANDRE,

AU QUATORZIÈME SIÈCLE;

PAR

M. DE SMET,

CHANOINE-PÉNITENCIER DE LA CATHÉDRALE DE GAND.

(Présenté à la séance du 20 octobre 1854.)

Hélas! est-ce une loi sur notre pauvre terre
Que toujours deux voisins auront entre eux la guerre?
Que la soif d'envahir et d'étendre ses droits
Tourmentera toujours les *peuples* et les rois?

ANDRIEUX.

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR

LES GUERRES ENTRE LE BRABANT ET LA FLANDRE,

AU QUATORZIÈME SIÈCLE.

Il est peu d'événements dans nos annales que les chroniqueurs et, d'après eux, les historiens ont exposés avec si peu d'ordre et d'exactitude que les guerres du XIV^{me} siècle entre la Flandre et le Brabant : pour les personnes et leurs actions, comme pour les temps et les lieux, il règne le plus souvent dans leurs récits une singulière confusion. Si la mort n'avait pas prématurément enlevé à la science notre judicieux confrère, M. Willems, nos Mémoires se seraient enrichis depuis longtemps d'un travail spécial sur cette époque remarquable, travail qui ne laisserait à coup sûr rien à désirer, sous le double rapport des recherches et de la critique : « Au » moyen de cette publication, » écrivait-il lui-même[1], « on pourra recon- » naître les inadvertances et les erreurs où sont tombés *tous* nos histo- » riens.... Par un mémoire que je présenterai incessamment à l'Académie » des sciences et des belles-lettres de Bruxelles, on verra que l'histoire de » cette guerre n'a été connue d'aucun d'eux, et qu'elle est entièrement à » refaire. » Ne doit-on pas inférer de là que la notice qu'il se proposait

[1] *Brab. Yeesten*, t. II, Introd., p. XII.

Digitized by Google

de publier sur ce sujet était déjà bien avancée quand la mort le surprit? Nous ignorons si l'on en a trouvé quelques traces dans ses manuscrits, mais il est sûr malheureusement que rien n'en a paru.

Nous avons pris à tâche, dans ce Mémoire, de réparer autant que possible une perte si regrettable. Nous n'avons pas assurément une connaissance aussi parfaite de l'histoire de Brabant que celle que possédait M. Willems, mais peut-être avons-nous pu étudier davantage celle de Flandre, tout aussi nécessaire à consulter pour ce travail. Les documents que M. Willems a mis lui-même au jour dans l'un et l'autre *Codex diplomaticus* de ses *Brabandsche Yeesten* et les publications récentes qui lui sont demeurées inconnues, suppléeront d'ailleurs, jusqu'à certain point, à notre manifeste infériorité.

Une des causes principales, croyons-nous, des inexactitudes et des tâtonnements de ceux de nos écrivains qui se sont occupés de la guerre que fit Louis de Male à Wenceslas de Luxembourg, c'est qu'ils l'ont presque tous considérée isolément, tandis que ses causes se rattachent en partie à celle que fit Louis de Nevers au duc Jean III. Nous examinerons par ce motif l'une après l'autre.

PREMIÈRE GUERRE.

CAUSES.

La plupart des historiens à qui l'on doit le récit des guerres que nous avons à examiner, semblent croire qu'il est impossible d'en découvrir les causes réelles. Ils n'ont pas médité sans doute avec assez de soin les documents diplomatiques auxquels ces tristes démêlés entre la Flandre et le Brabant ont donné occasion, car leurs doutes se seraient bientôt dissipés par la lecture attentive de ces pièces.

Quelque instruit et judicieux que soit un écrivain, il s'expose d'ailleurs

Digitized by Google

à mal apprécier les faits, s'il ne les considère sous toutes leurs faces et sans opinions préconçues. Ainsi le savant Papebroch s'est donné le tort de rejeter avec dédain [1] le traité d'alliance conclu, en 1336, entre le duc de Brabant et le comte de Flandre, dont l'authenticité est incontestable. Il ne saurait comprendre, dit-il [2], qu'un prince aussi brave que le duc Jean III ait pu consentir à laisser au comte de Flandre la juridiction de l'Escaut, et jusqu'au *werf* d'Anvers, quand son propre père avait, au contraire, soutenu vivement, en 1304, qu'il tenait lui seul le fleuve en fief du roi des Romains. Peut-être le savant hagiographe n'a-t-il pas remarqué d'abord que le droit de *propriété* sur le lit des fleuves et rivières n'est pas le même que le droit de *justice*, et que ces droits dérivent de chefs différents; de sorte que les droits *régaliens*, qui consistent en actes de souveraineté, ne doivent pas être confondus avec les droits *utiles* ou *domaniaux*, tels que péages, etc. [3]. Il est sûr que les comtes de Flandre avaient possédé de temps immémorial une part dans la souveraineté ou juridiction de l'Escaut, et, par conséquent, des droits régaliens, mais, et c'est ce qui a trompé apparemment le savant Bollandiste, ils n'avaient pas établi des bureaux de péages sur une grande partie du fleuve. Il y a lieu de s'étonner toutefois que Papebroch n'ait pas connu le tarif du tonlieu de Rupelmonde, arrêté sans aucune opposition, en 1271, par la comtesse Marguerite de Constantinople, et portant, parmi beaucoup d'autres stipulations : *Une escute* [4] *se ele vient de Anhwiers et va vers Brabant : elle doit vint derniers al monter, et vint deniers al avaler, soit wide, soit kerkie* [5]. *Et se ele maine ki doive plus grant wienage* [6], *de vint deniers au monter et de vint deniers al avaler*, etc. [7].

Ce tarif suffirait à lui seul pour prouver que, bien longtemps avant

[1] *Annales Antv.*, t. I, p. 110.

[2] Le comte de Flandre ne pouvait, selon lui, posséder un fief impérial, parce que son comté relevait de la couronne de France; mais comment n'a-t-il pas vu que la terre de Waes, qui formait en grande partie la rive gauche de l'Escaut, était elle-même un fief de l'Empire ?

[3] Voyez Raepsaet, *OEuvres compl.*, t. IV, pp. 548 et suiv.

[4] Sorte de barque, du flamand *schuit.*

[5] Soit vide, soit chargée.

[6] Péage établi sur les routes et voies navigables.

[7] Warnkœnig, *Hist. de la Flandre*, t. II, p. 490.

Digitized by Google

Louis de Nevers, l'Escaut était reconnu comme une propriété, même domaniale, des comtes de Flandre.

Cependant le duc Jean II, ajoute le savant annaliste, déclarait, en 1304: *Aqua nostra est, et conductus aquae ad nos spectat : nam dictam aquam feudo tenemus a Domino rege nostro.* Nous le voulons bien; mais on peut uniquement inférer de là que le prince brabançon prétendait dès lors, sans justifier toutefois sa prétention, que l'Empereur lui avait concédé les droits régaliens sur le fleuve. Il en résulte que les débats entre le duc et le comte sur ces droits datent des premières années du XIV^{me} siècle.

De tristes négociations à suivre avec la France et des troubles intérieurs à calmer absorbèrent pendant longtemps toute l'attention des princes flamands et leur firent perdre de vue les prétentions de Jean II; mais la question reparut en 1331. Le comte Louis de Nevers donna l'ordre à Jacques Van Hasselt, châtelain de Rupelmonde, de prendre avec lui cinq échevins de cette ville et cinq hommes de fief de la terre de Waes, et de se rendre à Anvers, pour y faire valoir les droits de la Flandre sur le fleuve. Arrivé au-dessous de la franchise de la ville, le châtelain prit place avec ses hommes entre le monastère de S^{t}-Michel et la tour de Kroonenburg, qu'on nommait alors le *Verloren kost*, et tenant en main une hache d'armes, il proclama à haute voix que les droits du comte sur le fleuve s'étendaient depuis Outemuide [1], au-dessus de Saftingen, jusqu'à Eykevliet, entre Rupelmonde et Malines, et que la souveraineté n'en appartenait qu'à lui seul; et, pour appuyer son dire, il lança de toute la force de son bras la hache dans l'Escaut. Puis, avant de se retirer, Van Hasselt ajouta que les droits du duc de Brabant n'allaient pas au delà de l'endroit nommé Weerst, d'où ce prince pourrait jeter une hache de fer du poids de dix-sept livres, pour marquer les limites de sa juridiction [2].

Cette prise de possession, faite d'après une coutume ancienne et singulière du droit féodal [3], mit un terme à la contestation, disent M. Edw. Le

[1] Peut-être le *Muytscorre* de la carte que M. Willems a donnée dans ses *Mengelingen*.

[2] Acte du 11 janvier 1331, aux archives de Flandre, à Lille, cité par M. Edw. Le Glay.

[3] Elle fut plus tard remplacée par une autre. Les comtes étaient tenus d'entrer à cheval dans la rivière, et leur juridiction cessait à l'endroit que leur épée pouvait atteindre.

Digitized by Google

Glay [1], et, d'après lui sans doute, les auteurs de la savante histoire d'Anvers [2]. Nous ne saurions nous ranger de leur opinion. Quelque imposante que fût la formalité dont s'était servi le châtelain de Rupelmonde, il est évident qu'elle ne pouvait pas mieux établir un droit que la déclaration de Jean II, aussi longtemps que la partie adverse ne renonçait pas à ses prétentions. Or, c'est de quoi l'on ne trouve aucune trace à cette époque. Il y a plus : la guerre commença peu de temps après, et le traité de paix qui intervint plus tard prouve lui-même que la contestation sur l'Escaut était une des causes de cette guerre [3].

Elle aurait pu toutefois se terminer sans effusion de sang, si l'achat de la ville et seigneurie de Malines, qui froissait les intérêts les plus chers du duc de Brabant, n'était venu jeter un nouveau brandon de discorde entre les deux princes.

Si l'on en croit quelques annalistes, Malines aurait été d'abord gouvernée par des comtes, mais leur récit, qui n'a d'autres preuves que les assertions douteuses des légendaires, mérite peu de confiance. Ces comtes, en tous cas, ne pouvaient être des seigneurs héréditaires, mais des gouverneurs délégués par le souverain et amovibles à son gré. Dans les premières années du X^{me} siècle [4], Charles le Simple donna la seigneurie de Malines à l'église de Liége, et l'empereur Othon II confirma cette donation, avec beaucoup d'autres, en 980, à la demande de l'évêque Notger. Ce ne fut qu'au commencement du XIII^{me} siècle que l'avouerie de ce domaine, toujours exposé à devenir la proie des Brabançons, fut concédée, par les évêques de Liége, à la famille des Berthout [5], branche cadette de celle des seigneurs de Grimberge. C'était là un expédient dangereux. Vassaux des ducs de Brabant pour leurs autres possessions et sûrs de leur appui, les Berthout ne rendirent bientôt qu'un hommage de pure forme aux princes-évêques, et prirent même, dès 1251, le titre de seigneurs de Malines [6].

[1] *Histoire des comtes de Flandre*, t. II, p. 395.
[2] *Geschiedenis van Antw.*, t. II, p. 62.
[3] Voyez De Klerck, *Brab. Yeesten*, t. I, v. 2737 et suiv.
[4] Quelques auteurs disent en 910, d'autres en 915.
[5] Van Gestel, *Hist. archiep. Mechl.*, t. I, p. 5.
[6] Miraei *Notitia eccl. Belgii*, t. I, p. 767.

Digitized by Google

Pendant tout le reste du siècle, ils y disposèrent de tout, sans tenir aucun compte des droits de l'église de Liége; mais ces droits n'en subsistaient pas moins, et le duc de Brabant, Jean II, les reconnut formellement lui-même en acceptant (1300) pour lui et ses successeurs, jusqu'au troisième héritier inclusivement, le transport des droits et juridictions de l'église de Liége à Malines, à la condition toutefois qu'il mettrait tout en œuvre pour arrêter les usurpations des Berthout. Le duc avait d'autres vues : il espérait qu'en flattant les Berthout, trop faibles d'ailleurs pour lui porter ombrage, et en accordant de nouveaux priviléges aux Malinois, il assurerait pour toujours la seigneurie à sa maison.

Il se vit bientôt détrompé. Le chapitre de S^t-Lambert et le peuple liégeois avaient désapprouvé hautement la transaction souscrite par leur évêque, et quand Thibaut de Bar fut élevé au siége épiscopal, il se hâta d'en appeler à Rome, soutenant que son prédécesseur, Hugues de Châlons, n'avait pu aliéner la seigneurie de Malines sans le consentement du chapitre, parce qu'elle n'appartenait pas à l'évêque, mais à l'église de Liége. Le pontife faisant droit à cette juste réclamation, annula la cession faite à Jean II et obligea le duc, sous peine d'excommunication, à rendre Malines [1]. Cette sentence sortit son effet, et Thibaut de Bar sut profiter de l'ascendant qu'elle lui assurait, pour établir l'administration de l'État sur les meilleures bases et affermir les droits de son église contre les usurpations des Berthout; il compléta l'organisation du régime communal par un sage règlement, et fit un accord avec Gilles Berthout, comme son avoué, pour définir leurs pouvoirs respectifs.

Cet état de choses dura jusqu'au décès de Thibaut. Son successeur, Adolphe de la Marck, toujours en guerre avec la noblesse ou le peuple de Liége et de là toujours en besoin d'argent, ne sut point empêcher Florent Berthout, le dernier seigneur de cette famille, de reprendre les errements de ses prédécesseurs. Il céda même, avec le consentement du pape et du chapitre de S^t-Lambert, tous ses droits sur Malines au comte Guillaume de Hainaut pour 15,000 florins, mais seulement jusqu'au rem-

[1] Butkens, *Trophées du Brabant*, t. I, p. 360.

Digitized by Google

boursement de cette somme. A son exemple, Florent Berthout vendit ses droits réels ou contestés au même prince, et Guillaume se crut assuré de pouvoir unir pour toujours ce beau domaine à ses autres États. Mais le nouveau duc de Brabant, qui ne pouvait voir de bon œil cette augmentation de puissance dans la maison d'Avesnes, mit tout en œuvre pour renverser les plans de Guillaume, et y réussit en suscitant au comte des difficultés et des tracasseries de tout genre. La seigneurie revint à ses anciens maîtres.

Cependant l'évêque de Liége, toujours obéré, engagea de nouveau ses possessions de Malines au comte de Flandre, Louis de Nevers, pour une somme de 20,000 florins [1], et fit encore ratifier cette convention par son chapitre [2], en 1328. Enfin, l'année 1333 ayant réuni, à Cambrai, le prince flamand et ses conseillers avec quelques chanoines de Liége, ceux-ci proposèrent de vendre au comte la seigneurie de Malines pour une somme de 100,000 réaux d'or [3], et Louis accepta la proposition, d'après les conseils de Guillaume d'Auxonne, son principal ministre. La ratification de l'évêque et du chapitre de S^t-Lambert s'obtint aisément, à condition toutefois que le comte tiendrait Malines en fief de l'église de Liége et qu'il ne séparerait jamais dans la suite sa nouvelle acquisition de ses autres États [4]. Le comte désintéressa Marguerite de Gueldre, dernière héritière des Berthout, en lui payant une somme de 60,000 livres tournois.

A la nouvelle de ce traité, les Brabançons protestèrent vivement, le déclarant nul de plein droit. D'abord, dit De Klerck [5], l'évêque n'avait

[1] *De consensu capituli*, dit Corn. Zantfliet, *obligat Machliniam comiti Flandriae pro viginti millibus florenorum regalium.* Dans l'*Ampl. coll.*, t. V, col. 192.

[2] Le chapitre se rendit même caution pour 8,000 autres florins.

[3] *Voor de somme van hondert en LX duysent sconincx schilden*, dit Despars, *ofte van hondert duysent guldenen, naer die vlaemsche maniere rekenende.* Le *Memorieboek der stad Ghent* porte 160,000 royaux, monnaie de France, pour tout l'achat.

[4] Zantfliet ajoute que le comte dut aussi se reconnaître vassal de Liége pour *Bornhem* et *Grammont.* Il ne se trouve aucune trace de ce fait dans les chroniques flamandes, et, dans la formule de l'hommage que prêta Louis et que publie Zantfliet lui-même, il n'en est pas fait la moindre mention. Ces places ont toujours fait partie de la Flandre allodiale, et du diocèse de Cambrai jusqu'au XVI^e siècle.

[5] *Brab. Yeest.*, t. I, v. 2647 et suiv.

Digitized by Google

pas le droit de le conclure :

Welke coep was sonder cracht;
Want de bisschop en hadde ghene macht
Te vercoepene der kerken goet
Daer syn lyftocht maer aen stoet [1].

Le duc de Brabant soutenait ensuite que ni l'évêque, ni l'avoué ne pouvaient sans son consentement disposer d'un domaine qui relevait de son duché. Le motif allégué par De Klerck n'avait aucune valeur, dès lors que le chapitre de S^t^-Lambert avait souscrit au traité : or, c'était là un fait incontestable. Quant aux prétentions de Jean III, jamais la seigneurie de Malines n'avait relevé du Brabant, mais quelques villages seulement de l'ancien domaine des sires de Grimberge avaient reconnu cette suzeraineté. De plus, l'accord conclu, en 1307, entre l'évêque Thibaud de Bar et Gilles Berthout [2], avait déclaré que les villages de Hever, Muysen, Hombeeck, Heffen, Leest, Nieuwland et Neckerspoel, avec leurs dépendances, faisaient partie du domaine et de la juridiction de l'évêque de Liége.

On sentit bientôt qu'il faudrait d'autres armes que des arguties du droit féodal pour terminer ce différend.

HOSTILITÉS.

Malines était habité par un peuple remuant et belliqueux. Après l'accord éphémère que Jean II avait conclu avec Hugues de Châlons, les Malinois avaient fait une guerre assez vive au duc, quoiqu'ils en eussent obtenu de grands priviléges; il ne fut donc pas difficile à son successeur de les irriter contre Louis de Nevers, dont l'administration pesait lourdement sur la Flandre et ne pouvait inspirer qu'une violente opposition au peuple qu'on lui livrait à prix d'argent. A peine les Malinois eurent-ils appris que les députés du comte étaient arrivés, avec ceux du chapitre de Liége, pour exiger le serment de fidélité à leur nouveau seigneur, qu'ils se sou-

[1] « Cet achat était sans valeur, car l'évêque ne pouvait pas vendre les biens de l'église, dont il n'avait que l'usufruit. »

[2] Van den Branden de Reeth, *Recherches sur la famille des Berthout*, p. 148.

Digitized by Google

levèrent, et ils les eussent mis à mort, s'ils n'étaient parvenus à leur échapper par la fuite. Quoique souvent hostiles aux Brabançons, les Malinois appelèrent ensuite à leur secours le duc de Brabant, et Jean III ne se fit pas faute de mettre l'occasion à profit.

Vivement outré, au contraire, de voir ses envoyés honteusement chassés et ses prétentions méconnues, le comte de Flandre se promit d'en tirer une vengeance éclatante. Il fit d'abord mettre sous séquestre tous les biens que les Malinois possédaient dans ses pays, et défendit à ses sujets tout commerce avec eux, aussi longtemps qu'ils se refuseraient à lui rendre hommage comme à leur seigneur. L'attitude qu'avait prise le duc de Brabant l'obligea bientôt à des mesures plus efficaces. Dans une réunion qui eut lieu à Valenciennes, le 6 janvier 1333, il renoua une confédération, formée, l'année précédente, contre Jean III, et réussit à rattacher à sa cause un grand nombre de seigneurs puissants, parmi lesquels on distinguait Jean de Luxembourg, roi de Bohême, l'archevêque de Cologne, les comtes de Hainaut, de Namur, de Juliers et Gueldre, l'évêque de Liége et le sire de Fauquemont [1]. Quand tous eurent apposé leur sceau au traité d'alliance offensive et défensive contre le duc de Brabant, quinze hérauts partirent à la fois pour Tervueren, où se trouvait ce prince, et lui déclarèrent la guerre, chacun au nom de son maître respectif [2]. Le duc n'avait d'autres alliés que le roi de France et le comte de Bar, et le premier ne paraissait pas bien dévoué, car il nous chante lui-même [3] :

Vrient ende mage gaens mi ave,
Sonder van Baren die edel grave;
Alle dragen si op mi haet [4].

Dans un conseil que tinrent les seigneurs coalisés, le comte de Flandre promit, de son côté, qu'il taillerait assez de besogne au duc, pour l'empêcher de leur faire beaucoup de résistance au delà de la Meuse; il protesta que, pour lui-même, il ne voulait que la seigneurie de Malines et ses droits

[1] Butkens, *Trophées de Brabant*, t. I, p. 403.
[2] *Brabandsche Yeesten*, t. I, v. 2771 et suiv.
[3] *Belgisch Museum*, t. I, p. 295.
[4] « Amis et proches me délaissent, sauf le noble comte de Bar; tous me poursuivent de leur haine. »

Digitized by Google

sur l'Escaut. Le plan qu'il avait proposé fut suivi, et pendant plusieurs mois, le Brabant fut entouré par les troupes des alliés et tellement enveloppé, que De Klerck le compare naïvement à une poule renfermée dans une cage et qui ne peut fuir ou s'échapper, parce qu'il n'y a pas la moindre issue [1]. Les Flamands commencèrent les hostilités : une partie de leurs troupes sortie de Termonde, dévasta par le fer et le feu les environs de Lippeloo et de Malderen; mais le duc, qui se tenait de sa personne à Assche, prit bientôt sa revanche en incendiant les villages flamands, jusqu'aux portes d'Alost et de Termonde. Son excursion fut cause que l'abbaye d'Affligem, déjà abandonnée par les religieux, fut à son tour livrée aux flammes par les milices du comte Louis, ainsi que le château de Walcourt [2] et autres domaines du sire de Lennick qui leur faisait une rude guerre.

D'une autre part, Conrad de la Marck, frère de l'évêque de Liége, prit Landen et y mit le feu, tandis que le roi de Bohême ravageait le Limbourg, que le comte de Gueldre s'emparait de Thiel et de Sittaert, et que celui de Juliers prenait le château de Rode, sans se laisser entamer par le duc de Brabant, qui était accouru à marches forcées pour faire lever le siége.

Ces succès étaient peu décisifs, et, de leur côté, les Flamands essuyaient des revers. Après avoir surpris, à Assche, le sire de Cranendonck et quelques autres chevaliers, ils avaient de nouveau brûlé ce bourg et se proposaient d'en faire de même à Bruxelles, quand ils se virent attaqués à l'improviste par les comtes de Bar et de Nassau à la tête de plus de 3,000 hommes, tant cavaliers que fantassins [3]. Bien qu'extrêmement inférieurs en nombre, ils acceptèrent vaillamment le combat, et un d'entre eux, Renier Van Crombrugghe, renversa de cheval le comte de Bar lui-même; mais ce sei-

[1] *Wat sal Brabant nu doen?*
Het sit besloten als een hoen
Dat in een kevie sit ghevaen,
Dat vlien en mach noch uut gaen;
Ten hadde een gaetken niet open.
(*Brab. Yeesten*, t. I, v. 2777 et suiv.)

[2] Situé près de Gaesbeek.

[3] Despars, *Chron. van Vlaenderen*, t. II, p. 311.

Digitized by Google

gneur, qui n'était pas blessé, se remit bientôt en selle, et la lutte continua pendant quelque temps avec une nouvelle ardeur. Un stratagème hâta la défaite des Flamands. Ils portaient des casques d'une forme particulière, nommés *huven met kaken* [1], qui ne protégeaient point le visage. Un des chefs brabançons l'ayant remarqué, ordonna aux siens de porter leurs coups à la figure des ennemis, et ceux-ci, couverts de sang, furent bientôt mis en déroute. Plusieurs furent obligés de se rendre et dirigés, comme prisonniers de guerre, sur le château de Bueren ou sur Louvain. Une chronique rimée peint assez bien le combat en ce peu de mots [2] :

Int jaer XXXIII so ontfingen scade
De Vlaminghe bi dommen rade
Ten Hallekine [3] *daer si gherochten,*
Ende ieghen de Brabanders vochten,
Dar hem aensichte ende nuesen waren
Van den Brabanders sonder sparen
Dorhouwen met leeliken teekenen [4].

Cette lutte sanglante eut lieu dans un endroit nommé *Ten Hellekine,* aujourd'hui *Ten Helleken* [5], qu'on a cherché inutilement à Hekelghem et à Zellich [6], mais qui est un hameau dépendant de la commune de Lennick-S^t-Quentin, où, d'après leur pieuse coutume, nos ancêtres bâtirent plus tard une chapelle en mémoire des guerriers tués dans le combat. Un chroniqueur ajoute que ce fait d'armes donna lieu à un proverbe; que lorsqu'un homme était blessé au visage, on lui disait : *Vous avez été à Ten Helleken* [7].

[1] *Corpus chron. Flandr.*, t. I, p. 229.
[2] *Reimchronik van Flandern*, ed. Kausler, v. 8047.
[3] *Parvus infernus,* comme traduit Meyer.
[4] « Les Flamands subirent un échec, en l'an XXXIII, par leur imprudence à Hallekine. Ils y vinrent aux mains avec les Brabançons et soutinrent le combat, mais leurs visages et leurs nez y furent horriblement marqués par le fer ennemi. »
[5] Et non *Tennelleken,* comme écrit M. Havard, d'après des documents officiels.
[6] M. Edw. Le Glay y a vu un village du nom de *Kelleken*.
[7] *Ja, ghi hebt ten Hellekine ghesijn.*

Digitized by Google

TRAITÉ DE PAIX.

Cependant ces succès balancés n'amenaient aucun résultat et se bornaient au pillage et à l'incendie des cantons voisins du théâtre de la guerre. Le roi de France, qui se présentait plutôt comme médiateur que comme allié du duc de Brabant, se mit en devoir de rendre la paix au pays. Il envoya l'archevêque d'Aix, l'archiprêtre de Reims et l'abbé de St-Nicaise au camp de l'évêque de Liége devant Maestricht, pour amener les parties belligérantes à une trêve, et l'obtint en effet, le 21 mars 1334. On négocia ensuite à Cambrai et, le 26 août, le roi dicta, en qualité d'arbitre élu par le duc Jean et les confédérés, les articles de paix. La plupart ont peu ou point de rapport avec notre sujet, et quant à la question capitale de la possession de Malines, le roi retenait cette ville entre ses mains, promettant d'en disposer plus tard et après mûr examen par une sentence arbitrale. Mais comme il différait toujours de se prononcer, les deux princes se réunirent à Termonde et signèrent, le 31 mars 1336 [1], un traité d'alliance qui mettait un terme à tous leurs différends. Le duc de Brabant y reconnaît, et le comte de Flandre avec lui, que les princes sont tenus *de garder leurs peuples de tous griefz, mauls et périles, à leur loyal povoir*, et, par conséquent, de faire ensemble une alliance perpétuelle.

Il y est statué, d'abord, que dorénavant le duc et le comte, ainsi que leurs successeurs, posséderont la seigneurie de Malines en commun, de la même manière que l'évêque de Liége et Marguerite de Gueldre l'ont possédée, le duc ayant sa moitié en fief du comte de Flandre et celui-ci la sienne du duc de Brabant, sans préjudice de l'hommage que le comte doit à l'évêque de Liége. On conservera aux Malinois leur échevinage, leurs lois et leurs priviléges. Les deux princes gouverneront la seigneurie de commun accord et y nommeront ensemble les échevins, l'écoutète et le receveur; les revenus seront perçus par ce receveur commun, qui sera

[1] Nous ignorons pourquoi M. Edw. Le Glay a donné à ce traité la date du 1er avril.

Digitized by Google

tenu de rendre ses comptes à leurs députés ou commissaires. Les princes ne pourront battre monnaie à Malines, si ce n'est de consentement mutuel. Les habitants de Blydenberge seront particulièrement sujets au comte et ceux de Neckerspoel [1] au duc. Finalement, ni l'une ni l'autre des parties contractantes ne pourra bâtir un château ou fort dans l'étendue de la seigneurie, à moins que ce ne soit de commun accord.

Quant aux débats qui existent sur la propriété de l'Escaut, il est convenu qu'au comte de Flandre seul appartiennent *toute justice, droiture et seigneurie partout sur le stroom du fleuve, si avant que nefs puent floter*, excepté devant Anvers et près de cette ville, d'après les bornes qui seront fixées plus tard. Les Anversois donneront en reconnaissance au comte de Flandre tous les ans, pendant les fêtes de Noël, une paire d'éperons dorés.

Suivent quelques stipulations, pour assurer aux Brabançons la liberté de la navigation, en réglant les mesures à prendre dans certaines éventualités, et pour confirmer les droits du comte de Flandre sur le Rupel jusqu'à Eykevliet [2].

Ce traité [3] termina la première guerre.

SECONDE GUERRE.

CAUSES.

Un des auteurs de la *Chronique des comtes de Flandre* [4], que nous avons citée plus haut, prétend que Louis de Nevers ne gagna rien à l'achat de Malines qu'une guerre dangereuse contre le duc de Brabant et qu'il

[1] Cet endroit, qui conserve encore ce nom singulier (*Marais* ou *puits du Diable*), est aujourd'hui un hameau dépendant de Malines; mais il formait autrefois une seigneurie à part, ayant des droits et des franchises propres.

[2] Hameau qui dépend de Hingene.

[3] Il est imprimé en entier dans les *Brab. Yeesten*, t. II, pp. 441 et suiv.

[4] *Chronicon comitum Flandrensium*, dans le *Corpus chron. Flandr.*, t. I, p. 210.

Digitized by Google

y perdit à la fois la seigneurie qu'il désirait et les sommes qu'elle avait coûté [1]. Peut-être écrivait-il avant la signature du traité d'alliance et de confédération dont nous venons d'indiquer les conditions principales, mais en tout cas, il n'aurait pu parler ainsi, s'il en avait connu la teneur. La question de l'Escaut y est décidée finalement en faveur des comtes de Flandre, au point que le P. Papebroch, comme nous avons vu, se refuse à croire à la convention par ce seul motif. Ensuite, la possession de Malines, en commun avec le duc de Brabant, avait à coup sûr des avantages réels pour le comte.

Le duc en était bien persuadé lui-même : profitant avec habileté de la détresse où se trouvait le comte de Flandre, par suite du soulèvement presque général de ses sujets, en 1346, il racheta les droits du prince sur Malines, pour une somme de 86,500 réaux d'or [2]; à charge toutefois de procurer à ses frais l'absolution du serment, que Louis avait prêté à l'évêque de Liége, de ne point vendre ou aliéner la seigneurie sans son consentement. Mais le chapitre de S^t-Lambert y mit tant d'obstacles en cour de Rome que le duc ne parvint jamais à obtenir cette absolution [3], et la vente demeura, par suite, entachée de nullité; aussi, pour ne pas s'exposer à une perte considérable, eut-il soin de garder les sommes promises.

Le comte Louis n'eut guère le temps de s'en occuper davantage : toujours attaché à la France et plein de ce dévouement qui lui avait aliéné le cœur des Flamands, il périt, dans la même année, à cette funeste bataille de Crécy, qui faillit mettre sur le front d'Edouard d'Angleterre la couronne de saint Louis. La mort imprévue du comte rendit encore infructueuse la dispense du serment prêté à l'évêque de Liége, que le pape Clément VI venait enfin d'accorder [4].

Le fils unique de ce comte, nommé Louis de Male du lieu de sa nais-

[1] *Villam non habuit, immo guerram validam contra ducem Brabantiae, nec etiam pecuniam exhibitam usque ad praesens potuit rehabere.* Cet *usque ad praesens* semble prouver que cette partie de la chronique est due à un contemporain.

[2] D'après Despars : *LXXXVII duyst en vijf hondert guldenen.*

[3] Butkens, *Trophées de Brab.*, t. I, p. 434.

[4] *Brab. Yeesten*, t. II, p. 461.

Digitized by Google

sance, avait été blessé à côté de son père, mais peu dangereusement. Philippe de Valois en profita cependant pour retenir à sa cour ce jeune homme, à peine âgé de seize ans, et l'attacha comme son père aux intérêts de la France si opposés aux intérêts réels de la Flandre. Par le même motif, il lui inspira un vif dégoût pour le mariage anglais que lui proposaient les Flamands, et parvint à lui faire épouser la fille puînée du duc de Brabant, à laquelle il avait d'ailleurs été fiancé dans son enfance.

Le roi lui fit présent à cette occasion de la seigneurie de Termonde, qu'il avait acquise récemment [1] de Marie de Nesle, épouse du sire d'Amboise.

Quoiqu'il crût s'être assuré la possession de Malines, en donnant sa fille en mariage à son jeune rival, le duc Jean III n'était pas sans crainte pour l'avenir de sa famille : ses fils légitimes [2] étaient morts en bas âge et ses trois filles étaient mariées à des seigneurs assez puissants pour morceler ses domaines, s'ils écoutaient leur ambition. Il résolut donc de reconnaître pour ses seuls héritiers sa fille aînée Jeanne, avec Wenceslas de Luxembourg, son époux, et de ne laisser que des sommes d'argent aux comtesses de Flandre et de Gueldre. Il crut avec raison que, pour avoir les résultats qu'il en désirait, ces dispositions devaient être soumises à l'approbation des villes de ses États, approbation qu'il obtint [3] dans une réunion de leurs députés, qui eut lieu à Louvain le 8 mars 1355 (n. st.). Après l'accomplissement d'une mesure qu'il espérait être suffisante pour conserver à la duchesse Jeanne ses états sans partage, Jean III mourut en paix vers la fin de la même année.

Il était cependant peu difficile de prévoir que cet acte n'aurait jamais la valeur qu'on lui supposait, s'il n'était soutenu par un prince prudent, valeureux et ferme, et tel que n'était point Wenceslas de Luxembourg,

[1] Termonde avait des seigneurs particuliers, vassaux des comtes de Flandre. La donation de Philippe de Valois ne sortit ses effets qu'au décès de Marie de Nesle.

[2] Les historiens ont flétri avec raison les mœurs dissolues de Louis de Male; mais pourquoi ne blâment-ils pas également celles de Jean III? Butkens le nomme un prince modéré dans toutes ses actions, qu'on *ne saurait taxer de vicieux*, et cependant lui-même nous fait connaître quinze enfants naturels du même duc.

[3] *Luyster van Braband*, t. I, p. 124.

Digitized by Google

quand on avait surtout beaucoup à craindre de l'ambition du comte de Flandre, dont la vie privée était très-répréhensible, mais qui ne manquait pas de sens politique et de bravoure.

Des historiens modernes [1] reprochent aux Brabançons d'avoir commis une lourde faute en n'admettant pas les Malinois à l'assemblée de Louvain et en refusant formellement de reconnaître la seigneurie comme membre du pays de Brabant. Cette décision devait en effet leur faire beaucoup de tort dans l'esprit de ceux de Malines; mais est-on sûr qu'ils auraient pu justement prendre une autre décision, quand les droits du duc sur Malines étaient encore bien contestables?

L'affaire n'était pas terminée à la mort de Louis de Nevers. Son successeur avait à la vérité renouvelé la cession, mais au prince Henri, fils de Jean III, dont la mort prématurée avait de nouveau annihilé la transaction. Malines relevait d'ailleurs toujours de l'église de Liége; on n'en pouvait pas disposer sans le consentement de l'évêque et du chapitre, qui avaient obstinément refusé de la céder au Brabant. Comment les villes brabançonnes auraient-elles pu trancher une question si ardue?

Il est surprenant après cela de voir les auteurs hésiter à reconnaître les causes de la guerre qui se préparait, ou recourir, à cet effet, à un conte populaire au-dessous de la critique et peu fait, quand on le supposerait fondé, à causer ces hostilités [2].

LUTTE ARMÉE.

Le Brabant célébrait encore le joyeux avénement de ses nouveaux souverains et se réjouissait des priviléges qu'ils lui accordaient, quand on apprit que le comte de Flandre marchait sur Malines, *afin de reprendre un héritage paternel*, comme parle son chancelier [3], *qu'on voulait lui enlever par*

[1] *Geschiedenis van Antw.*, t. II, pp. 252 et 253.

[2] Il avait, disait-on, puni sa femme coupable d'un acte cruel de jalousie, par une prison perpétuelle. Ce n'est là qu'une fable mal imaginée. Quoique très-licencieux dans ses mœurs, Louis aimait cette princesse qu'un chroniqueur appelle *singularis elegantiae domina*, et qui fit, après la guerre, son entrée solennelle à Malines et à Anvers.

[3] Sohier De le Beke. Voyez *Brab. Yeesten*, t. II, p. 416.

Digitized by Google

la force. Soit par mécontentement du refus qu'elle avait essuyé à Louvain, soit par espoir d'obtenir de Louis d'importants priviléges pour son commerce, Malines ouvrit avec empressement ses portes à l'armée du jeune comte et lui rendit foi et hommage, comme à son seigneur légitime. Celui-ci se hâta de consolider son pouvoir en confirmant les anciens priviléges de la seigneurie, et en établissant à Malines l'étape ou marché du poisson, de l'avoine et du sel; en même temps il fit le relief obligé de ce domaine à l'évêque de Liége, et peu après, Engelbert de la Marck, qui occupait alors le siége de S^t-Lambert, exhorta par lettres les Malinois à reconnaître le comte pour leur véritable seigneur.

Avant de quitter Malines, qu'il mit sagement en état de défense [1], Louis somma Wenceslas et Jeanne de faire un partage équitable des États qu'avait possédés leur père; mais, comme il l'avait prévu sans doute, il vit sa demande hautement rejetée. Il en fut de même quand il réclama les six vingt mille écus que Jean III avait assignés pour la dot de sa femme. L'invasion de la seigneurie de Malines semblait motiver suffisamment l'un et l'autre de ces refus.

Il fallut donc recourir aux armes. Le comte de Flandre, suivi cette fois de bon gré par les milices de Bruges, d'Ypres et surtout de Gand, rassembla une armée assez considérable sur les frontières du Brabant, et ravagea de nouveau les malheureux villages qui étaient limitrophes de ses terres d'Alost et de Termonde. Les Brabançons, de leur côté, serraient de près les possessions de Malines, qui, par sa prompte soumission au comte, les avait vivement irrités. L'abbaye d'Affligem, dont Wenceslas avait fait une forteresse redoutable, était défendue par une garnison de cinq cents hommes d'armes, la plupart de Bruxelles et choisis parmi les plus braves du pays. Aussi les Flamands ne s'avancèrent-ils pas au delà et s'arrêtèrent-ils, après quelques escarmouches, à Bouchout, hameau dépendant de Hekelgem, comme le rapporte la *Reimcronik* éditée par Kausler [2].

[1] *Die stat besette hy wyslyc,*

dit le continuateur de De Klerck.

[2] *Dies trac hi* (de graef) *met machte,*
In Brabant, up eene sente Jans nachte
Tote up t' Bouchout voorwaer.

Digitized by Google

Une troupe de mille hommes sortit de Termonde, alla peu après [1] investir l'église de Malte [2], qu'on avait changée aussi en place forte et pourvue d'une bonne garnison; mais le désordre se mit parmi eux, et par suite, une terreur panique les fit fuir avec précipitation. Quelques Brabançons se mirent à les poursuivre, leur firent cinquante prisonniers et en tuèrent quarante autres, parmi lesquels on regretta particulièrement un citoyen notable de Termonde, surnommé *Langen Jan* [3].

Les Anversois, dont les intérêts étaient gravement lésés par l'établissement de l'étape du poisson, du sel et de l'avoine à Malines, avaient commencé plus tôt les hostilités [4]. « Ceux d'Anvers surtout, dit le continuateur » de De Klerck [5], parcouraient tout le pays de Waes, et presque jusqu'aux » portes de Gand, et causaient partout de grands dommages. Le comte » Louis de Male en fut extrêmement irrité et se promit bien de faire » payer cher aux Anversois ces déprédations. » Ils paraissaient cependant se soucier fort peu de sa colère et n'en continuaient pas moins leurs courses. Le 6 août, un de leurs détachements descendit vis-à-vis d'Austruweel pour piller et brûler les fermes de la commune de Swyndrecht. Quelques habitants du pays de Waes, réunis à la hâte et peu préparés à une expédition semblable, marchèrent à leur rencontre et engagèrent un combat, où les deux parties firent de grandes pertes, mais dont l'issue fut favorable aux Anversois. Ceux de Waes y perdirent Simon de Coudenborch, que le comte leur avait donné pour commandant, et Wulfart Villain, récemment créé chevalier, que les Anversois emmenèrent prisonniers. Ils eurent à pleurer la perte du grand bailli, Pierre De Leene, du haut échevin

[1] Cette échauffourée eut lieu le 3 août.
[2] Probablement Malderen.
[3] *Corpus chron. Flandriae*, t. III, p. 27.
[4] Au printemps de 1356, à ce que pense M. Willems.

[5] *Die van Antwerpen sonderlinghe*
Die doorreden al omtrent
Dlant van Waes, al tot bi Gent,
Daer si grote scade in deden;
Des seere qualyc was te vreden
Van Vlaenderen Lodewyc die grave, etc.
(*Brab. Yeest.*, t. II, v. 1016.)

Digitized by Google

Gilles Vaentkin, de l'écoutète de Lokeren et de plusieurs autres notables qui avaient trouvé la mort après s'être distingués par leur bravoure.

Dix jours après, une flottille de quatorze grands bâtiments et d'un plus grand nombre de moindre tonnage arriva de l'Écluse au secours des Flamands. Unis à ces auxiliaires, les guerriers de Waes firent à leur tour une descente dans le pays ennemi, et mirent le feu aux villages de Lillo, Ordamme[1] et Coustelle[2], après avoir tué près de cinquante hommes[3].

CONFÉRENCE D'ASSCHE.

Jusqu'à cette époque cependant, la guerre ne paraissait pas acharnée : Louis de Male, qui avait écrit à son beau-frère une lettre, où il ne lui accorde d'autre titre que celui de duc de Luxembourg et lui déclare assez clairement la guerre, prêta bientôt l'oreille à des paroles de réconciliation. Une entrevue fut fixée, pour traiter de la paix, à Malines, ou près d'Affligem, selon les uns, mais beaucoup plus probablement à Assche[4], selon les autres. Les savants auteurs de la nouvelle *Histoire d'Anvers* affirment que les deux beaux-frères ne purent s'y entendre et que la négociation finit par des injures et des récriminations mutuelles[5]; mais les documents contemporains sont fort loin de justifier cette assertion. Le chancelier de Flandre, Sohier De le Beke, employé lui-même à l'œuvre de la paix, déclare positivement, *que par les soins de quelques hommes des deux parties, il se fit un accord, et qu'on se donna mutuellement des sûretés et des lettres scellées, pour en assurer le maintien et l'entière exécution; que, par suite de cet accommodement, les députés se quittèrent pour s'en retourner dans leurs foyers, et que le comte de Flandre, croyant que l'accord s'était fait avec*

[1] *Noordam* ou *Oordam*, aujourd'hui *Oorderen*.
[2] Village entre *Oorderen* et *Austruweel*, que les guerres ont détruit. Voyez la carte ancienne que M. Willems a donnée dans ses *Mengelingen van vaderl. inhoud*, p. 553.
[3] *Corpus chron. Flandriae*, t. III, p. 28.
[4] Les lettres de Wenceslas relatives à cet objet sont datées d'Assche.
[5] *Geschiedenis van Antw.*, t. II, p. 256.

Digitized by Google

loyauté et bonne foi, espéra et se tint pour assuré que les deux princes et les deux pays jouiraient désormais d'une paix réelle[1].

Le chroniqueur Corneille Zantfliet n'est pas moins positif : *L'an* 1356, dit-il [2], *une diète s'étant réunie entre Wenceslas et le comte de Flandre, près de l'abbaye d'Affligem, ordre de Saint-Benoît, pour y traiter de la paix entre ces deux princes, quelques prud'hommes vertueux conclurent honorablement un heureux traité de paix pour le salut de la patrie, de manière à contenter raisonnablement les deux seigneurs.* Les lettres qu'écrivit Wenceslas à cette occasion [3] témoignent elles-mêmes de ses intentions pacifiques.

Comment un traité qui semblait satisfaire les deux parties et porter toutes les garanties désirables fut-il presque aussitôt rompu que signé? Quand les députés du comte se présentèrent au jour fixé pour terminer l'arrangement qui avait été conclu dans la transaction, ils se trouvèrent seuls et apprirent, à leur grande surprise, que les députés de Brabant à la conférence d'Assche avaient été arrêtés et jetés en prison. Le chancelier de Flandre en accuse Wenceslas et Jeanne [4]; mais la chose paraît d'autant plus invraisemblable que, selon le continuateur de De Klerck [5], le duc se trouvait alors à Maestricht ou dans les environs. Zantfliet affirme que ce furent les Bruxellois qui appréhendèrent au corps et mirent en prison tous ceux de leurs envoyés qu'ils purent trouver, les accusant d'avoir trahi la patrie, en signant un traité indigne et avilissant [6]. La duchesse fut peut-être assez faible pour autoriser ces actes de violence; ce qui pourrait concilier les deux opinions.

[1] *So verre dat, bi traitiete van eneghen lieden van beeden partien, een seker accort ghemaect was, ende beloeft bi sekerheden ende beseghelten te houdene ende te vulcommen, up twelke accort de partien vorsc., met sinen lieden doen sciden, ende trocken thuuswaert, min here van Vlaenderen hopende ende houdende, in goeder loyalheden ende trauwen, dat bede de heren ende landen in goeden paise daer mede bliven souden. . . . . .*

[2] *Amplissima coll.*, t. V, col. 262.

[3] *Brab. Yeesten*, t. II, pp. 477 et suiv.

[4] *Dat de hertoghe ende hertoghinne vorseid daden vanghen ende in vanghenesse doen de ghone, die van harer partien ghecozen waren int vors. accort. Ibidem*, p. 416.

[5] *Ibid.*, p. 42.

[6] *Ampliss. col.*, t. V, col. 262.

Digitized by Google

NOUVELLES HOSTILITÉS.

A commencer par Butkens, tous les historiens modernes du Brabant blâment sévèrement le caractère et la conduite du duc Wenceslas dans ces circonstances. Au lieu de défendre le bel héritage de sa femme, disent-ils, il ne trouve rien de mieux que d'aller à Maestricht pour s'amuser avec de jeunes écervelés de son rang, et y demeure uniquement occupé de ses plaisirs, quand ses frontières retentissent du bruit des armes! M. Willems, le seul écrivain qui le trouve excusable, assure tantôt que le duc se reposait sans doute sur la convention d'Assche, tantôt qu'il n'était pas à Maestricht pour se livrer au plaisir, mais pour lever des troupes. Ces arguments semblent mutuellement se détruire, car l'un suppose qu'on comptait sur une paix réelle et l'autre qu'il était urgent d'augmenter ses forces pour faire la guerre. Wenceslas pouvait-il, d'ailleurs, ignorer quel accueil on avait fait à Bruxelles au traité d'Assche? Ne savait-il pas, en tout cas, que ce traité n'était pas définitif et que son exécution pouvait faire naître de sérieuses difficultés?

Quoi qu'il en soit, il eut bientôt à se repentir amèrement de son insouciance; si toutefois il était réellement à Maestricht, selon l'opinion de Butkens, que nous discuterons plus loin.

Avec une célérité, peu ordinaire à cette époque, le comte de Flandre envahit de nouveau le Brabant, profondément indigné de l'affront qu'on venait de lui faire et bien résolu à en tirer une vengeance éclatante. Ses troupes étaient animées des mêmes sentiments et, comme dit un chroniqueur contemporain, prodiguaient aux Brabançons les épithètes de « perfides et de parjures [1]. » Comme leur armée avait effectué le passage de la Dendre, près de Ninove, les villages qui se rencontrent de là sur la route de Bruxelles furent les premiers à souffrir de leur fureur, ainsi que les fermes et les places fortifiées qui se trouvaient à quatre lieues à la ronde : la seigneurie de Gaesbeek et la commune de Lennick, où se tenait, à

[1] *Quod Brabantini sic essent fidefragi et perjuri.* Corp. Chron. Fland., t. III, p. 28.

Digitized by Google

l'occasion de l'Assomption, une foire considérable, furent livrées à un affreux pillage, plusieurs habitants notables, tels que le sire de Wedergraet et sa femme, incarcérés au château de Liedekerke; les villages de Pamele, Trialendeke [1], Peede [2], Schepdale, Wanbeke, Dielbeke et beaucoup d'autres dévorés par les flammes. Le comte Gérard de Berg, allié de Wenceslas et commandant d'une partie de ses troupes, s'était avancé pour défendre Lennick; mais à peine eut-il reconnu la force de l'armée flamande, qu'il fit prudemment rebrousser chemin à la sienne. Cependant, sa retraite coûta cher aux villages de Lombeke et d'Anderlecht [3], qui furent à leur tour entièrement dévastés.

L'armée flamande s'avançait toujours sur Bruxelles, sans rencontrer de sérieux obstacles; il était temps que les seigneurs qui commandaient les troupes du Brabant, comme vassaux ou alliés de Wenceslas, sortissent de leur inaction. On délibéra longtemps sur le parti à prendre : l'armée de Louis de Male était nombreuse et pleine d'enthousiasme, fallait-il s'exposer aux hasards d'une bataille avec des forces inférieures [4]? Les plus prévoyants étaient d'avis qu'il valait mieux se tenir sur la défensive, jusqu'à l'arrivée du duc et des troupes d'Anvers et de la Campine qu'on pouvait attendre de jour à autre; les autres, plus braves que prudents, conseillaient de ne pas exposer au pillage les faubourgs de Bruxelles et les murailles de la ville ducale aux insultes de l'ennemi, mais de marcher à sa rencontre. Jeune et ardent qu'il était, le comte de Berg ne pouvait balancer : « Attendre encore, disait-il, ce serait une honte ineffaçable pour les Brabançons, qui ne se sont jamais vus en présence d'un ennemi sans le combattre [5]. »

Ce conseil fut suivi. Le 17 août, jour de l'octave de S^t^-Laurent, les troupes de Bruxelles, de Louvain et du comte de Berg s'ébranlèrent pour

[1] Ter Linden.

[2] S^te^-Gertrudis Pede et S^te^-Anna Pede.

[3] Despars, t. II, p. 440.

[4] Si l'on en croit un chroniqueur, dont le travail est inséré dans le *Corpus chron. Flandriae*, t. I, p. 229, le comte de Flandre avait une armée de 100,000 hommes, tant Flamands que Lillois (?) : cette bizarre assertion est d'une exagération ridicule.

[5] Butkens, *Trophées de Brab.*, t. I, p. 470.

Digitized by Google

attaquer Louis de Male, qui les attendait de pied ferme dans un endroit appelé *te Scote* ou *Scheut* [1], entre les villages de Molenbeek-S^t-Jean et Anderlecht. Des deux côtés on poussa d'abord de violents cris de guerre [2]; *Braband hoogen moed, Vlaendren onder voet!* retentissait d'une part, et de l'autre *Vlaendren den Leeuw!* Les deux armées fondirent ensuite l'une sur l'autre avec une impétuosité sans égale. Le comte de Berg à la tête de ses gens d'armes allemands, et ayant sous lui les bannières de Perweis et Grimberge, conduisait l'avant-garde. A la faveur de son étendard, blasonné des armes de Juliers, d'or au lion de sable, il parvint sans peine au milieu des Flamands qui, dans le feu du combat, pensaient y voir la bannière de leur comte, armoriée à peu près de même. L'erreur ne pouvait être de longue durée : les coups qu'il portait parlaient plus haut que les couleurs de sa cotte de mailles. La mêlée devint bientôt plus vive, mais, après s'être distinguées par une bravoure peu commune, les troupes de Bruxelles et de Louvain se virent attaquées avec tant de vigueur, qu'elles perdirent sensiblement du terrain. Le sire d'Assche, qui portait le grand étendard du Brabant, ne se fut pas plutôt aperçu que ses compagnons d'armes commençaient à lâcher pied, qu'il jeta l'étendard par terre [3], et se sauva par la fuite. Cette action que les uns qualifièrent de lâcheté et les autres, comme d'ordinaire, de trahison, mit le désordre dans les rangs de l'armée brabançonne et décida sa défaite. Le comte de Berg se retira en assez bon ordre vers Vilvorde et, grâce encore une fois à ses armoiries, emmena même des prisonniers; mais les autres troupes jetèrent leurs armes et s'enfuirent précipitamment dans toutes les directions et surtout dans celle de Bruxelles (17 août 1366).

M. Villani raconte que la victoire ne coûta pas un seul homme aux Flamands, et qu'ils ne tuèrent que cinq cents ennemis; mais il ajoute, non

[1] On y bâtit plus tard une chartreuse.

[2] *Corpus chron. Flandr.*, t. III, p. 29. Matth. Villani parle aussi de ces cris : *E cominciato*, dit-il, *un grido tutti insieme, a loro costuma.*

[3] Butkens semble entièrement disculper le sire d'Assche en disant que *les Flamands jetèrent par terre l'étendard de Brabant.* Le continuateur de De Klerck ne sait qu'en penser, et s'écrie naïvement :

Hoe dat ghesciede, dat weet Ons Here!

Digitized by Google

sans raison, que c'est là une grande merveille et un fait presque incroyable. Des annalistes, plus à même de connaître la vérité, ne croient pas, il est vrai, ce qu'avance l'écrivain italien. Robert d'Avesbury[1] évalue à trois mille morts la perte des Brabançons, et le chroniqueur anonyme que nous avons cité plus haut [2], à quatre mille cinq cents. Comme ce dernier est évidemment partial en faveur des Flamands, nous croyons que le chiffre qu'il donne est très-exagéré. Au reste, ces hommes ne périrent pas tous dans la mêlée : beaucoup de fuyards furent tués par les vainqueurs, et un plus grand nombre d'entre eux trouvèrent la mort dans la Senne et dans d'autres courants d'eau qui étaient voisins du champ de bataille.

Cependant le comte de Flandre poursuivait l'épée dans les reins les bandes en désordre, qui espéraient se sauver dans Bruxelles, mais ne pouvaient guère songer à négocier, comme le suppose l'abbé Ernst [3]. Tandis qu'une partie de ses gens mettaient le feu aux faubourgs, il entra avec ses meilleures milices [4] pêle-mêle avec les fugitifs dans la ville, et peu s'en fallut qu'il n'y surprît la duchesse, sa belle-sœur. Après avoir fait planter son étendard à l'hôtel de ville et ses gonfanons sur les portes de Bruxelles, il y établit d'autorité le chevalier Sohier Vanden Heetvelde, comme amman, et nomma de nouveaux échevins. Ensuite il reçut les habitants à foi et à hommage, et promit, comme bon et loyal seigneur, de conserver leurs priviléges. Les lettres qu'il leur octroya portent la date du 18 août, et furent confirmées par les députés des villes de Gand, de Bruges, d'Ypres et du Franc-de-Bruges [5].

La duchesse Jeanne s'était d'abord réfugiée à Binche, en Hainaut; mais elle parvint peu après à rejoindre Wenceslas.

Louis de Male ne s'arrêta guère à Bruxelles; après y avoir changé l'admi-

[1] *Mirabilia gesta magnifici regis Eduardi III*, p. 272.

[2] *Corpus chron. Flandr.*, t. III, p. 29.

[3] *Hist. de Limbourg*, t. V, p. 101.

[4] Les chevaliers brabançons étaient bien supérieurs aux flamands, dit Villani, mais en revanche, les milices flamandes étaient beaucoup plus redoutables que les brabançonnes. Un chroniqueur assure qu'à Scheut, les Flamands n'avaient pas de cavalerie, et l'on sait qu'en effet l'infanterie constituait toute la force des armées flamandes.

[5] *Brab. Yeesten*, t. II, p. 491.

Digitized by Google

nistration, il continua rapidement ses conquêtes, et soumit en quelques jours Louvain, dont il confia l'ammanie au patricien Gauthier Keynooghe, Tervueren, Vilvorde, Léau, Nivelles et Tirlemont. Anvers et Lierre suivirent bientôt cet exemple, et, à l'exception de Bois-le-Duc, toutes les villes du Brabant et du marquisat du Saint-Empire reconnurent le comte de Flandre pour leur légitime et droiturier seigneur. Il est remarquable, toutefois, que dans les lettres qu'il leur donna à cette occasion [1], Louis n'ajoute pas à ses autres titres celui de duc de Brabant et de marquis d'Anvers, mais seulement de seigneur de Malines, de Louvain, de Bruxelles et d'Anvers.

Avant la bataille de Scheut, ceux de Louvain avaient envoyé en Angleterre un citoyen notable de la ville, le patricien Gauthier Herenmaes; mais il fut pris par un corsaire flamand, nommé Morant, qui croisait dans la mer du Nord, et n'obtint sa liberté qu'après avoir payé une rançon de 4,000 écus d'or, donnés par ses concitoyens [2].

Dans le récit que Butkens et d'autres écrivains plus modernes nous ont laissé de ces événements, on ne trouve pas la moindre mention de Wenceslas. Où se tenait le duc? quelles mesures prenait-il dans des circonstances si graves pour lui? Si l'on en croit ces auteurs, il était toujours à Maestricht ou dans les environs occupé à lever des troupes. La plupart des écrivains anciens, et même les contemporains, affirment, au contraire, qu'il assistait à la bataille de Scheut. « Wenceslas vint à la rencontre des » Flamands, dit Meyer [3], avec une armée nombreuse. La bataille se donna » près de Bruxelles, et les Flamands y remportèrent une victoire brillante. » Wenceslas fut mis en fuite. » On ne peut rien désirer de plus clair et de plus positif. Le récit de Despars [4] ne l'est pas moins : « Les Brabançons, » dit-il, ayant avec eux le duc Wenceslas [5], attaquèrent leurs ennemis » près de Bruxelles : il y eut là une mêlée horrible; mais les Brabançons

[1] *Brab. Yeesten*, t. II, pp. 498 et suiv.
[2] P. Divaei, *Rerum Lov.*, p. 102.
[3] *Annales Fland.*, ad an. MCCCLVI.
[4] *Cronyke*, t. II, p. 440.
[5] *Metten Hertoghe Wenselin.*

Digitized by Google

» eurent le dessous.... On aurait pu parier mille contre un que le duc lui-
» même serait tombé mort ou vif entre les mains des Flamands [1]. » Corneille Zantfliet, qui mérite toute confiance, affirme à son tour que « Wen-
» ceslas, plein de présomption, à cause de la multitude de ses troupes,
» attaqua l'armée flamande moins forte...., et qu'en voyant les milices de
» ses communes en fuite et son étendard renversé, il se retira à la hâte
» vers Louvain avec ses soldats allemands [2].

Ces autorités sont bien imposantes sans doute, mais moins toutefois que les témoignages des contemporains. La chronique anonyme, que nous avons rappelée plusieurs fois, et qui se termine à la soumission des villes brabançonnes à Louis de Male, porte textuellement : *Procedente vero formidabili principe, comite Flandrie, prope Bruxellam occurrit sibi dux Brabantie, Wenselinus, cum copioso exercitu equitum et peditum* [3]. Enfin, Sohier de Le Beke, chancelier de Flandre, qui suivit son comte à cette guerre et prit une large part à ses actes diplomatiques, dit expressément « que le duc
» et les communes de Brabant, avec leurs auxiliaires, vinrent à la ren-
» contre du comte en avant de Bruxelles [4]. »

Des témoignages si positifs et si dignes de foi, le dernier surtout, établissent, nous paraît-il, d'une manière incontestable, la présence de Wenceslas à la bataille de Scheut. La valeur et les connaissances militaires du comte de Berg, de beaucoup supérieures à celles du duc, devaient faire oublier celui-ci dans le combat.

Comme nous l'avons remarqué déjà, le comte de Berg sauva aussi une partie de ses troupes, et se vit encore assez fort pour tenir la campagne.

Le duc Wenceslas, ne se croyant pas en sûreté à Louvain, avait pris la route de Diest, pour regagner le Limbourg et s'y occuper plus activement, de concert avec Jeanne, des moyens de rétablir ses affaires. Il ne pouvait compter sur les Limbourgeois, qui montraient plus que jamais

[1] *Duyst jeghens een, dater die hortoghe zelve niet levende ofte doot in handen gherochte.*

[2] *Ampliss. col.*, t. V, col. 262.

[3] *Corpus chron.*, t. III, p. 29.

[4] *So verre dat de hertoghe ende dlant van Brabant met haren hulperen hen jeghen camen voor Breucele.* Additions aux *Brab. Yeesten*, t. II, p. 417.

Digitized by Google

une entière indifférence pour sa cause; mais il réussit à y rattacher plusieurs seigneurs et chevaliers puissants, et en particulier les comtes de Loos, de Megehn et de Catzenellenboge, Waleran de Fauquemont, seigneur de Borne et de Herpen, les sires de Hornes, de Rochefort, de la Merwede, d'Yselstein, de Brederode, de Billichoven, de Hamal, d'Arduemont, d'Argenteau et de Hemptinnes. Tous ces seigneurs, et un grand nombre d'autres, vinrent se ranger, avec leurs vassaux, sous la bannière de Wenceslas.

Un combat assez important se livra, dans cet intervalle, à Zantvliet [1], bourgade du marquisat d'Anvers, dont les uns donnent l'avantage aux Flamands, dit l'historien du Limbourg [2], et les autres aux Brabançons. En effet, si l'on pouvait admettre le témoignage de Butkens, les Flamands y auraient été entièrement défaits, par suite de la découverte d'un stratagème auquel ils avaient eu recours; et, si l'on consulte d'autres historiens tout aussi dignes de foi, on trouve que ces mêmes Flamands remportèrent à Zantvliet une victoire brillante. Les plus graves autorités sont en faveur de cette dernière opinion. *Vicere rursus Brabanteros Flamingi ad Zantfletum*, dit Meyer, *interfectis captisque multis. Capta Zantfletum, Putta, Lillo, Mertena et alia* [3]. Le judicieux annaliste est ici parfaitement d'accord avec Despars, qui rapporte [4] que Wenceslas n'eut pas plus à se glorifier de la bataille de Zantvliet que de celle de Scheut, et que, par suite de la première, Zantvliet, Putte, Merchtene [5], Lillo et plusieurs autres places ou forteresses durent se rendre par composition [6] au comte victorieux. Jean de Dixmude, contemporain de Louis de Male, avait écrit avant eux, mais avec moins de détails : « Louis sortit également vainqueur d'une autre bataille, à Zantvliet [7]; beaucoup de Brabançons y périrent en combattant et beau-

[1] On écrit aujourd'hui *Santfliet*.
[2] T. V, p. 105.
[3] *Annales Flandr.*, ad an. MCCCLVI.
[4] *Chron. van Vlaend.*, t. II, p. 441.
[5] Maintenant *Merxem*.
[6] *Ten appointemente commen moesten.*
[7] Ceux de Louvain s'étaient servis, à Zantvliet, d'engins appelés *donderbussen*, ce que plusieurs auteurs traduisent par canons. Voyez la note placée après le Mémoire.

Digitized by Google

coup d'autres se noyèrent dans la fuite [1]. » Ce que l'*Excellente Cronike van Vlaenderen* a textuellement reproduit. Butkens, qui ne donne pas ses garants en cet endroit, avance, comme Meyer, que Ph. de Wedergrate avait été pris à Zantvliet : s'il avait remarqué que ce seigneur était partisan de Wenceslas et de la même famille que ce Jean de Wedergrate, enlevé par les Flamands au commencement de cette guerre, il aurait probablement jugé autrement de l'issue du combat.

Il est aussi étrange que les annalistes s'accordent si peu sur la date qu'il faut lui assigner. Em. Sueyro [2] le place au mois de novembre et Butkens au commencement de l'année suivante, sans que l'un ou l'autre indiquent à quelle source il a puisé. Les chroniqueurs sont tout aussi divisés. Le *Memorieboek der stad Ghent* [3] dit que l'affaire eut lieu le 11 de mars 1356, ce qui se rapproche de l'opinion de Butkens, qui a suivi le style grégorien, et comprend sans doute par le commencement de l'année les premiers jours de la nouvelle campagne. Mais Despars assure positivement [4] que le comte de Flandre vainquit ses ennemis à Zantvliet, le mois qui suivit son entrée à Bruxelles, ce qui nous reporte à la fin de septembre.

Il nous paraît que la dernière date est celle qui mérite la préférence, parce que c'est à la même époque qu'on voit prendre à Louis de Male le titre de duc de Brabant, et sommer les barons et autres seigneurs du duché et d'Anvers de le reconnaître en cette qualité [5]. Il pouvait se croire affermi dans ses conquêtes par un second triomphe. Les affaires de France l'avaient cependant rappelé en Flandre quelques jours seulement après la bataille de Scheut, et c'est de Bruges que sont datées les premières sommations, qu'il fit aux notables du Brabant, de reconnaître sa souveraineté. Un grand nombre d'entre eux, dont les noms ont été conservés [6], lui prêtèrent en effet hommage; mais les plus puissants et les plus qualifiés, tels que les comtes de Berg, de Looz et de Nassau, les sires de Wezemale, de Rum-

[1] Dits de cronike, etc., p. 245.
[2] *Annal. de Fland.*, t. I, p. 523.
[3] T. I, p. 78.
[4] *Cronike van Vlaend.*, ut supra.
[5] *Brab. Yeest.*, t. II, pp. 505 et suiv.
[6] *Ibid.*, p. 508.

Digitized by Google

mene et plusieurs autres répondirent aux lettres du comte par un refus plein de hauteur et de mépris.

REVIREMENT.

Les faits vinrent bientôt justifier cette hardiesse. Le 24 octobre [1], en l'absence de Louis de Male, le chevalier Éverard Tserclaes ou Sherenclaes, frère de l'évêque de Cambrai, remit Bruxelles sous la puissance de Wenceslas, sans qu'il y eût de part ni d'autre beaucoup de sang répandu [2], et en quelques jours toutes les villes principales du Brabant avaient chassé leurs garnisons et secoué le joug du comte. Ce fut réellement comme un coup de théâtre.

Tserclaes se couvrit de gloire par cette entreprise, car il sera toujours glorieux d'arracher sa patrie à une domination étrangère; mais sans vouloir en rien affaiblir son mérite, on peut remarquer que le coup de main, dont il fut le héros, présentait, avec bien peu de dangers, toutes les chances désirables de réussite. Escalader, pendant une nuit pluvieuse et sombre, les murailles d'une ville, dont les bourgeois sont d'intelligence avec les assaillants, et en chasser avec leur aide une garnison peu nombreuse, ne pouvait exposer à de grands périls. Il en fut de même dans les autres villes qui avaient fait d'abord leur soumission au comte de Flandre : si l'on en excepte Malines, elles n'étaient que faiblement gardées [3]; de manière qu'il suffit, à Louvain, de quelques paroles énergiques d'un religieux [4] et, ailleurs, de l'initiative de quelque habitant courageux, pour rétablir partout l'autorité de Jeanne et de Wenceslas.

[1] Le savant éditeur de l'*Histoire du Limbourg* croit que cette date est inexacte, parce que les cinq villes, Louvain, Bruxelles, Tirlemont, Léau et Anvers, ont conclu, le 14, une convention avec l'évêque de Liége. Il a supposé que leur but était de détacher le prélat du parti des Flamands; mais il en est si peu ainsi, que ceux de Louvain transmirent la confirmation de l'acte, le 16 octobre, à la comtesse de Flandre elle-même; d'ailleurs, Louvain, le 18, et Bruxelles, le 19, font encore des protestations de fidélité à cette princesse.

[2] *Brab. Yeest.*, t. II, p. 55.

[3] *Hist. du Limbourg*, t. V, p. 102.

[4] Guillaume de Zadelare.

Digitized by Google

Les historiens brabançons s'étonnent d'un revirement si subit : ils conviennent que les troupes flamandes, disséminées dans leurs villes, étaient trop peu considérables pour les maintenir sous l'obéissance de Louis de Male, mais ils ne savent comment s'expliquer ce qu'ils appellent l'imprévoyance de ce prince en cette occasion. Leur surprise n'aurait pu durer longtemps, s'ils avaient étudié l'organisation de nos milices à cette époque. Toute l'expédition qui s'était terminée par la bataille de Scheut n'avait duré que trois semaines; l'armée flamande ne s'en était pas moins pressée de s'en retourner dans ses foyers : *Exercitus Flandrie rediit ad propria,* dit le chroniqueur souvent cité [1], *infra tres ebdomadas circiter postquam ad expeditionem exierunt.* Le comte ne pouvait, sans porter une grave atteinte à leurs priviléges, retenir plus longtemps contre leur volonté les troupes des communes : elles pensaient avoir accompli leur tâche, et s'être ainsi libérées de leur service pour le moment. L'expédition avait été pour elles une guerre particulière ou *Heervaert,* mais il en était tout autrement pour les Brabançons, qui étaient obligés au *Landweir,* puisqu'ils avaient à défendre leur propre pays [2]? Quant aux volontaires et aux combattants qui étaient à la solde du comte, ils étaient comparativement en petit nombre et avaient fourni la garnison de Malines et des villes brabançonnes.

Il ne serait donc pas juste de taxer d'imprudence la conduite que Louis de Male tint alors; mais on aurait à lui reprocher une faute réelle, s'il était vrai, comme l'ont avancé quelques chroniqueurs [3], qu'il se rendit vers ce temps à Paris, où l'appelait son attachement à la France, consternée par la défaite de Poitiers et la captivité du roi Jean. Il est heureusement permis de révoquer ce voyage en doute. La bataille de Poitiers fut livrée le 18 septembre, et l'on connaît plusieurs actes que le comte souscrivit à Malines les 21, 27 et 28 du même mois. En octobre, il s'en trouve d'autres qui prouvent qu'il résidait à Male ou à Malines, et le 19, les magistrats

[1] *Corpus chron. Flandriae,* t. III, p. 30.

[2] On lit dans un acte souscrit par ceux d'Anvers, etc., en 1261, et conservé par Miraeus, t. I, p. 428. « *Si alicubi terminos terrae nostrae abbreviari perceperimus vel jura Domini nostri occupari seu in aliquo debilitari* (*quod Deus avertat*),.... ad assistendum ei, SICUT TENEREMUR, rebus et corporibus semper paratos et benevolos exhiberemus.

[3] Matt. Villani, *Istorie,* lib. VI, cap. 82, Corn. Zantfliet, *Ampliss. coll.,* t. V, coll. 265.

Digitized by Google

de Bruxelles lui transmettaient encore, avec des protestations de dévouement, une lettre que la duchesse Jeanne avait adressée à la ville. Quand aurait-il pu entreprendre un voyage aussi dangereux et aussi difficile à cette époque que celui de Paris?

Il est donc très-probable que Louis était peu éloigné du théâtre des événements, quand la surprise de Bruxelles devint le signal du renversement de son autorité à Anvers et dans les villes principales du Brabant. Il vit que la guerre allait recommencer avec une vigueur nouvelle; et, supposant avec raison que Wenceslas serait puissamment soutenu par son frère, l'empereur Charles IV, il se mit en mesure de réunir sous ses drapeaux des forces considérables. Un acte qui se conserve dans les archives de la Flandre orientale [1] prouve qu'il envoya une flottille devant Anvers [2] et qu'il prit à sa solde un corps de six mille hommes de guerre. Mais les chroniqueurs ne nous ont laissé aucun détail sur le nombre des troupes que les communes flamandes mirent à la disposition de leur prince.

Wenceslas, de son côté, se promettait de prendre une revanche éclatante de ses premiers revers. Le même jour où Tserclaes délivrait Bruxelles, la duchesse Jeanne, à la tête d'une nombreuse armée et accompagnée des comtes de Berg, de la Marck et de beaucoup d'autres seigneurs [3], avait envahi le comté de Namur, brûlé Thine, Wasseige, Branchon, et fait trembler la capitale elle-même. Mais les représailles ne se firent pas longtemps attendre. L'évêque de Liége et le comte de Namur, avec les sires de Beaumont et de Petegem, ses frères, eurent bientôt réuni des forces assez considérables pour faire repentir la duchesse de ces dévastations. Le corps de troupes le plus nombreux, dont ils avaient confié le commandement à Jacques Chabot, bailli de la Hesbaye, et à Lambert d'Oupey, maréchal de Liége, fut, à la vérité, sur le point d'être surpris par l'armée brabançonne, qui occupait Landen et ses environs; mais l'issue du combat qui

[1] *Brab. Yeesten*, t. II, p. 534.

[2] *Onse vlote van scepen te houdene vor Andwerpe.*

[3] *Anno MCCCLVI, crastino S. Severini, ducissa Brabantiae cum magna gente et comite de Monte*, etc. Levold de Northof, *Chron. com. de Marka*, dans les *Script. rer. Germ.* de Meiboom, t. I, p. 406.

Digitized by Google

s'en suivit ne fut pas longtemps douteuse et se termina par la déroute complète des Brabançons. D'après l'usage barbare du temps, les vainqueurs saccagèrent Hannut et mirent à contribution ou livrèrent au pillage tout le pays voisin [1]. Ce qui valait mieux, ils ramenèrent plusieurs prisonniers de marque.

L'infatigable comte de Berg, que nous avons vu tantôt combattre les Namurois, se tenait cependant de préférence à Vilvorde, pour tenir les Flamands en échec et profiter des fautes de leurs capitaines. Ayant appris que Henri de Flandre, sire de Ninove, et Louis de Namur, sire de Petegem, s'étaient portés avec peu de monde vers le village de Lippeloo et l'avaient livré aux flammes, il réunit à la hâte une troupe d'élite et vint à Buggenhout, dans l'intention de leur couper la retraite; mais le sire de Ninove, instruit de ce dessein, se retira vers Bornhem. Là les deux troupes en vinrent aux mains et firent des prodiges de valeur; cependant la victoire semblait pencher en faveur des Brabançons, quand la nuit vint séparer les combattants et permit aux Flamands de se mettre en sûreté dans le château de Bornhem [2].

Le défaut du matériel nécessaire et la proximité de la flotte flamande qui croisait dans l'Escaut empêchèrent le comte de Berg de songer à les y assiéger. Il s'éloigna en bon ordre.

Ces engagements peu décisifs, où tantôt les Flamands et tantôt leurs ennemis étaient en droit de s'attribuer la victoire, ne pouvaient terminer la guerre : Wenceslas, moins belliqueux, mais cette fois aussi adroit que son rival, recourut à d'autres moyens et trouva un auxiliaire dans son frère, l'empereur Charles IV, venu d'abord à Metz, où la fameuse bulle d'or fut achevée, et ensuite à Maestricht, pour relever la puissance de Wenceslas. Charles, qui parla vivement à l'évêque de Liége et avec toute l'énergie de l'autorité souveraine, en reçut une réponse noble et fière; et le prélat se retira dans son diocèse, pour éviter des réclamations nouvelles auxquelles il était bien résolu de ne pas déférer. Si l'on en croit Zantvliet, le comte de

[1] Zantfliet, *Ampliss. Col.*, t. V, col. 264.
[2] *Trophées de Brabant*, t. I, p. 472.

Digitized by Google

Namur répondit à l'Empereur avec une égale fermeté [1] : « que lui et le comte de Flandre étaient trop proches parents, pour qu'il pût séparer ses intérêts de ceux de ce prince, et que d'ailleurs son comté ne relevait pas de l'Empire. » Mais si cette réponse est vraie, il est plus sûr encore qu'il se hâta de la démentir. On reconnut ses droits sur le château et la prévôté de Poilvache, avec leurs dépendances [2], et sur l'hommage de Château-Thierri sur Meuse, à condition qu'à son tour, il renonçât aux seigneuries de Mierwaert, d'Orchimont, de Longeant et Villanche. C'était là vendre peu chèrement ses devoirs envers le chef de sa maison.

Charles avait encore plus à cœur d'obtenir de la duchesse Jeanne et des états du Brabant et du Limbourg un arrangement en faveur de Wenceslas, sur le mode de possession et sur la succession des deux duchés et des terres qui en dépendaient. Ses démarches eurent un plein succès, et aboutirent à un traité dont nous donnons ici la substance : « Wenceslas aura désormais l'entière administration et le libre gouvernement des duchés de Brabant et de Limbourg, comme des terres et fiefs qui en dépendent, de même que s'il en était le naturel et légitime seigneur; il pourra conférer les emplois et faire en général tout ce qui appartient à la souveraineté, mais avec connaissance et agrément de la duchesse; s'il arrivait, toutefois, qu'elle différât d'opinion avec lui, il n'en agirait pas moins validement à son gré. Tant que la duchesse vivra, le duc ne pourra cependant, sans le consentement de la duchesse, engager, échanger, aliéner ou vendre quelque partie des duchés de Brabant ou de Limbourg.

» Si la duchesse vient à mourir avant le duc sans laisser d'enfants, Wenceslas lui succédera dans ses duchés et dans ses autres domaines; s'il meurt, au contraire, le premier, et qu'elle convole en secondes noces, les enfants qui seront issus de ce nouveau mariage hériteront de toutes les seigneuries de leur mère : si tous deux meurent sans postérité, toute leur succession sera dévolue au plus proche héritier, c'est-à-dire au chef de la maison de Luxembourg.

[1] Foullon, *Hist. pop. Leod.*, t. 1, p. 430.

[2] Sa mère, Marie d'Artois, avait racheté ces domaines de Jean de Luxembourg, pour la somme de trente-trois mille florins d'or.

Digitized by Google

» Le duc et la duchesse, ainsi que les représentants des duchés de Brabant et de Limbourg, ne pourront faire ni paix ni trêve avec leurs ennemis sans le consentement de l'Empereur, et ce monarque n'en pourra faire, de son côté, sans le consentement des princes et des représentants de leurs pays. »

Cette convention est évidemment dictée par la haine qu'on portait au comte de Flandre; elle prouve que cette passion est bien aveugle, et qu'un historien n'a pas eu tort, en la citant [1], de s'écrier : *O ignaros tunc urbium legatos!* Ce n'était, en effet, pas seulement exclure de ses droits présomptifs la comtesse de Flandre avec qui on était en guerre, mais encore la comtesse de Gueldre, contre laquelle personne ne pouvait élever la moindre plainte; c'était éventuellement [2] dépouiller l'illustre maison de Louvain de pays qu'elle gouvernait avec sagesse depuis tant de siècles.

La duchesse Jeanne publia elle-même ce traité, par une charte datée de Bruxelles, le lundi avant le dimanche *Invocabit* [3] de l'an 1356, suivant l'usage de Cambrai, comme il y est marqué formellement[4]; c'est-à-dire, selon notre manière actuelle de compter, le 20 février 1357 [5].

Les hostilités se continuaient cependant sans donner lieu à des actions générales, mais en portant le fer et le feu dans les campagnes. Les Brabançons pillaient et ravageaient particulièrement les villages voisins de Malines, et les Flamands ceux qui séparent Bruxelles d'Alost et de Ninove. Lembeke, Gaesbeke, Anderlecht, Lombeke, Affligem et Hellebeke furent

[1] Haræus, *Annal. Brab.*, t. I, p. 331.

[2] On sait que le traité resta à l'état de lettre morte, et que Jeanne laissa ses États à Marguerite de Flandre, fille unique de Louis de Male.

[3] Mais non *invocavi*, comme ont écrit tous les historiens d'après une faute d'impression de Butkens. L'erreur est fort légère sans doute, mais elle prouve qu'on a pris peu de soin pour connaître la date du traité : quel dimanche de l'année se nomme *Invocavi?*

[4] La duchesse le marque ainsi, parce qu'à Maestricht et dans tout le ressort de l'évêché de Liége, l'année civile commençait à Noël, tandis que, dans le ressort de Cambrai, elle commençait à Pâques.

[5] Il est surprenant qu'une date énoncée aussi clairement ait donné lieu à tant d'erreurs. Divæus et Haræus y ont vu la fin de l'an 1355, d'où il résulterait que Jeanne aurait dépouillé ses deux sœurs avant d'avoir pris possession de ses duchés, et quand le tombeau de son père était à peine fermé. Sueyro, Des Roches, égarés, comme le pense M. Willems, par le continuateur de De Klerck, qui a mal placé cet acte, l'ont fixé au 20 février 1356, avant les hostilités. M. Dewez a maintenu cette erreur dans la 2e édit. de son *Hist. génér. de la Belgique*, parmi d'autres inexactitudes.

Digitized by Google

réduits en cendres par les gens d'armes du comte Louis, exaspéré sans doute par la convention dont nous venons de présenter l'analyse. Cependant les misères des peuples, la stagnation du commerce, et tant d'autres maux qu'entraînait une guerre sans résultat, ramenaient tous les jours le duc et le comte à des sentiments plus pacifiques. Wenceslas surtout voulait en finir à tout prix. La Belgique ne possédait alors qu'un seul prince qui pût être convenablement médiateur entre les parties belligérantes : c'était Guillaume de Bavière, comte de Hainaut et de Hollande. Le duc de Brabant pouvait le regarder comme favorable à sa cause, parce qu'il avait eu naguère des débats avec le comte de Flandre, au sujet de la possession de Lessines et de Flobecq; toutefois pour l'attacher davantage à ses intérêts, il lui céda la ville et terre de Heusden [1] pour l'annexer au comté de Hollande [2], ce que les ducs de Brabant Jean II et Jean III avaient toujours refusé vivement (29 mars 1357); mais à condition qu'il porterait le comte de Flandre à faire la paix, ou lui déclarerait la guerre à son tour, si ce prince la refusait.

Wenceslas connaissait mal les dispositions de Guillaume de Bavière. Soit qu'il crût la cause de Louis de Male plus juste, soit qu'il eût quelque motif personnel pour la favoriser, le comte de Hainaut n'eut pas plutôt reçu les lettres [3], par lesquelles le comte de Flandre le reconnaissait comme arbitre, qu'il s'empressa de déclarer sous serment et sur son honneur qu'il ferait adjuger à la comtesse de Flandre les villes de Malines et d'Anvers, avec leurs dépendances, et qu'il obligerait les villes et les chevaliers du Brabant qui avaient fait hommage au comte Louis, à le servir tous les ans pendant six semaines à leurs dépens, etc. Le même jour encore, il fit confirmer cette déclaration par les nobles et les villes de Hollande et de Zélande, et dix jours après par ceux du Hainaut.

Rassuré par des promesses si formelles et si multipliées, le comte de

[1] *Chron. de De Dynter*, trad., liv. V, ch. XXV. On y met l'acte de cette cession au 29 *mai;* ce ne peut être là qu'une faute d'impression. L'original (lib. V, cap. XC) porte : *die x^a^ maji.*

[2] Wenceslas se réserva le *clokenslag*, c'est-à-dire le droit régalien de faire sonner le tocsin au *ban-klok*, pour convoquer le ban des vassaux sous les armes.

[3] Ces lettres sont datées de Bruges, le 4 mai, et la déclaration de Guillaume porte la date du lendemain. *Brab. Yeest.*, t. II, p. 536.

Digitized by Google

Flandre accorda la trêve proposée par Guillaume, le 18 mai suivant [1]; et d'une autre part, le duc et la duchesse, les nobles et les villes du Brabant s'obligèrent, par lettres du 1er juin, à mettre à exécution le jugement à porter par le comte de Hainaut sur les différends existants entre eux et le comte de Flandre [2].

M. Dewez avance qu'il y eut des conférences entre les parties dans la ville d'Ath, sans doute d'après Vinchant, qui parle, en effet, de *journées* et de *communications;* mais les auteurs contemporains ne rapportent rien de semblable. Le 4 juin 1357, le comte Guillaume donna d'Ath le jugement arbitral dont voici les stipulations principales [3] :

JUGEMENT ARBITRAL D'ATH.

1° Les prisonniers de guerre, de part et d'autre, seront remis en liberté sans rançon, à moins qu'on ne l'ait payée déjà ou promis de la payer;

2° De part et d'autre, les princes et leurs vassaux ou sujets rentreront en possession des biens qui auraient été confisqués pendant cette guerre;

3° Le comte de Flandre retirera la garnison qu'il a dans l'abbaye d'Affligem et y retablira les religieux;

4° Le comte déchargera les villes et les nobles du Brabant du serment et de l'hommage qu'ils lui ont prêtés et promet de rendre toutes les lettres qui en font foi. Cependant les villes de Louvain, Bruxelles, Nivelles et Tirlemont seront tenues de le servir, sa vie durant, chaque ville avec sa bannière, pendant six semaines, et chaque fois qu'elles en seront requises, pour marcher contre tous les ennemis du comte, hormis le duc et le pays de Brabant. Sous chacune de ces bannières devront se trouver deux barons, deux chevaliers et vingt-cinq hommes d'armes bien armés, le tout aux dépens de la terre de Brabant;

5° Le comte pourra conserver, pendant toute sa vie, le titre de duc

[1] On a imprimé fautivement *le* 28, en tête de ses lettres dans les *Brab. Yeest.*, t. II, p. 541.

[2] *Brab. Yeest.*, t. II, p. 542.

[3] Il est textuellement cité à la suite de ce Mémoire.

Digitized by Google

de Brabant qu'il a pris à la demande de plusieurs villes et d'un grand nombre de barons et de chevaliers;

6° Comme le père du comte de Flandre a acheté la seigneurie de Malines et que la vente qu'il en avait faite plus tard au duc de Brabant n'a pu sortir d'effet, faute de payement, Malines et ses dépendances demeureront au comte de Flandre et à ses successeurs, tant par ce motif qu'à titre de compensation pour les frais de la guerre;

7° Le duc cédera au comte et à la comtesse de Flandre, la ville d'Anvers et les villages de son ressort, comme fief du Brabant et à titre de dot et de legs, en remplacement de dix mille écus d'or de rente annuelle en bonnes terres, que Jean III avait légués à la comtesse Marguerite. Si les revenus provenant de cette ville ne suffisent pas pour parfaire cette somme, le duc sera tenu de la compléter par ceux des villages voisins;

8° Les Anversois prêteront serment de fidélité au comte et à la comtesse de Flandre; pourvu cependant que le comte ne prenne pas le titre de marquis du saint-empire et qu'il maintienne tous les droits et priviléges que les Empereurs et les ducs ont accordés aux habitants;

9° Le duc et la duchesse de Brabant conserveront le titre de marquis du saint-empire et s'obligeront par lettres, dans la quinzaine, à ne point vendre ou aliéner leur duché et à le conserver dans toute son intégrité.

Le lendemain, 5 juin, le comte de Hainaut donna, à Lessines, d'autres lettres sous forme d'ampliation, pour expliquer quelques articles de cette sentence arbitrale. Il n'y a rien d'un intérêt majeur.

Ce jugement de Guillaume de Bavière, que M. Dewez, nous ne savons trop pourquoi, qualifie de traité, fait jeter les hauts cris aux écrivains brabançons : ils ne connaissent rien de plus exorbitant, de plus honteux, de plus inique : il en est tel parmi eux qui affirme sérieusement que l'aliénation mentale dont le comte de Hainaut et de Hollande fut frappé quelques mois après, fut une vengeance du ciel, qui punit sa criminelle déloyauté. Telle n'avait pas été l'opinion des villes et des seigneurs du Hainaut, de la Hollande et de la Zélande, qui avaient connu et approuvé d'avance la décision de leur souverain, ni de Charles IV et de Wenceslas, qui se soumirent avec empressement à toutes ses dispositions. Il faut

Digitized by Google

avouer cependant que l'Empereur et le duc prouvèrent, à cette occasion, qu'ils n'avaient pas hérité de l'esprit chevaleresque ni de la bravoure de leur père, Jean l'Aveugle.

Il est évident, nous semble-t-il, que Guillaume ne porta point dans cette affaire l'impartialité qu'on exige à bon droit dans un arbitre, et son jugement est sans doute humiliant pour Wenceslas et Jeanne, mais, comme le remarquent les savants historiens d'Anvers [1], on doit regarder le duc comme la cause principale des maux qui affligèrent le Brabant, et qui résultèrent de l'imprudence et de la déloyauté avec lesquelles il liquida la succession de Jean III.

La soumission d'Anvers et de Malines à la maison de Flandre fut d'ailleurs un acheminement à l'union de toutes les provinces des Pays-Bas sous la main puissante des ducs de Bourgogne.

Note sur les DONDERBUSSEN.

(Voir p. 28, note 9.)

Si l'on en croit Divaeus [2], ceux de Louvain avaient eu au combat de Santvliet trente-deux pièces de canon, qu'Em. Sueyro [3] réduit à douze. Les chroniqueurs font en effet mention d'instruments de destruction qu'ils appellent *donderbussen* ou boîtes fulminantes; mais étaient-ce bien là des canons? Le fait au moins est bien douteux, car ce nom peut indiquer des machines très-différentes et depuis longtemps connues; il n'est pas cependant impossible. Muratori, tout en prouvant que l'on connaissait les canons en 1344 [4], croit que l'emploi en fut très-rare pendant le XIV^{me} siècle et même pendant les premières années du suivant; mais le savant italien a-t-il étendu ses recherches jusqu'aux Pays-Bas? Les engins dont les annalistes font mention, en rapportant les siéges que la ville de Grave soutint en 1386 et 1388, n'étaient, paraît-il, que d'anciennes armes. Il n'en est pas moins

[1] *Gesch. van Antw.*, t. II, p. 268.
[2] *Rerum Lov.*, lib. III, cap. 7.
[3] *Ann. de Fland.*, t. I, p. 523.
[4] *Antiq. Ital. medii aevi*, t. II, pp. 514 et 515.

Digitized by Google

sûr et constaté par un document authentique [1] qu'un nommé Pierre de Bruges, potier d'étain de son métier, fondit à Tournai, en 1346, un *conoil* ou canon d'une assez grande force, puisque le projectile perça deux murs de la ville et étendit un homme roide mort, après avoir parcouru une distance considérable. Les Gantois se servirent de canons devant Cassel, en 1347, et à la bataille de Beverholt, en 1382. On est fondé à croire qu'ils firent usage au siége d'Audenarde, la même année, de l'énorme pièce d'artillerie qui se voit encore à Gand et y porte le nom de *grand canon* ou de *Margot l'enragée* (Dulle Griete).

Nous devons avouer toutefois qu'on ignore dans quelle circonstance le canon fut employé la première fois.

Jugement arbitral du duc Guillaume de Bavière, comte de Hainaut, etc.

(A Ath, le 4 juin 1357.)

Dus Guillaumes de Bavière, comtes de Hainau, de Hollande, de Zeelande et sires de Frise, faisons savoir à tous, que nous, regardans le grant grief, mortalité et pestillence, qui a esté avec les arsins [2] et domages entre no chier et amé cousin Lodewyc, comte de Flandres, duc de Brabant, comte de Nevers, de Rhetel et sires de Malines, et ses bonnes villes et pays, et bonnes gens, nobles et non nobles, d'une part, et no chier et amé cousin Wenchelin, duc de Luxembourgh et de Brabant, et no chière anthe [3] la ducoise de Luxembourgh et de Brabant, leur bonnes villes et pays, et bonnes gens, nobles et non nobles, d'autre part, et encore s'en peuist estre ensuivis, se li dessus nommet, ne s'en fuissent mis par nostre requeste et pourcach [4] sur nous, qui ce avons empris, pour bien de païs, de concorde et de loyal amour, qui doit estre entre eaux [5], tant par affinitet qu'il ont deux seurs germaines, et que leur pays sont tenant l'un à l'autre, dont ils doivent estre loyal amy et voisin ensamble, et ossi que nous en estions et sommes tenut dou meller, pour cause de ce que nous estons de linaige prochain à l'un et à l'autre, et pour abaissier et estindre si grant grief et crueuse emprise, que faite avoient l'un sur l'autre; que toutes bonnes gens doivent désirer et estre liet [6] pour chou, et que nous dus Guillaumes de Bavière dessusnommés, par le pooirs que no dessusdit cousin et nostre anthe nous ont donnet, et par leur lettres ouvertes, de dire et sentencyer no dit, ordenons, déclarons, et disons nodit dit, en la fourme et manière que chi-après s'ensuit :

Premiers, que bonne pais soit entre nos dessusnommés cousins et anthe, leur pays,

[1] Voir une notice sur les armes à feu, de M. Lenz, dans les *Nouvelles archives historiques*, t. II, p. 602.
[2] *Arsins*, incendies.
[3] *Anthe*, tante.
[4] *Pourcach*, sollicitation, poursuite.
[5] *Entre eaux*, entre eux.
[6] *Estre liet*, être contentes, joyeuses; de *laetus*.

Digitized by Google

villes et gens nobles et non nobles, de ce jour en avant sans jamais remouvoir, pour cause ne ocoison qui ait esté entre yaus, jusques aujourd'huy, et que bonne faveur et loyal amour aient l'un à l'autre, en tous cas ossi bien et ossi avant que s'il n'eussent onques eu nulle dissencion l'un à l'autre, sans faire nul rewart [1] ne reproche, de cause qui avenue soit, en quelconques manière que ce soit, par fait de guerre ne autrement.

Item, que tout prisonnier, qui pris ont esté à la cause de ces werres, tant de l'une partie comme de l'autre, qui payet n'ont leur raenchon, ou dont le jour de paiement n'est eskeus, qui sont en prison ou en recréance, soient quitté et délivré, sans riens payer ne estre poursuy de nulle raenchon, fors que leur frais raisonnablement.

Item, nous rewardons que aucunes personnes, pour ledit débat et werres, sont eskachiet [2] dou leur et de chou fachent ou puissent faire pourcach, tant de l'une partie comme de l'autre, ou autrement le hayne demourroit entre lesdis pays, s'il ne revenoient sur le leur, disous que pour bien de pais et de concorde cascuns reviègne sur le sien; et se fera nos chière cousins le conte de Flandres vuidier sa warnison de Affligbem, et remettre l'abbé et son couvent ens, et défaire se forterèce et ne porront nodit cousin de Flandres ne de Brabant, d'ores en avant ledite église oppresser, ne faire maison défensable, comme c'est église et ordène, appartenans au service de Nostre-Seigneur, et demoura d'ore en avant comme abbaye et maison de religion, sans jamais faire, ne de l'une partie ne de l'autre nulle fortrèche.

Encores disons et ordenons, pour tant que les bonnes villes de Brabant et aucuns des banères [3], chevaliers et escuiers doudit pays fisent foit, serement et hommaiges à nodit cousin de Flandres, que d'ores en avant, le vie de nodit cousin, les villes de Louvaing, de Brousselles, de Nivelles et de Thielemont le serviront, cascune ville d'une bannière à escuches de ses armes, et desous cascune banière vint chinc hommes d'armes, sys sepmaines durant, sur le coust et le frait dou pays et desdites villes de Brabant, une fois l'an, toutes fies [4] que nodit cousin de Flandres bara ost de son pays de Flandres, encontre tous, horsmis le duc et le ducesse, no anthe, et le pays de Brabant, et entre ces quatre banières ara deux banères et deux chevaliers, et parmi tant, nosdis cousins doit quitter lesdites bonnes villes de Brabant, les chevaliers et escuiers, de leur foy et serment que fait li ont, et anuller et rendre les lettres qui faites en furent, et ossi pour chou que par le certaine requeste, que lesdites bonnes villes et les chevaliers et escuiers de Brabant, qui juret avoient, par leur conseil et accort, nosdis cousins emprist le title du duc de Brabant, il li demoura, s'il li plaist, toute sa vie, pour le service qu'il doit avoir d'yaus, si que dist est.

Item, comme nos chiers et amés cousins le comte de Flandres li pères, jadis de bonne mémoire, si acquist et acata la ville de Malines, les villiaus et appartenances d'icelle, et nos très-chiers et amés sires et oncles le roys Philippe de France, que Diex fache bonne

[1] *Rewart*, observation, récrimination.
[2] *Escachiet*, chassés.
[3] *Banères*, bannerets, barons.
[4] *Toutes fies*, toutes les fois.

Digitized by Google

merchi, en ordenast et desist que, pour chou que nosdis cousins quitterait ledit markiet, il aroit quatre vint-sys mille et cinq cens royaus d'or, et il soit cause que nosdis cousins de Flandres à présent si eut grans coup, frais et domaiges, en ches werres durans, à le cause de chou que tenu ne le fu mie le première pais et ordenance, qui accordé fu à Aske et scellée, nous, en restoir et récompensation de chou, disons, ordenons et déclairons, que d'ores en avant, il et ses hoirs, contes et contesse de Flandres, soit sires de ladite ville de Malines, des villiaus et des appertenances et dépendances d'icelle, à tousjours perpétuelment et héritablement, en la fourme et manière que les lettres dudit acat contienent, et que li évesques de Liége et ses capitles l'en rechurent en foy et en homaige, desquels on tient ledite ville de Malines en fief, à tenir ledit conte de Flandres, no cousin, et ses hoirs, franquement, héritablement et perpétuelment, sans autrui avoir ne demander droiture, seignourie, ne hauteur; et se doit nodite anthe et nos cousins de Luxembourgh et de Brabant, pour le doubte des débas qui s'en porroient naistre en temps à venir, rendre toutes les lettres qu'il en ont de ledicte ordenance, que nosdis chiers oncles li roys en fist, de ledite ville de Malines, devens trois sepmaines proïsmes[1].

Item, comme il soit ainsi que no chière et amée cousine, la comtesse de Flandres, ne fuist onques assenée ne payée de no très chier et amé cousin le duc de Brabant sen père, que Diex absoille, dou droit de son mariage, ne de droiture, que eschier li pouist de luy, ne en meubles ne en cateulx, pourquoy ledite were se commencha, nous, en recompensacion, disons, ordenons et li accordons à avoir chascun an, pour lui et pour ses hoirs qu'elle a à présent, ou ara de nostre chier cousin de Flandres, jusques à le somme de dys mille florins de Florence par an, et pour celledite somme nodicte cousine tenra héritablement, pour li et pour ses hoirs devantnommés, en fief et en homage de no anthe la ducesse et de ses hoirs, dus de Brabant, le ville d'Andwers, et toutes les appendances et appertenances entirement, devens leur franchise, avoec le justice haute et basse, rentes et revenues, en rabat des dys mil florins par an; et en cas que ledite ville, les rentes et revenues dessusdit ne porroient les dis mil florins de Florence accomplir, nous lui assennerons, par juste prisie, faite devant le mois après la date de ces lettres de chou qui faudra de ledite somme de florins par an, ès villiaus et revenues estans au plus près de ledite ville d'Andwers, et de chou devra nodite cousine de Flandres faire foy, homage et service, et nos cousins li contes de Flandres comme ses mambours, et leur hoir, si comme dit est, à no chière et amée anthe dessusnommée et à ses hoirs, dus de Brabant, ensi que frère et seur maisnet ou maisnée doivent faire à leur frère et seur aisnet ou aisnée. Et se doit la ville d'Andwers, devans trois sepmaines proïsmes, faire serment à nos cousine le contesse de Flandres, et à no cousins le conte de Flandres, comme sen mambours, et parmi tant quant nodite cousine de Flandres et nos cousins li contes de Flandres, comme ses mambours, feront faire serment à ceaus de ledite ville, il leur aront enconvent et confirmeront frankement à tenir toutes les franchises, priviléges et chartres, qu'il ont des dus de Brabant, de temps passé jusques aujourd'huy.

[1] *Proïsmes*, prochaines.

Digitized by Google

Encore disons et ordenons, qûe de ce jour en avant no chière et amée anthe, le ducesse de Lucenbourgh et de Brabant, ne nos cousins le dus de Lucenbourgh et de Brabant, comme ses mambours, ne povent vendre, aliéner ne eslongier le païs de Brabant en tout ne en partie. Encore disons, que no chière cousine le comtesse de Flandres, et no chiers cousins li contes, comme ses mambours, doivent faire foy et homaige de ledite ville d'Andwers et des appendances, dont elle sera assenée jusques à le somme des dis mil florins par an, si comme dist est, à no chière et amée anthe le ducesse de Brabant, pour lui et pour ses hoirs, dedens les xv jours après le date de ces lettres, et il le doivent recevoir.

Et toutes cesdites raisons, ordenances et devises dessusdites, ou cas que aucuns tourbles y porroit estre, de l'une partie ou de l'autre, nous, dus Guillaumes dessusnomméis, y mettons nos retenance en tout ou en partie, pour ordener et déclairer, si avant que bon nous semblera, pour lesdites parties warder en leur droit et raison, toutesfois que requis en serons, de l'une partie ou de l'autre, dedens le mois après leur semonce. Et parmi toutes ces ordenances dessusdites, nous disons que bonnes pais soit entre no dessusnommées cousins, et leur païs ensamble, à tous jours mais[1]. Et ce dit disons par nostre discrétion, comme poissans, par le force et virtu que li dessusnomméit nous en ont donneit, sur leur lettres obligatores que faites en ont à nous.

Encores disons, déclairons, pour plus grant amour et faveur avoir l'un à l'autre, et pour toutes doubtes et obscurtés oster, que tous marchans de Malines, d'Andwers, de Louvaing, de Brouxelles et de toutes les autres villes de Brabant, puissent aler, passer et mener paisiblement et aimablement leur marchandises, de l'une ville à l'autre, sans nulle nouvelle ordenance, deffense, ne ocoison accoustumée, autrement qu'il n'estait en devant le commenchement de ces weres.

Et pour tant que li dus de Brabant, anchiennement, pour le cause de le seignourie d'Andwers, s'escrivoit marchis dou saint-empire, et il soit ensi que par no ordenance dessusdite, no chiere cousine la contesse de Flandres soit assenée de ledite ville d'Andwers, en la manière que dit est, à tenir en foy et en homiage de nodicte chière anthe, et à ses hoirs, dus de Brabant, nous ordenons et déclairons que le title dou marchit demeure à nodite anthe et à ses hoirs, dus de Brabant, pour cause de le souveraineteit que on le tient en fief de li.

En tesmoignage des choses dessusdites, nous, dus Guillaumes de Bavière dessusnommeis, avons mis et appendu no scel à ches présentes lettres, qui furent faites et données en no ville d'Ath, le jour de le Triniteit, quatrime jour de mois de juing l'an de grâce mil trois cens et chinquante sept.

Vidimus original aux archives de la Flandre Orientale.
Recueil d'A Tayeo, tom. II, fol. 200 verso.

[1] *A tous jours mais*, à tout jamais.

FIN.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

3 2044 093 293 199

Digitized by Google